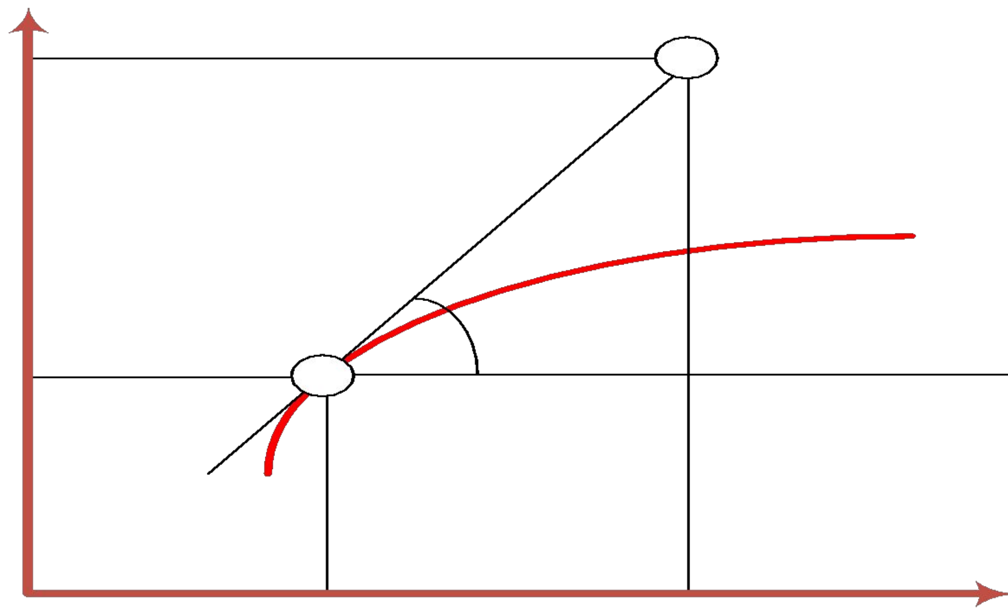
Интегрирование уравнений движения ЭЭС

Численное интегрирование дифференциальных уравнений

- Большинство (систем) дифференциальных уравнений, которые описывают реальные технические системы, не могут быть решены аналитически. То есть, для них не может быть получено точное решение в виде некоторого аналитического выражения.
- Таким образом, дифференциальные уравнения движения ЭЭС решают путем их численного интегрирования, то есть, вместо точного аналитического решения получают приближенное решение, используя тот или иной численный метод.

