

# Построение сечений многогранников



«Скажи мне – и я забуду.  
Покажи мне – и я запомню.  
Вовлеки меня – и я научусь.»

Древняя китайская  
поговорка



## **Это интересно!**

Многие художники, искажая законы перспективы, рисуют необычные картины. Кстати, эти рисунки очень популярны среди математиков. В сети Internet можно найти множество сайтов, где публикуются эти невозможные объекты.

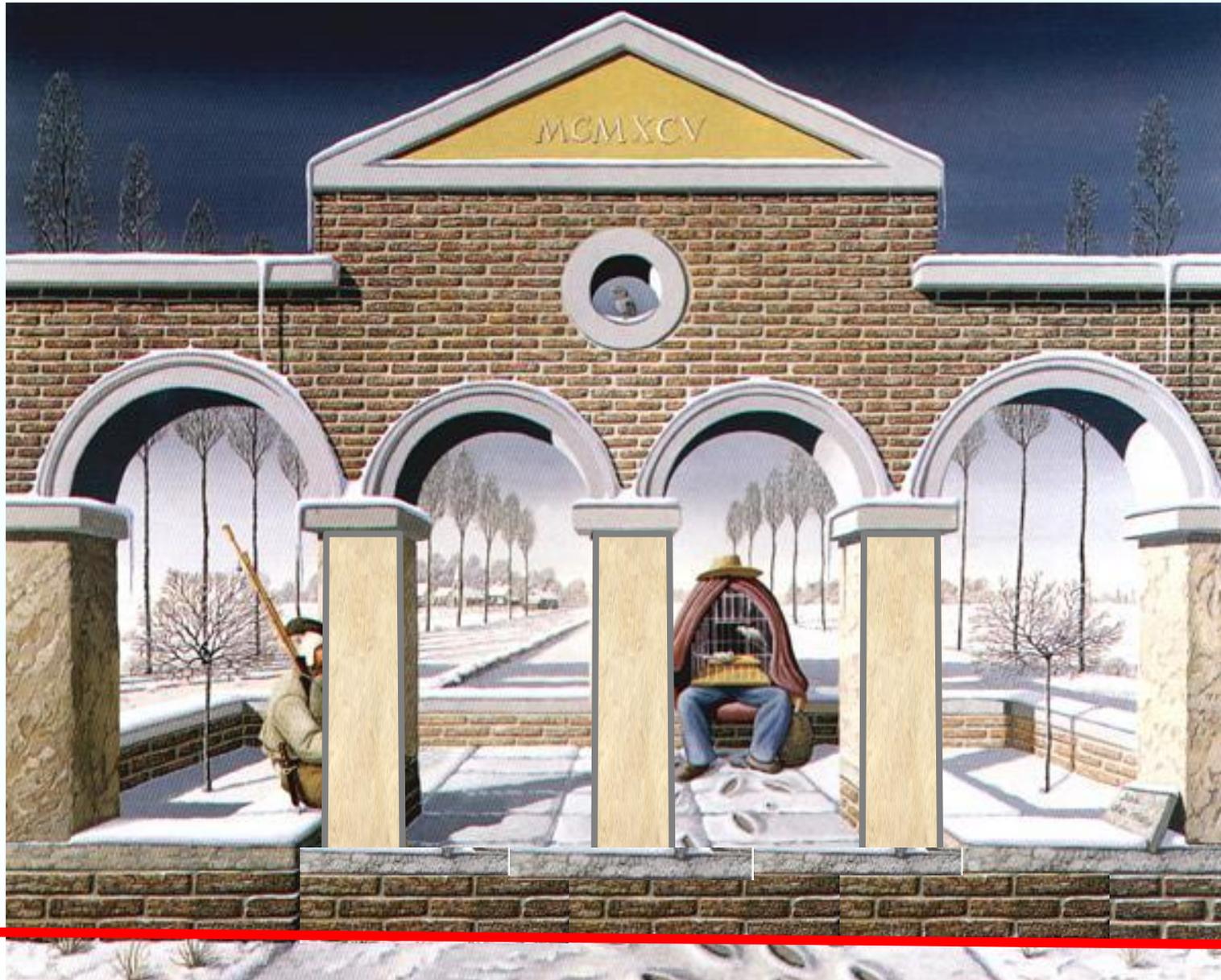
Популярные художники Морис Эшер, Оскар Реутерсвард, Жос де Мей и другие, удивляли своими картинами математиков.

