

13. ДИСПЕРСИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Дисперсия - это мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания:

$$DX = M(X - MX)^2$$

13. ДИСПЕРСИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

X	-10	0	20
p	0,3	0,5	0,2

DX - ?

Для вычисления дисперсии часто используют другую формулу:

$$DX = MX^2 - (MX)^2$$

Доказательство:

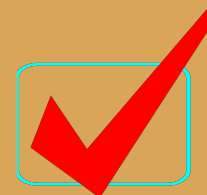
$$DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2MX \cdot X + (MX)^2) =$$

Используем свойства математического ожидания:

$$= MX^2 - M(2MX \cdot X) + M(MX)^2 =$$

$$= MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 =$$

$$= MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$$



СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ



*Дисперсия от постоянной
величины*

равна нулю:

$$DC=0, \quad C=const$$

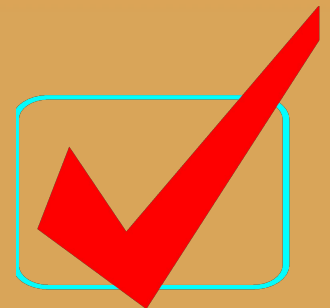
Доказательство:

Используем второе выражение для дисперсии. Так как

$$MC=C, \quad MC^2=C^2$$

то

$$DC=MC^2-(MC)^2=C^2-C^2=0$$





*Постоянная величина
выносится за знак дисперсии
в квадрате:
 $D(k X) = k^2 DX$*

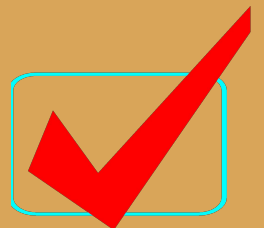
Доказательство:

Используем определение дисперсии:

$$D(k \cdot X) = M(k \cdot X)^2 - (M(kX))^2 =$$

По свойству математического ожидания:

$$\begin{aligned} M(k^2 X^2) - (kMX)^2 &= k^2 \cdot MX^2 - k^2 \cdot (MX)^2 = \\ &= k^2 \cdot (MX^2 - (MX)^2) = k^2 \cdot DX \end{aligned}$$



3

Дисперсия всегда неотрицательна:

$$D X \geq 0$$

*Дисперсия суммы двух
независимых случайных
величин равна сумме дисперсий:*

$$D(X + Y) = D X + D Y$$

Доказательство:

Распишем дисперсию суммы случайных величин по определению дисперсии:

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M(X + Y)^2 - (M(X + Y))^2 = \\ &= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (MX + MY)^2 = \\ &= MX^2 + 2MXY + MY^2 - ((MX)^2 + 2MX \cdot MY + (MY)^2) = \\ &= (MX^2 - (MX)^2) + (MY^2 - (MY)^2) + 2(MXY - MX \cdot MY) = \\ &= DX + DY \end{aligned}$$

Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратичным отклонением:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}$$

СКО показывает среднее отклонение случайной величины от своего среднего значения.

Пример: В страховой компании застраховано 10 тысяч человек. Каждый застрахованный выплачивает в год 1 тыс. рублей. Вероятность наступления страхового случая в течение года для одного застрахованного 0,01. Выплата при наступлении страхового случая равна 50 тыс. рублей. Пусть X – прибыль страховой компании за год. Найти MX , DX , $\sigma(X)$

Пример: Стоимость акции некоторой компании в настоящий момент составляет 100 д.е. В следующем месяце стоимость может возрасти на 10 д.е. с вероятностью 0,7, остаться неизменной с вероятностью 0,2 и упасть на 10 д.е. с вероятностью 0,1. Пусть X – стоимость акции через месяц. Найти MX , DX , $\sigma(X)$

Пример: Инвестор может приобрести акции двух компаний. Начальная стоимость акций одинакова и составляет 100 д.е. В следующем месяце

Для 1-й компании

рост на 10 д.е. с вероятностью 0,7,

без изменений с вероятностью 0,2

падение на 10 д.е. с вероятностью 0,1

Для 2-й компании

рост на 20 д.е. с вероятностью 0,6,

без изменений с вероятностью 0,1

падение на 20 д.е. с вероятностью 0,3

Акции какой компании лучше купить инвестору?