Метод Эйлера

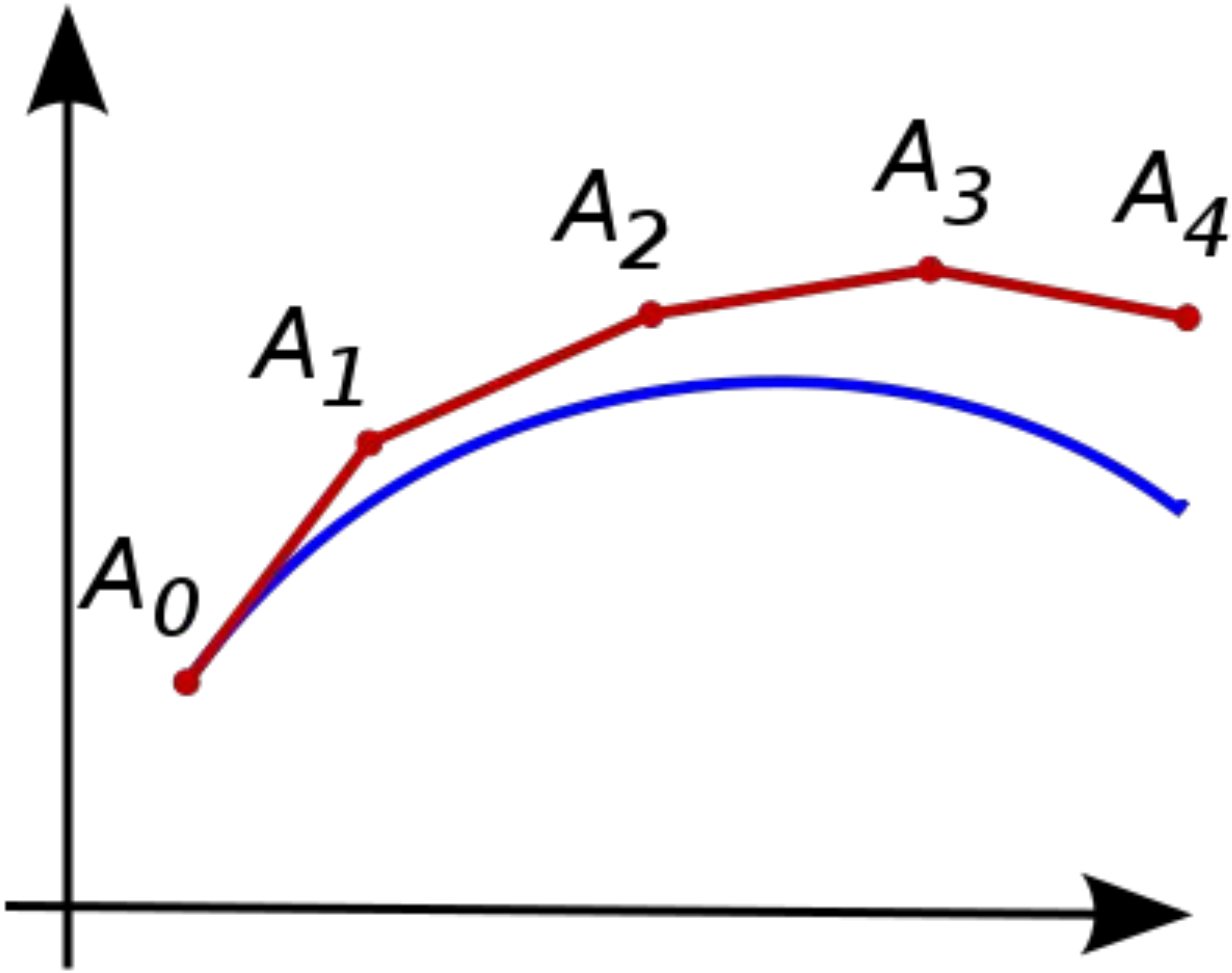
- Рассмотрим дифференциальное уравнение: $y' = dy/dt = f(y,t)$ с начальным условием $y(t0)=y0$. Тогда значение производной в начальной точке y0 и t0 будет равно $f(y0,t0)$.
- При малом изменении dt можно заменить исходную производную на выражение в приращениях: $dy/dt = \Delta y/\Delta t = (y1-y0)/(t1-t0) = f(y0,t0)$.
- Введя обозначение $t1-t0=h$, можно записать: $y1=y0+f(y0,t0)*h$
- $y_{i+1}=y_i+f(y_i,t_i)*h$ – выражение для численного интегрирования метода Эйлера.