<http://www.im-possible.info/english/art/mey/mey2.html>

<http://alone.sammit.kiev.ua/moremind/illusion/index.html>

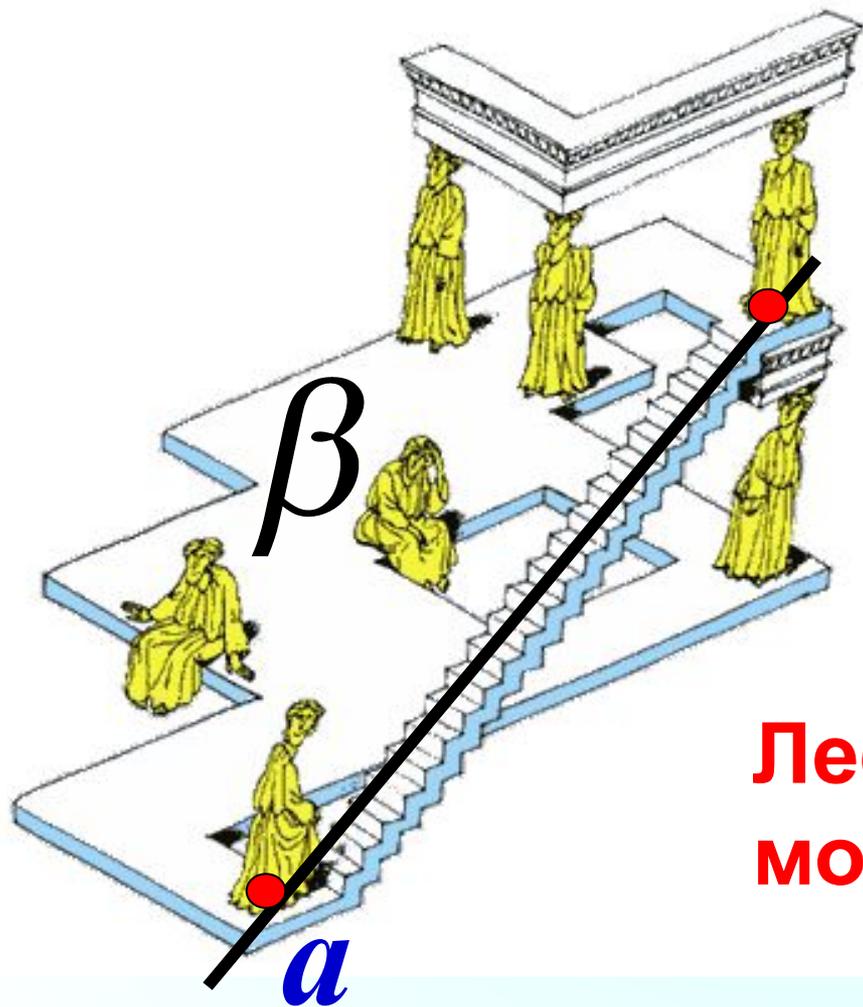
<http://lib.world-mobile.net/culture/special/imp/imp-world-r.narod.ru/art/index.html>

"Такое может нарисовать только тот, кто делает дизайн, не зная перспективы..."



Жос де Мей

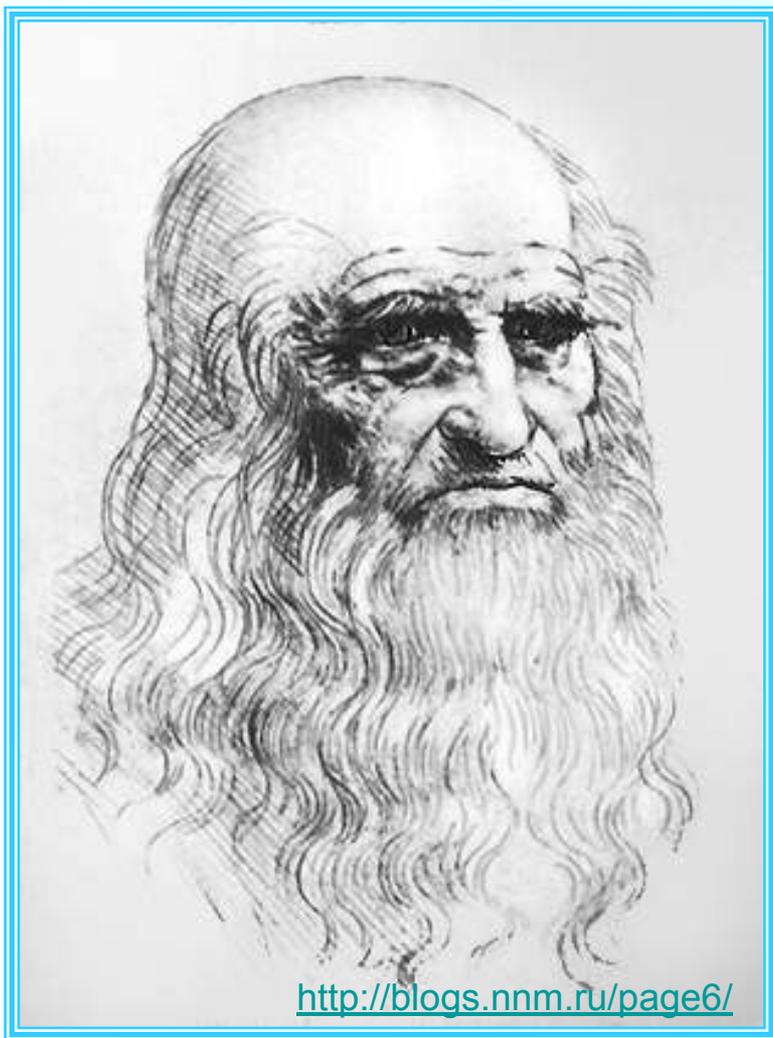
Законы геометрии часто нарушаются в компьютерных играх. Поднимаясь по этой лесенке, мы остаёмся на том же этаже.



