

Вневписанная окружность

Подготовила:

ученица 8 класса
МБОУ СШ №47
Поэтова Ольга

Руководитель:

учитель математики
МБОУ СШ №47
Зенченко М.А

Цель

- Научиться решать геометрические задачи, которые приводят к появлению вневписанной окружности, и составить алгоритм их решения.

Задачи

- 1. Ввести определение вневписанной окружности треугольника и рассмотреть ее свойство.
- 2. Проанализировать какие задачи в ОГЭ приводят к появлению вневписанной окружности треугольника, и рассмотреть их решение.
- 3. Составить алгоритм решения задач, которые приводят к появлению вневписанной окружности.

Понятие вневписанной окружности

- **Определение:**

Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других.

Понятие вневписанной окружности

- Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A , B и C (рис.1).
Вопрос: сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

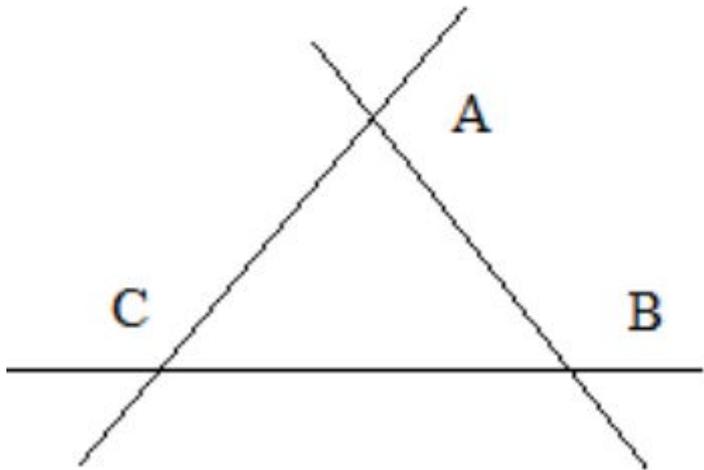


Рис. 1

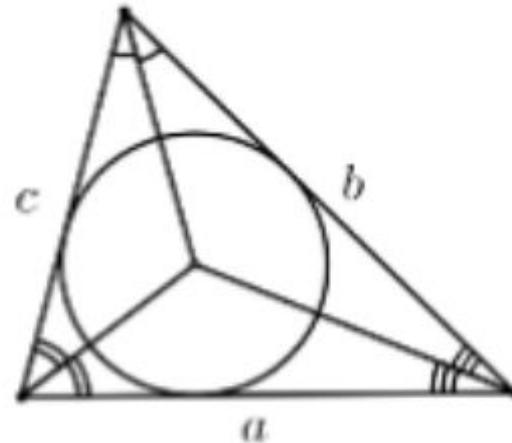


Рис. 2

- Многие дают немедленный ответ: конечно одна, а именно, центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис.1), но этот ответ неверен. Действительно, рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC (рис.3). Так как сумма углов, образованных ими со стороной BC, меньше, чем 180° , то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке OA. Тогда точка OA равноудалена от прямых AB, AC и BC.