Метод Эйлера

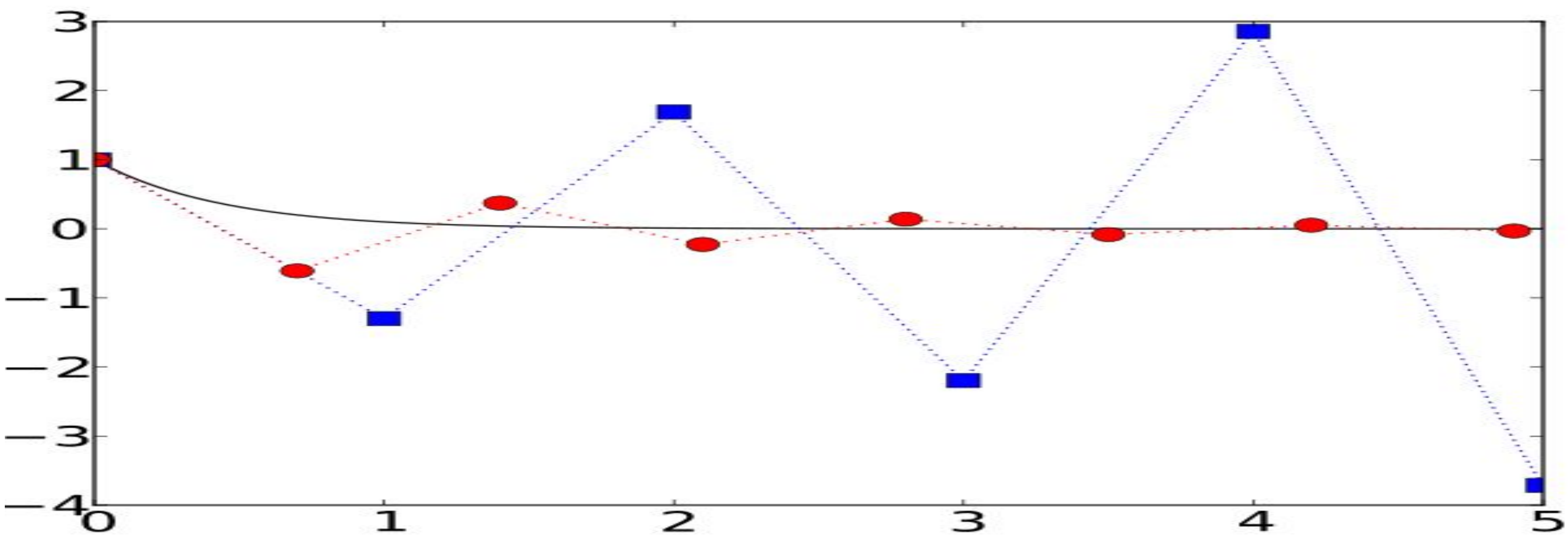
- Схема интегрирования метода Эйлера: $y_{i+1}=y_i+f(y_i,t_i)*h$, где h – шаг интегрирования.
- В чем недостаток? Схема интегрирования метода Эйлера подразумевает, что значение производной остается постоянным в интервале шага интегрирования. То есть, исходная функция f(y,t) заменяется касательной. Подобное приближение допустимо лишь для очень небольших значений шага интегрирования, причем, чем больше шаг интегрирования, тем больше погрешность (отличие точного и приближенного решений).
- Таким образом, устойчивость метода Эйлера (как и любого другого метода численного интегрирования) зависит от величины шага интегрирования!

Метод Эйлера



Метод Эйлера. Устойчивость.

- Уравнение y’=-2.3*y, y(t0)=1.
- Точное решение y(t)=exp(-2.3t), решение стремится к нулю в бесконечности.
- Точки численного решения методом Эйлера: синие – h=1; красные – h=0.7. При шаге h=1 метод не сходится к точному решению, стремясь в бесконечность.