$A_2$ . Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

$$a \subset \beta$$

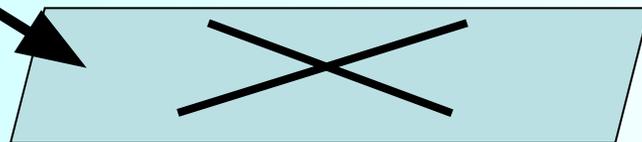
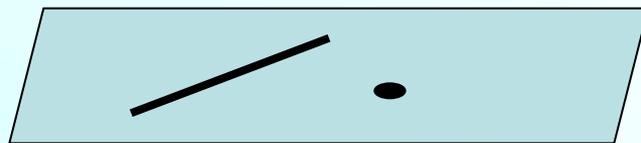
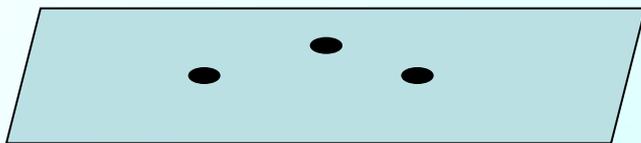
**Лесенки здесь быть не может!**



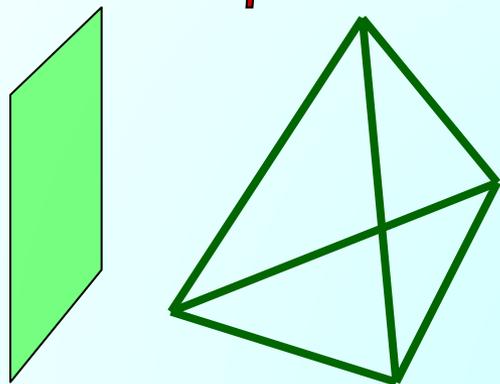
***"Те, кто влюбляются в практику без теории, уподобляются мореплавателю, сажающемуся на корабль без руля и компаса и потому никогда не знающему, куда он плывет".***

***Леонардо да Винчи***

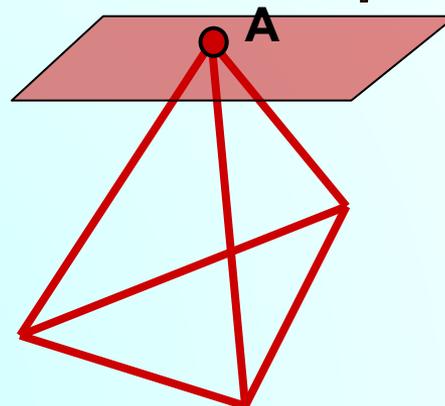
**Плоскость  
(в том числе и  
секущую)  
можно задать  
следующим  
образом**



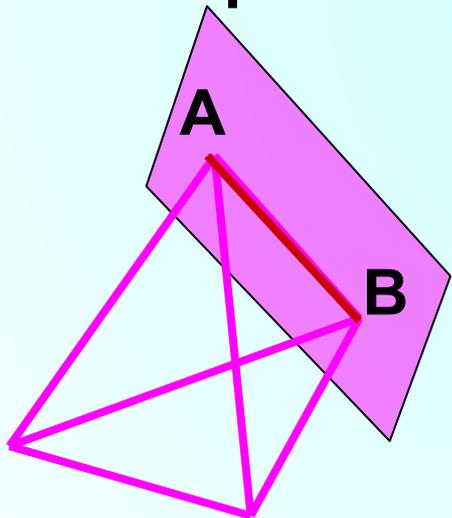
# Взаимное расположение плоскости и многогранника