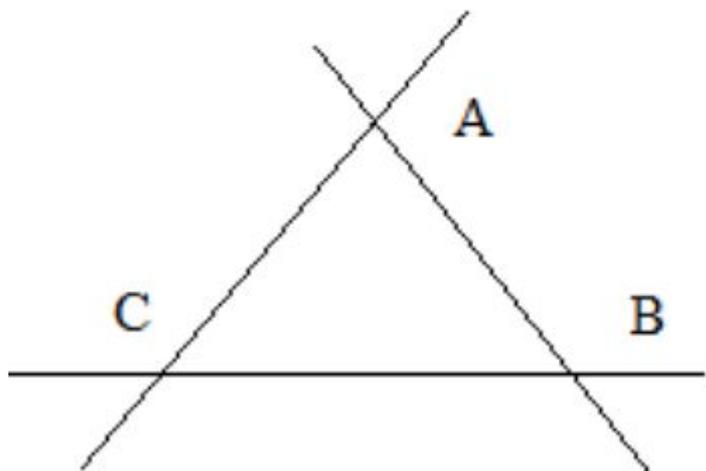


Рис. 1

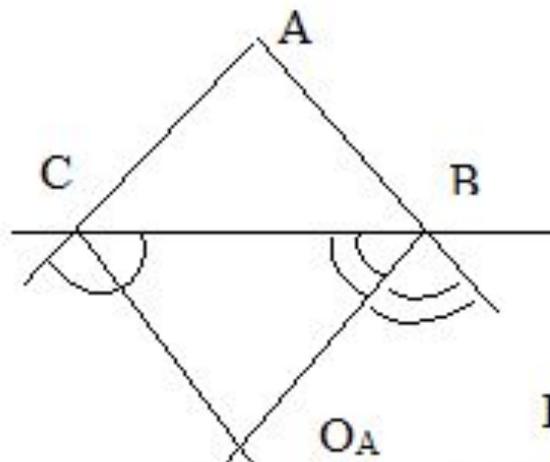
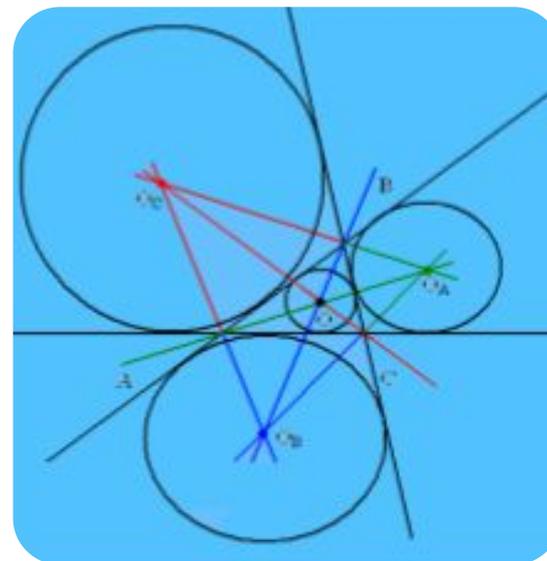


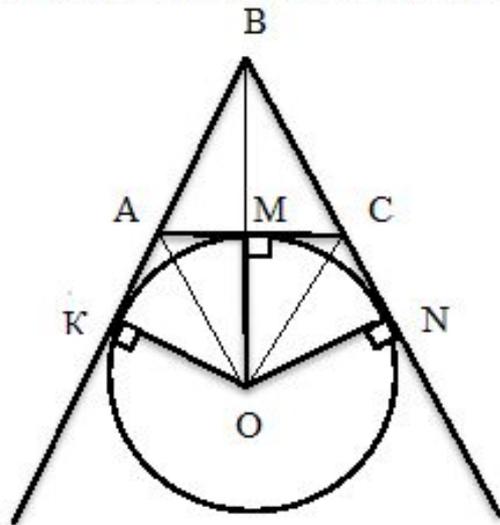
Рис. 3

- Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника ABC , получим еще две точки, обладающие требуемым свойством. Таким образом, помимо центра окружности O , вписанной в треугольник ABC , существуют, по крайней мере, еще три точки O_A , O_B , O_C равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.
- **Определение:** Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других [2, 11].



Свойство вневписанной окружности

- **Свойство:** Центр вневписанной окружности в треугольник есть точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника, противолежащего той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис двух внешних углов треугольника.



Свойство вневписанной окружности

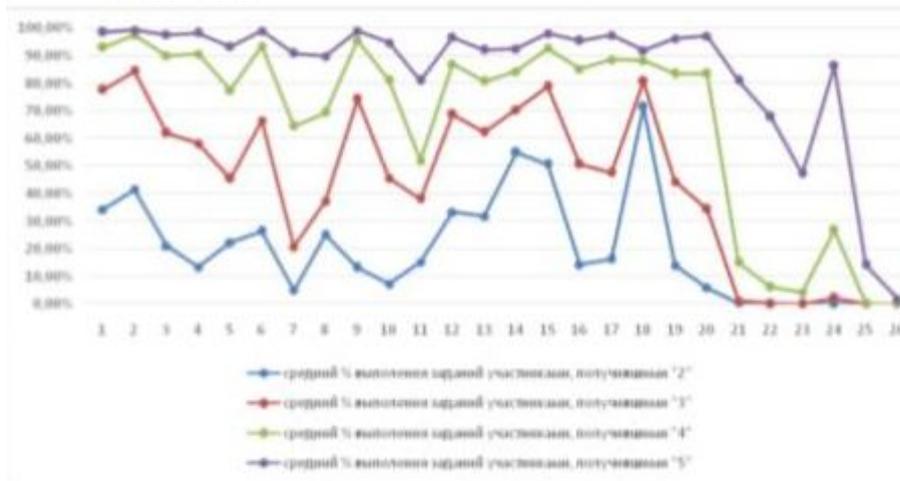
- **Доказательство:**

Т. к. окружность касается сторон угла CAK , то центр окружности O равноудален от сторон этого угла, следовательно, он лежит на биссектрисе угла CAK . Аналогично, точка O лежит на биссектрисе угла ACN . Т. к. окружность касается прямых BA и BC , то она вписана в угол ABC , а значит, её центр лежит на биссектрисе угла ABC .