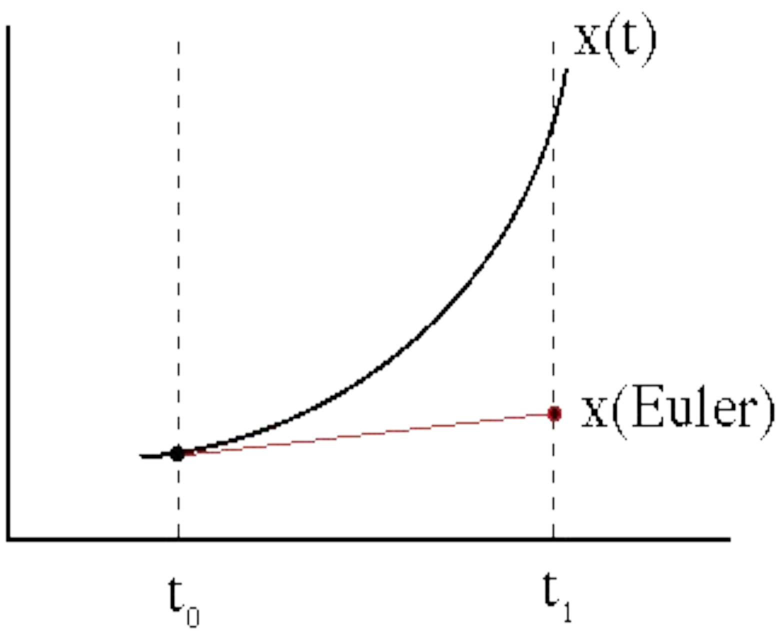


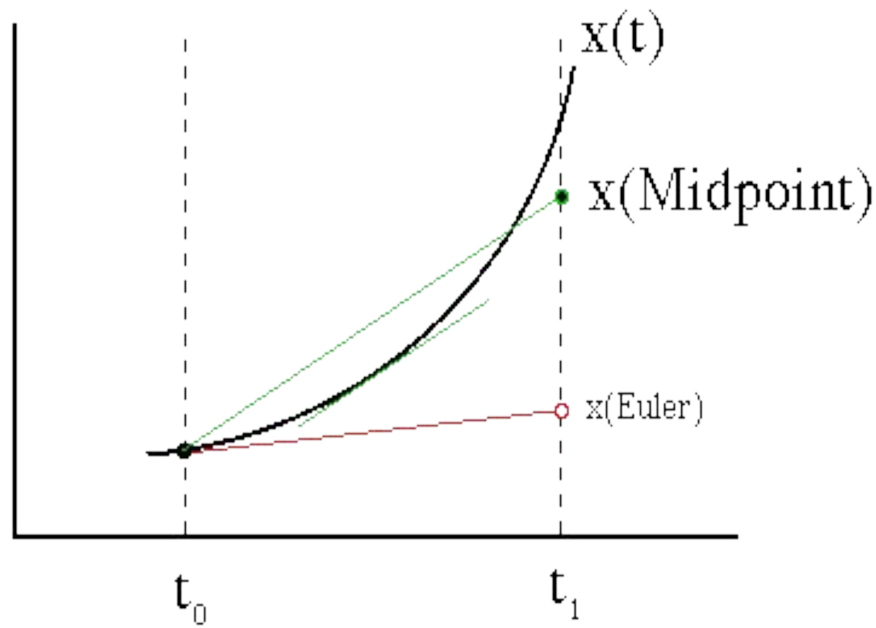
Модифицированный метод Эйлера с пересчетом

- Сначала, используя классический метод Эйлера, находят грубое (прогнозное) значение: **yi+1**=yi+f(yi,ti)*h.
- Далее выполняют пересчет, используя грубое значение **yi+1**: yi+1=yi+(f(yi,ti)+ f(**yi+1**,ti+1))/2*h.
- Таким образом, значение производной НЕ остается постоянным в интервале шага интегрирования, а принимается равным среднему значению между исходной производной и производной, посчитанной исходя из величины прогнозного значения **yi+1.**