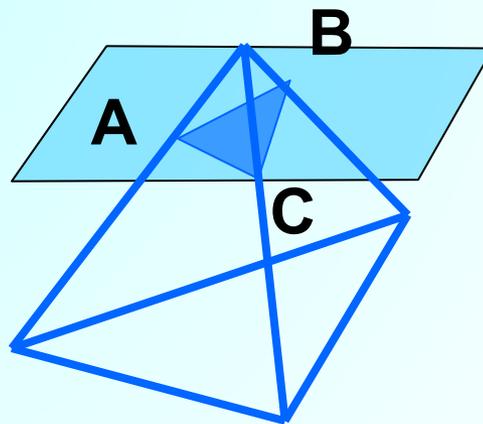
Нет точек пересечения



Одна точка пересечения



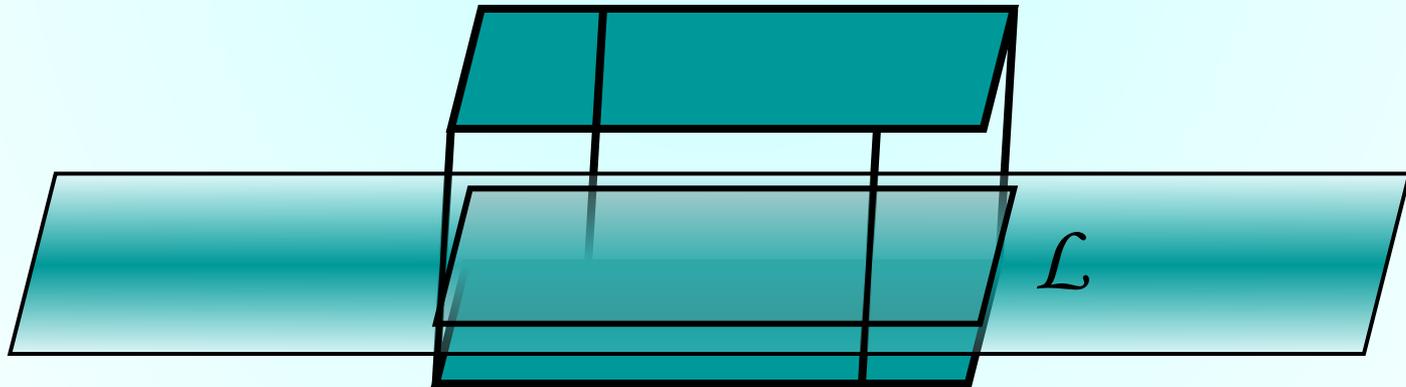
Пересечением  
является отрезок



Пересечением  
является плоскость

## Секущей плоскостью

параллелепипеда (тетраэдра)  
называется любая плоскость, по обе  
стороны от которой имеются точки  
данного параллелепипеда  
(тетраэдра).

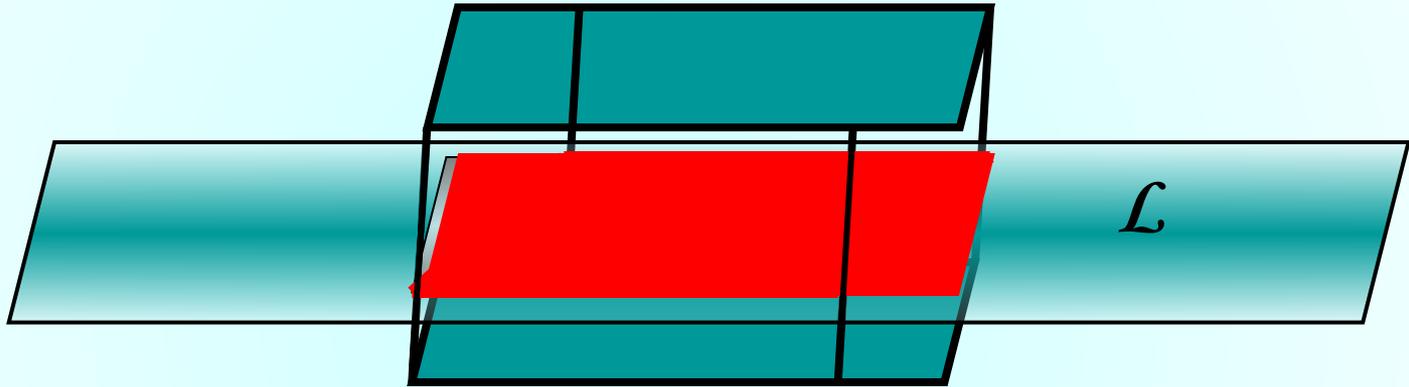


## Построить сечение многогранника плоскостью –

это значит указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника.

Для построения сечения многогранника плоскостью нужно в плоскости каждой грани указать **2** точки, принадлежащие сечению, соединить их прямой и найти точки пересечения этой прямой с ребрами

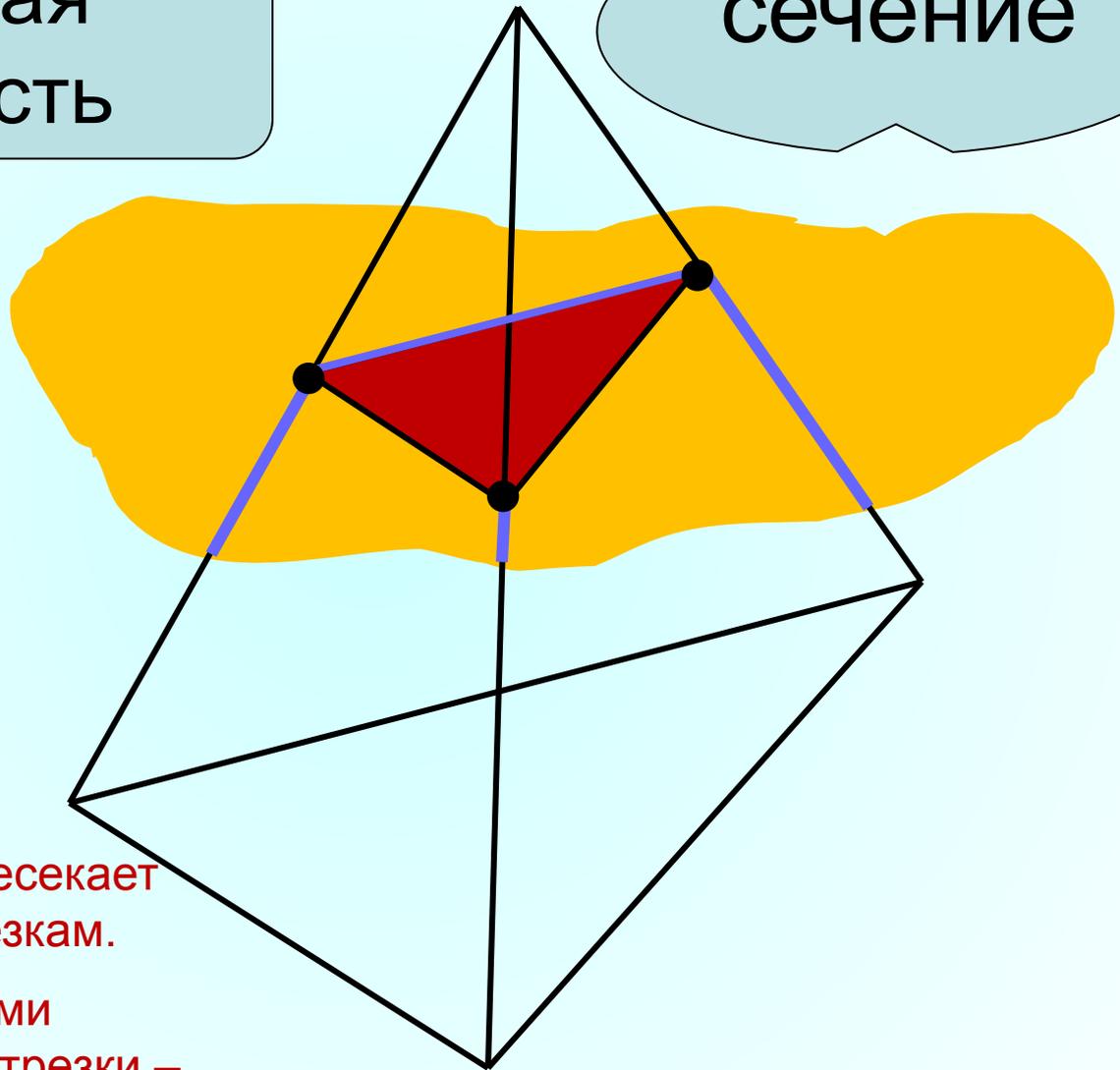
**Секущая плоскость** пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по **отрезкам**.



