

# **ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**

# Определение случайной величины

- *Случайной* называется величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.
- Случайные величины принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита , а их значения – строчными буквами с индексами.

# Виды случайных величин

- *Дискретной* называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения (то есть между двумя соседними возможными значениями нет других возможных значений) с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).
- *Непрерывной* называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число ее возможных значений бесконечно.

# Примеры

- **Пример 1.** Число мальчиков среди 10 новорожденных есть дискретная случайная величина, поскольку она может принимать только значения 0,1,2, ....., 9, 10.
- **Пример 2.** Время ожидания автобуса на остановке есть непрерывная случайная величина, так как она может принимать любые значения из промежутка - интервала движения автобусов.

# Закон распределения

- *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями.
- Закон распределения может быть задан таблично, аналитически (то есть с помощью формулы) и графически.

# Закон распределения

В частности, если множество возможных значений дискретной случайной величины  $X$  конечно, то ее закон распределения можно задать таблицей вида:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – все возможные значения случайной величины  $X$ , а  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – соответствующие им вероятности.

При этом  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

# Пример

**Пример** . Монета брошена два раза. Случайная величина  $X$  – число выпадений герба. Составить закон распределения  $X$ .

Дискретная случайная величина  $X$  имеет следующие возможные значения:  $x_1 = 0$  (герб не выпал ни разу),  $x_2 = 1$  (герб выпал один раз),  $x_3 = 2$  (герб выпал два раза).

# Продолжение примера

$$p(X=0) = p_2(0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25.$$

$$p(X=1) = p_2(1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,5;$$

$$p(X=2) = p_2(2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0,25.$$

**Закон распределения случайной величины  $X$  имеет вид:**

$X$	0	1	2
$p$	0,25	0,5	0,25

**Заметим, что  $0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$ .**



# Биномиальное распределение

*Биномиальным* называется закон распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа появлений события в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления этого события равна  $p$ . Случайная величина  $X$ , распределенная по биномиальному закону, имеет  $n + 1$  возможных значений:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ , ...,  $x_{n+1} = n$ . Вероятности, с которыми  $X$  принимает эти значения, вычисляются по формуле Бернулли. В частности, биномиальный закон распределения имеет случайная величина  $X$  – число выпадений герба при двух бросаниях монеты, рассмотренная в примере .

# Математическое ожидание

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины  $X$  называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Если множество возможных значений дискретной случайной величины  $X$  конечно, то

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n .$$

# Пример

*Пример* . Найти математическое ожидание дискретной случайной величины  $X$ , которая имеет закон распределения:

$X$	2	4	6	8
$p$	0,1	0,2	0,4	0,3

По определению математического ожидания

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 = 5,8.$$

Слайд 11

# Дисперсия

Дисперсией случайной величины  $X$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, то есть

$$D(X) = M([X - M(X)]^2).$$

Для вычисления дисперсии удобно использовать следующую формулу:  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ .

Дисперсия характеризует степень рассеивания возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания (среднего значения).

Средним квадратическим отклонением случайной величины  $X$  называется квадратный корень из дисперсии, то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Величина  $\sigma(X)$ , как и дисперсия, является оценкой степени рассеивания случайной величины  $X$ .

# Пример

**Пример** . Найти дисперсию дискретной случайной величины  $X$ , которая имеет закон распределения:

$X$	2	3	5
$p$	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание случайной величины  $X$ :

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5.$$

Напишем закон распределения случайной величины  $X^2$ :

$X^2$	4	9	25
$p$	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание  $X^2$ :

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3.$$

$$\text{Тогда } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05.$$

# Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону

*Если дискретная случайная величина  $X$  распределена по биномиальному закону с параметрами  $n$  и  $p$ , то*

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

**Пример** . Вероятность правильного заполнения налоговой декларации налогоплательщиком равна 0,7. Пятнадцать человек независимо друг от друга заполнили налоговые декларации. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$  – числа правильно заполненных деклараций.

Нетрудно заметить, что случайная величина  $X$  имеет биномиальный закон распределения с параметрами  $n=15$  и  $p=0,7$ .

Следовательно,

$$M(X) = np = 15 \cdot 0,7 = 10,5; \quad D(X) = npq = 15 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 3,15.$$