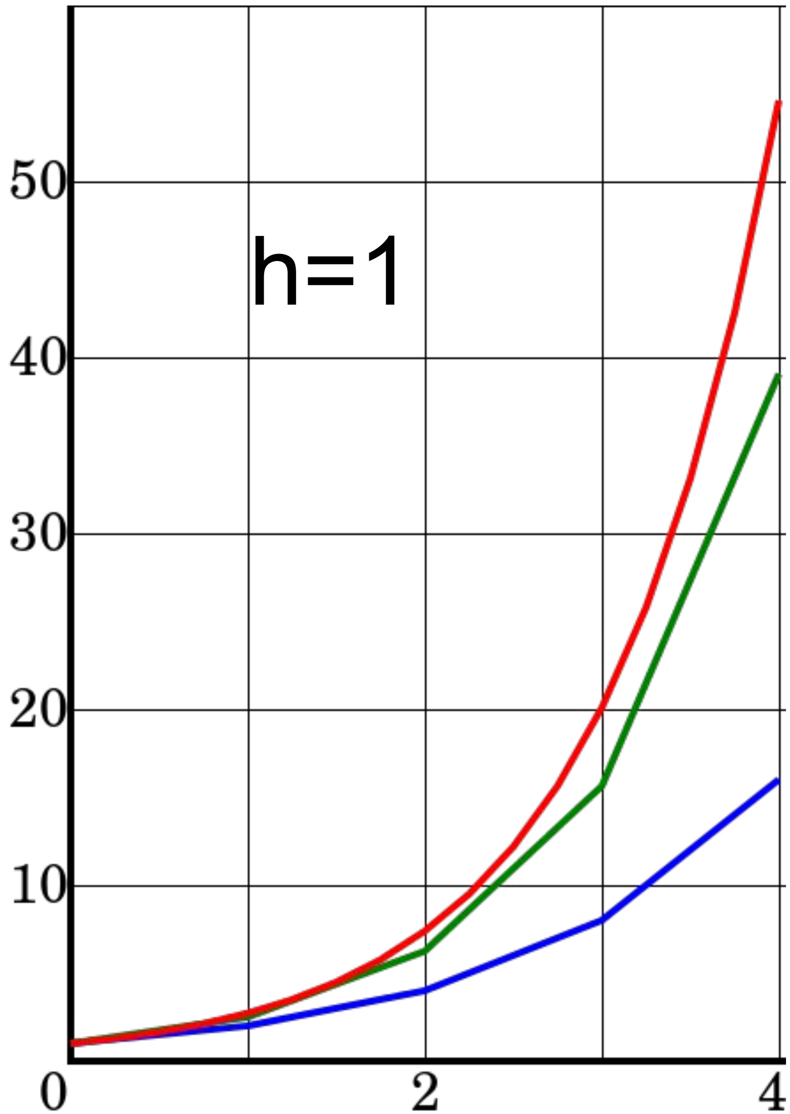
Модифицированный метод Эйлера

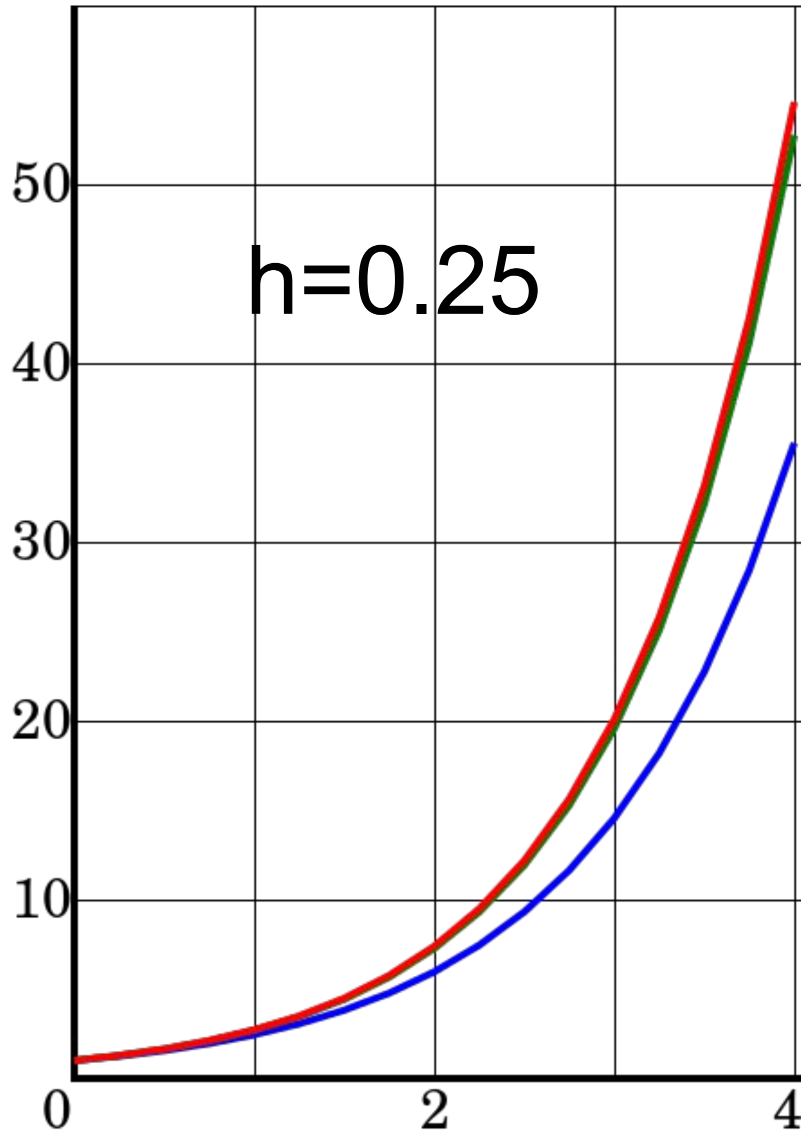
- Модифицированный метод Эйлера, он же метод трапеций, он же один из разновидностей predictor-corrector (метод с предсказанием), он же метод Рунге-Кутта второго порядка.