**Многоугольник**, сторонами которого являются данные отрезки, называется **сечением** тетраэдра ((параллелепипеда).

Секущая  
плоскость

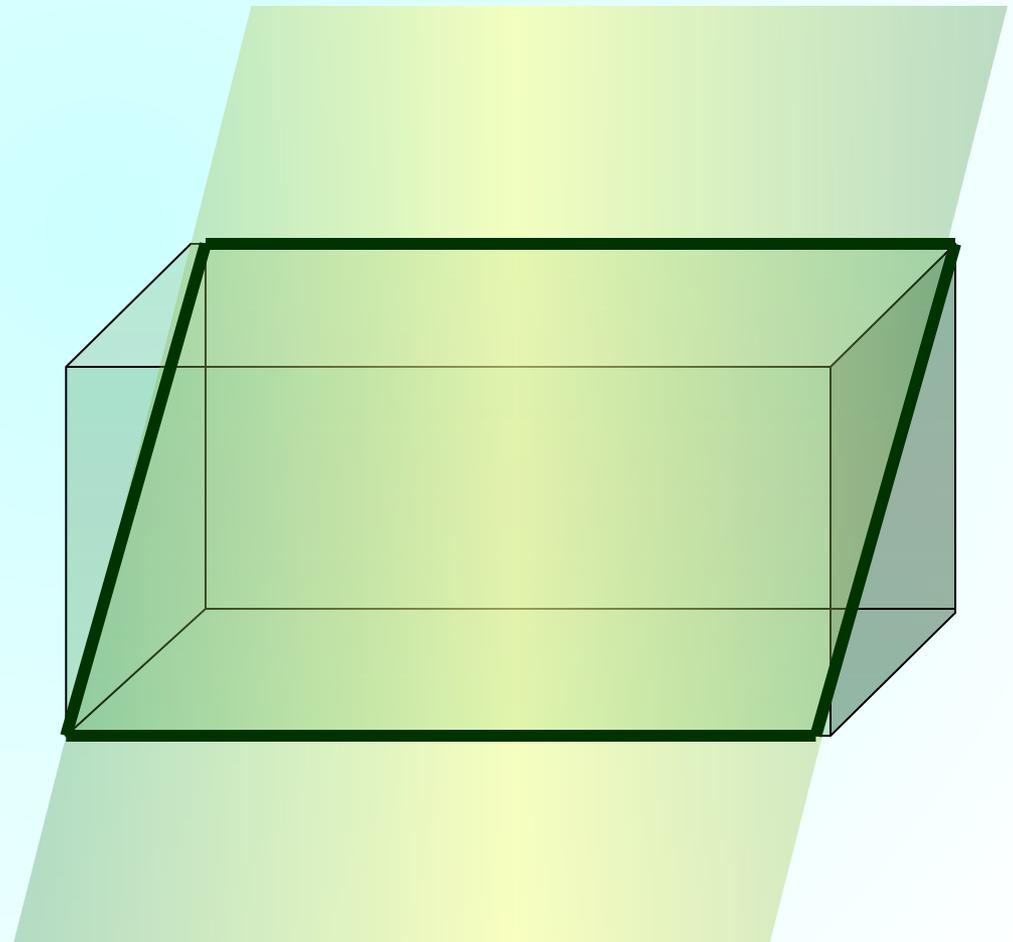
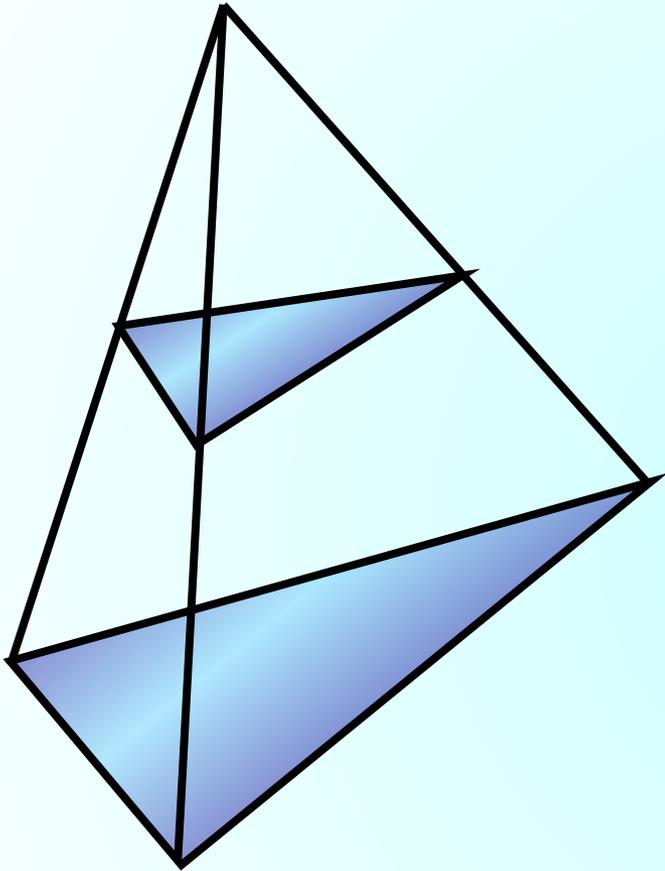
сечение