Ч.т. д.

Вневписанная окружность в задачах

- По итогам ОГЭ прошлого года многие девятиклассники даже не приступали к решению задач №26[8].
- Проанализировав эти задания[4,6-10,12], я заметила, что в №26 встречаются три вида задач про вневписанную окружность и что условия следующих задач не содержат термина «вневписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура



Задача 1. Алгоритм решения

- 1. Обозначить O – центр невписанной окружности, Q – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , M – точку касания окружностей.
- 2. Вычислить $AM=CM= CA:2 = a:2$.
- 3. Рассмотреть лучи AQ и AO как биссектрисы смежных углов и сделать вывод что угол OAQ прямой.
- 4. Рассмотреть прямоугольный треугольник AQO и используя свойство пропорциональных отрезков записать: $AM^2= QM \cdot MO$.
- 5. Вычислить $QM= AM^2MO= (a:2)^2r$
- 6. Записать ответ.

Задача 2. Алгоритм решения

- 1. Обозначить Q – центр вневписанной окружности, O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , QM и ON - радиусы, проведенные в точки касания окружностей с прямой AC , S - центр окружности описанной около треугольника ABC , r – радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- 2. Рассмотреть лучи BO и BQ как биссектрисы смежных углов и сделать вывод что угол OAQ прямой.
- 3. Рассмотреть прямоугольный треугольник BOQ и используя свойство пропорциональных отрезков вычислить BK по формуле $BK = \sqrt{OK \cdot QK} = \sqrt{a \cdot b}$.
- 4. Обозначить AN через x .

Задача 2. Алгоритм решения

- 5. Рассмотреть подобные прямоугольные треугольники ANO и AMQ и найти коэффициент подобия как отношение радиуса вневписанной окружности к вписанной: $k=b/a$. Обозначить через полученное значение k : $AM = kx$, $MN = kx - x = (k-1)x$.
- 6. Рассмотреть равные отрезки MC , CK и CN , как касательные, проведенных из одной точки, и вычислить $CN=CK=CM=\sqrt{a \cdot b}$, $MN=2CK=2\sqrt{a \cdot b}$, затем $AN=x=2\sqrt{a \cdot b} : ((k-1)x)$, $AB = AC = AN + NC = 2\sqrt{a \cdot b} : ((k-1)x) + \sqrt{a \cdot b}$.
- 7. Рассмотреть прямоугольный треугольник ABK и найти AK : $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2}$.

Задача 2. Алгоритм решения

- 8. Рассмотреть прямоугольный треугольник SBK , в котором по теореме Пифагора $r^2 = (AK - r)^2 + BK^2$, выразить и вычислить $r = \frac{AB^2}{2AK}$.
- 9. Записать ответ.

Задача 3. Алгоритм решения

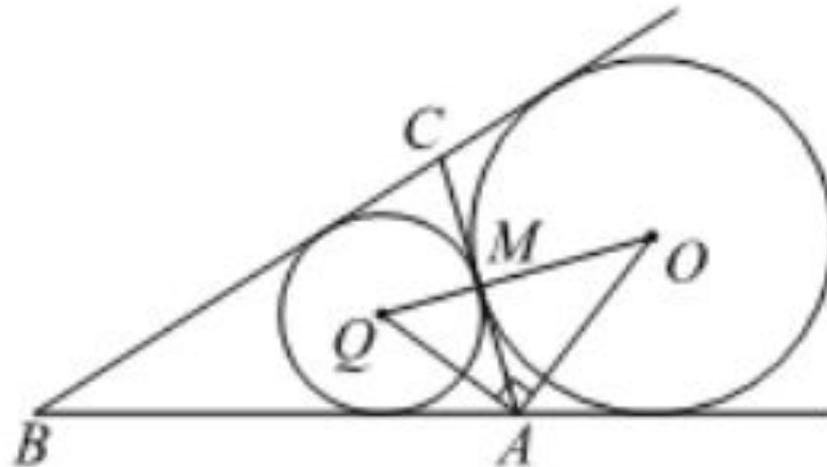
- 1. Обозначить M – центр вневписанной окружности, O – центр вписанной окружности и вычислить $OM = a + b$.
- 2. Провести перпендикуляр OP из центра вписанной окружности на радиус MC вневписанной окружности. Вычислить $MP = MC - PC = MC - OA = b - a$.
- 3. Рассмотреть прямоугольный треугольник OPM и найти $OP = \sqrt{OM^2 - MP^2}$.
- 4. Опустить перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD . Рассмотреть прямоугольные треугольники: BQD и OPM (подобны по двум углам), записать $BQ/BD = OP/OM$. Откуда вычислить $BQ = OP \cdot BD/OM$.
- 5. Записать ответ.