Сравнение классического и модифицированного методов Эйлера



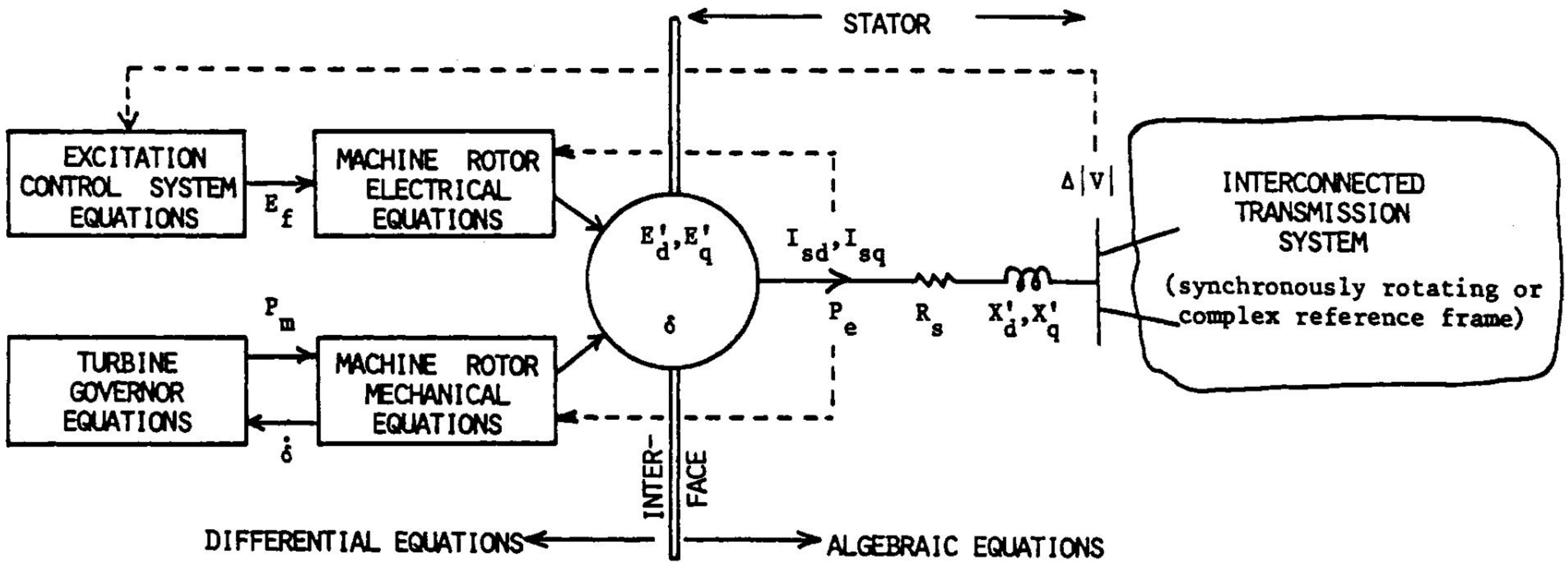


Вернемся к уравнениям динамики ЭЭС

- Уравнения динамики ЭЭС – алгебро-дифференциальные уравнения. Почему?