Секущая плоскость пересекает  
грани тетраэдра по отрезкам.

Многоугольник, сторонами  
которого являются эти отрезки –  
сечение тетраэдра.

Для решения многих  
геометрических задач  
необходимо строить их  
**сечения** различными  
плоскостями.



# АКСИОМЫ

## планиметрия

*Характеризуют взаимное расположение точек и прямых*

1. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки
  2. Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой
  3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.
- Основное понятие геометрии «лежать между»*
4. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

## стереометрия

**A1.** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна

**A2.** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости

**A3.** Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Для построения сечения нужно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами и соединить их отрезками.

При этом необходимо учитывать следующее:

1. Соединять можно только две точки, лежащие в плоскости одной грани.
2. Секущая плоскость пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам
3. Если в плоскости грани отмечена только одна точка, принадлежащая плоскости сечения, то надо построить дополнительную точку. Для этого необходимо найти точки пересечения уже построенных прямых с другими прямыми, лежащими в тех же гранях.

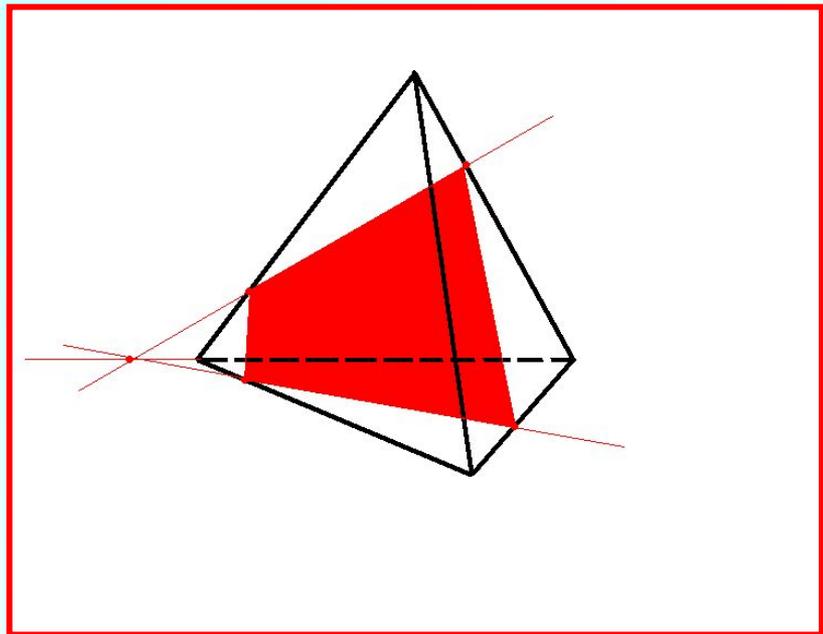
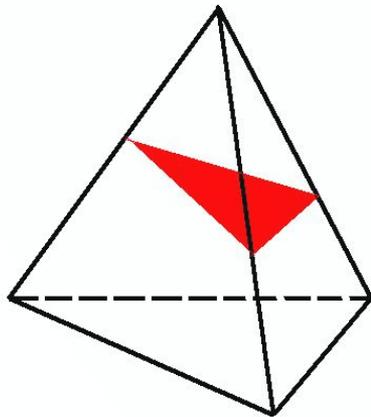
# Какие многоугольники могут получиться в сечении ?