ЗАДАЧА 1. Нахождение радиуса окружности вписанного в треугольник.

- (Демонстрационный вариант 2018г., КИМ[7])
- **«Основание AC равнобедренного треугольника равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC . Найдите радиус окружности вписанной в треугольник ABC ».**
- Решение:
- Сделаем чертеж к данной задаче. Так как окружность касается стороны треугольника и продолжения двух других сторон, то – это внеписанная окружность.
- Пусть O – центр внеписанной окружности, Q – центр окружности, вписанной в треугольник ABC .
- Так как центр вписанной окружности и внеписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то AQ – биссектриса угла BAC , а AO – биссектриса смежного с ним угла.

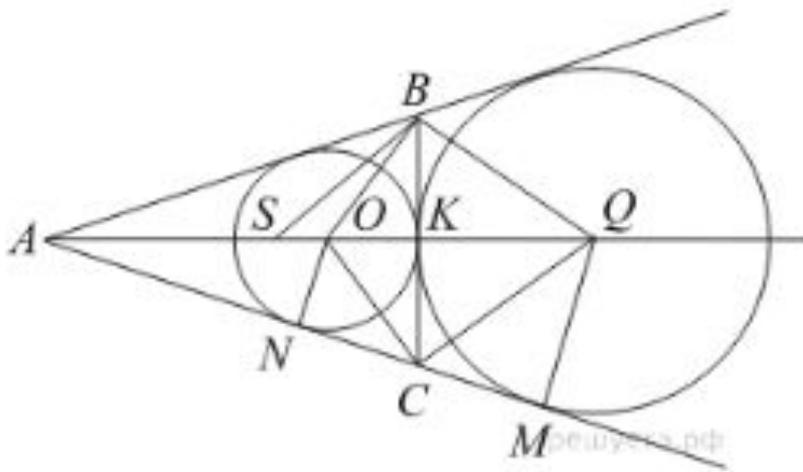
ЗАДАЧА 1. Нахождение радиуса окружности вписанного в треугольник.

- (Демонстрационный вариант 2018г., КИМ[7])
- $\triangle AQO$ – прямоугольный треугольник, так как биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.
- AM – высота, проведенная к гипотенузе, $AM = \frac{1}{2} AC = 6$.
- $AM^2 = QM \cdot MO$. Следовательно, $QM = \frac{AM^2}{MO} = \frac{6^2}{8} = 4,5$
- QM – радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности, следовательно $r = 4,5$.
- Ответ: 4,5.



ЗАДАЧА 2. Нахождение радиуса окружности описанной около треугольника.

- (Решу ОГЭ[9])
- «Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 36 и 45, вписаны в угол с вершиной A . Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .»



ЗАДАЧА 2. Нахождение радиуса окружности описанной около треугольника.