Уравнения динамики ЭЭС

- Если пренебречь переходными (электромагнитными) процессами в обмотках статора синхронной машины, то статор можно представить в виде фиксированных реактансов (d и q компоненты).
- Уравнения статора + уравнения сети – алгебраические уравнения. Уравнения машины – дифференциальные уравнения метода пространства состояний.



Запись уравнений движения ЭЭС

- ***y*** – переменные состояния, ***f(x,y)*** – дифференциальные уравнения пространства состояний.
- ***x*** – алгебраические переменные, ***g(x,y)*** – алгебраические уравнения сети.

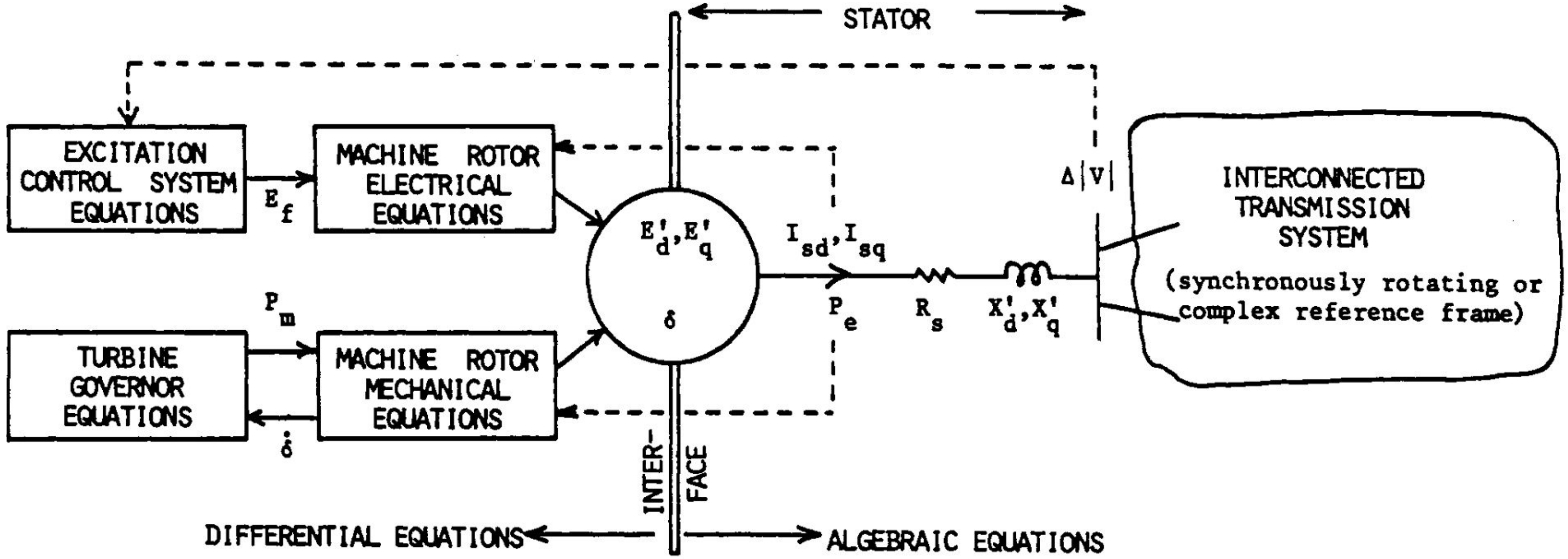
$$\dot{y} = f(y, x)$$

$$0 = g(y, x).$$

Взаимодействие дифференциальных и алгебраических уравнений.

- Переменные состояния ***y***, в том числе, включают набор переменных ***E***, которые участвуют как в дифференциальных, так и в алгебраических уравнениях. В частности, ***E*** включает переменные состояния ***E'd, E'q*** и ***δ*** (угол ротора).
- Алгебраические переменные ***x**,* в том числе, включают набор переменных ***u**,* которые участвуют как в дифференциальных, так и в алгебраических уравнениях. В частности, u включает токи статора ***Isd, Isq***, электрическую мощность **Pe**, отклонения напряжений Δ***|V|***.

Взаимодействие дифференциальных и алгебраических уравнений.



$$
\begin{aligned}
0 &= v_q + r_a i_q - e'_q + (x'_d - x_l) i_d \\
0 &= v_d + r_a i_d - e'_d - (x'_q - x_l) i_q
\end{aligned}
$$

$$p_e = (v_q + r_a i_q) i_q + (v_d + r_a i_d) i_d$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta} &= \Omega_b(\omega - 1) \\
\dot{\omega} &= (p_m - p_e - D(\omega - 1))/M \\
\dot{e}'_q &= (-f_s(e'_q) - (x_d - x'_d) i_d + v_f^*)/T'_{d0} \\
\dot{e}'_d &= (-e'_d + (x_q - x'_q) i_q)/T'_{q0}
\end{aligned}
$$

Решение системы ДАУ ЭЭС

- Все большинство схем решения ДАУ характеризуется следующими основными свойствами:
  – способ взаимодействия ДУ и АУ,
  – используемый метод интегрирования (Эйлер, Рунге-Кутта и т.п.),
  – способ решения АУ (Гаусс-Зейдель, Ньютон и т.п.).
- Можно выделить следующие способы взаимодействия ДУ и АУ:
  – совместное решение ДУ и АУ,
  – раздельное решение ДУ и АУ.

Решение системы ДАУ ЭЭС

- Раздельное решение систем АУ и ДУ – наиболее распространенный способ.
- Дифференциальные уравнения интегрируются отдельно, алгебраические уравнения решаются отдельно, плюс имеется некоторый механизм взаимодействия АУ и ДУ.
- В этом случае метод интегрирования ДУ и метод решения АУ могут быть выбраны независимо, подобный подход придает б**о**льшую гибкость и простоту как с точки зрения программирования, так и с точки зрения анализа.

Решение системы ДАУ ЭЭС

- Совместное решение систем АУ и ДУ – менее распространенный способ (по крайней мере, был).
- Формируется общая система алгебраических уравнений с неизвестными y[n] и x[n].
- В этом случае решение значения y[n] и x[n] ищутся совместно, т.е. отсутствует механизм взаимодействия АУ и ДУ, который является источником дополнительной ошибки, однако метод интегрирования ДУ и решения АУ не могут быть выбраны независимо.

Раздельное решение. Predictor-Corrector

1. **Predictor.** Рассчитать ***y'[n-1]=f(y[n-1], u[n-1])***
2. Предсказать ***y[n]: y[n]=y[n-1]+y'[n-1]*h*** – классический метод Эйлера.
3. Включить набор ***E[n] (ЭДС генераторов)*** из ***y[n]*** в уравнения сети ***I(E,V)=Y*V,*** рассчитать ***V[n] (V=Y^-1*I(E,V)) (напряжения узлов сети),*** далее рассчитать ***u[n] (новые инъекции токов генераторов, алгебр. перемен.).***
4. ***Corrector.*** Рассчитать ***y'[n]=f(y[n], u[n])***
5. Скорректировать значения переменных состояния ***y[n]: y[n]=y[n-1]+(y'[n-1]+ y'[n])/2 *h*** – корректировка метода Эйлера
6. Включить скорректированный набор ***E[n] (ЭДС генераторов)*** из ***y[n]*** в уравнения сети ***I(E,V)=Y*V,*** вновь рассчитать ***V[n] (напряжения узлов сети),*** далее рассчитать ***u[n] (новые скорректированные инъекции токов генераторов).***
7. Следующий шаг.