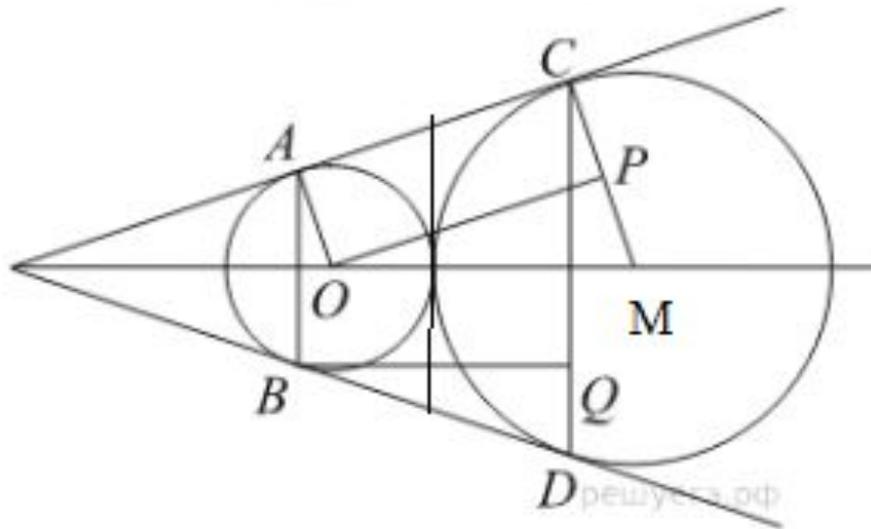
- (Решу ОГЭ[9])
- Решение:
- Пусть Q – центр вневписанной окружности, O – центр вписанной окружности в треугольник ABC , QM и ON – радиусы, проведенные в точки касания окружностей с прямой AC , S – центр окружности описанной около треугольника ABC , r – радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- BO – биссектриса угла ABC , а BQ – биссектриса смежного с ним угла. Значит $\triangle OBQ$ – прямоугольный. Следовательно, находим $BQ = \sqrt{OQ \cdot QK} = \sqrt{36 \cdot 45} = 18\sqrt{5}$.
- Пусть $AN = x$. Прямоугольные треугольники ANO и AMQ подобны с коэффициентом $45/36 = 1,25$, значит, $AM = 1,25x$, $MN = 0,25x$.

ЗАДАЧА 2. Нахождение радиуса окружности описанной около треугольника.

- (Решу ОГЭ[9])
- Отрезки MC , CK и CN равны как отрезки касательных, проведенных из одной точки, значит, $BK = CK = 18\sqrt{5}$, $0,25x = MN = 2CK = 36\sqrt{5}$, откуда $AN = x = 144\sqrt{5}$, $AC = AB = 1,125x = 162\sqrt{5}$.
- В прямоугольном треугольнике ABK находим катет AK :
- $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 360$.
- В прямоугольном треугольнике SBK по теореме Пифагора имеем $r^2 = (AK - r)^2 + BK^2$,
- $r = \frac{AB^2 - 2AK^2}{2 \cdot BK} = \frac{162^2 \cdot 5 - 2 \cdot 360^2}{2 \cdot 360} = 182,25$
- Ответ: 182,25.

ЗАДАЧА 3. Нахождение расстояния между прямыми.

- (Яценко И.В., Шестаков С.А. «ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс» [12])
- **«Окружности радиусов 60 и 90 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .»**



ЗАДАЧА 3. Нахождение расстояния между прямыми.

- (Ященко И.В., Шестаков С.А. «ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс» [12])
- Решение:
- Линия центров вписанной и невписанной окружностей проходит через точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т.е. $OM=150$. Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус MC второй окружности. Тогда $MP = MC-PC = MC - OA=90-60=30$
- Из прямоугольного треугольника OPM находим, что $OP = \sqrt{OM^2 - PM^2} = 60\sqrt{6}$
- Опустим перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD . Прямоугольный треугольник BQD подобен прямоугольному треугольнику OPM по двум углам, поэтому $BQBD=OPOM$. Следовательно, $BQ = OP \cdot BD/OM = 60\sqrt{6} \cdot 60\sqrt{6}/150 = 144$.
- Ответ: 144.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В результате проделанной работы я выяснила, что собой представляют вневписанные окружности треугольника, каким свойством они обладают[2-4]. Оказалось, что вневписанные окружности треугольника используются в школьной программе мало, но зато их можно встретить на олимпиадах, ОГЭ[2-12].
- Проанализировав задания[4,6-10,12], которые приводят к появлению вневписанной окружности, я заметила, что встречаются три вида задач про вневписанную окружность и что условия следующих задач не содержат термина «вневписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура. Также во всех задачах совпадают обозначения, отличаются только числовые значения. Используем эти обозначения при составлении алгоритма решения задач, которые приводят к появлению вневписанной окружности. Данные алгоритмы помогут другим учащимся полноценно подготовиться к ОГЭ по данной теме. Используя которые учащимся будет очень легко решить задачи, подставив свои значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Я не жалею, что потратила время на изучение этой темы, т.к. узнала новое понятие невписанной окружности треугольника. Также, я научилась лучше рассуждать, анализировать и систематизировать, и я уверена, что опыт выполнения этой работы пригодится мне в будущем. Данный материал выходит за рамки школьной программы и будет полезен учащимся при подготовке к итоговой аттестации.
- Исследование можно продолжить, изучив другие свойства окружности, также свойства невписанной окружности прямоугольного треугольника и их применение в ЕГЭ. Работа может быть использована на уроках геометрии в 8-9 классах.