## Тетраэдр имеет 4 грани

В сечениях могут  
получиться:

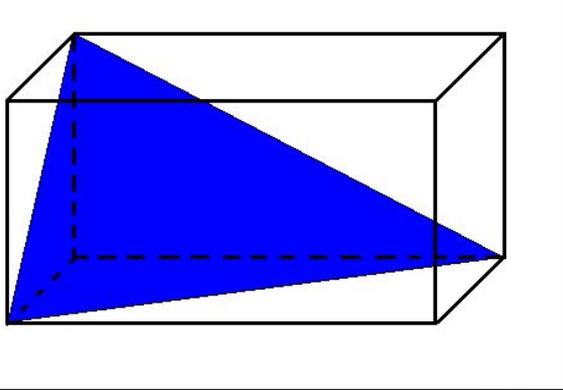
❖ Треугольники

❖ Четырехугольники

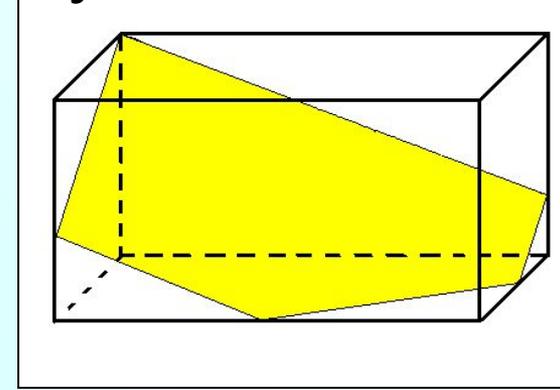


# Параллелепипед имеет 6 граней

▶ Треугольники

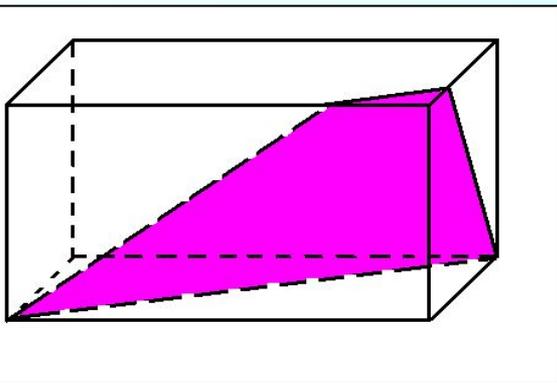


❖ Пятиугольники

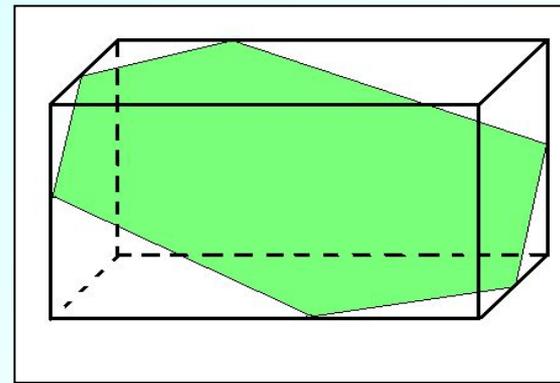


В его сечениях  
могут получиться:

▶ Четырехугольники



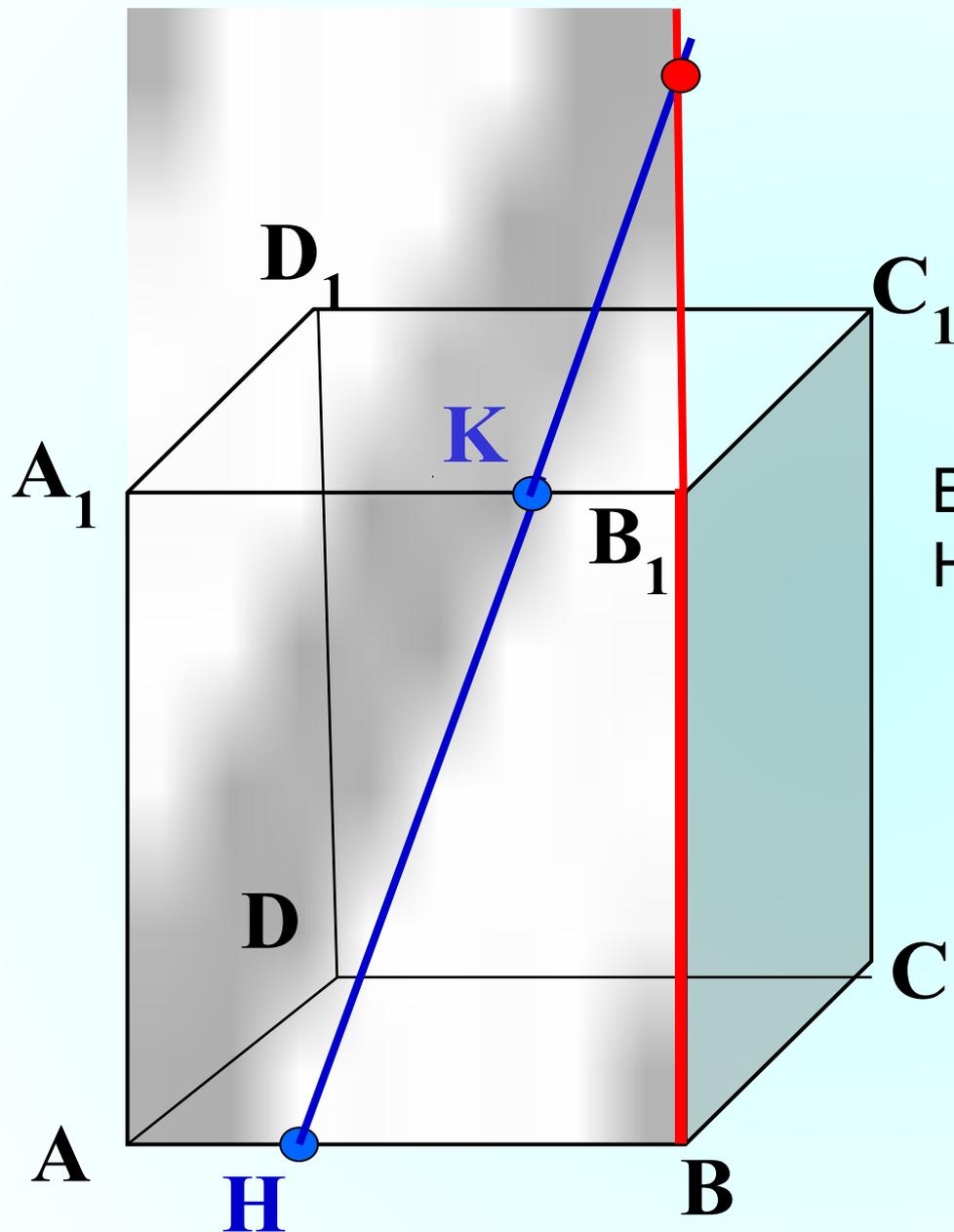
❖ Шестиугольники



## *Блиц - опрос*

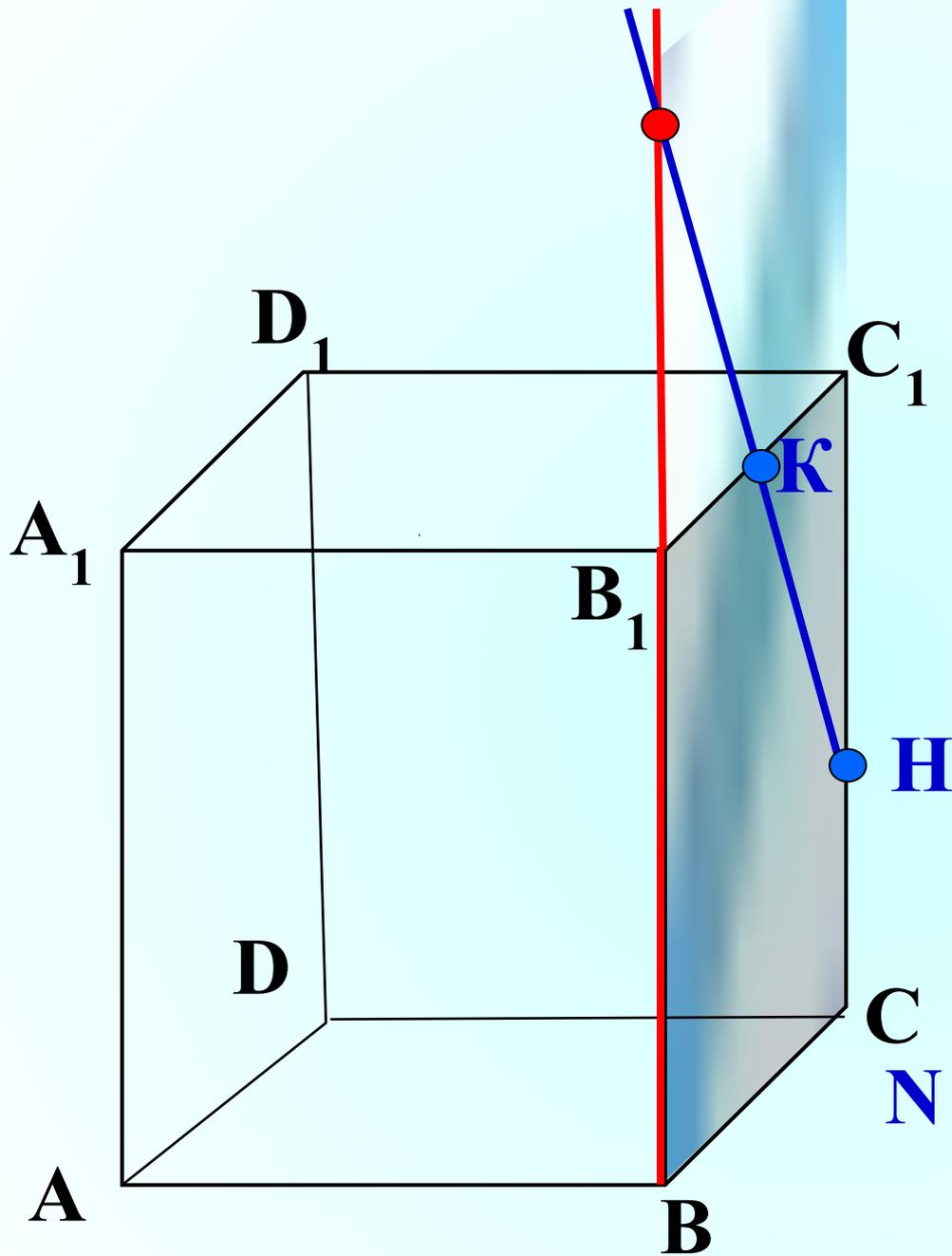
- **Задача блиц – опроса:  
ответить на вопросы и  
обосновать ответ с помощью  
аксиом, теорем и свойств  
параллельных плоскостей.**

# Блиц-опрос.



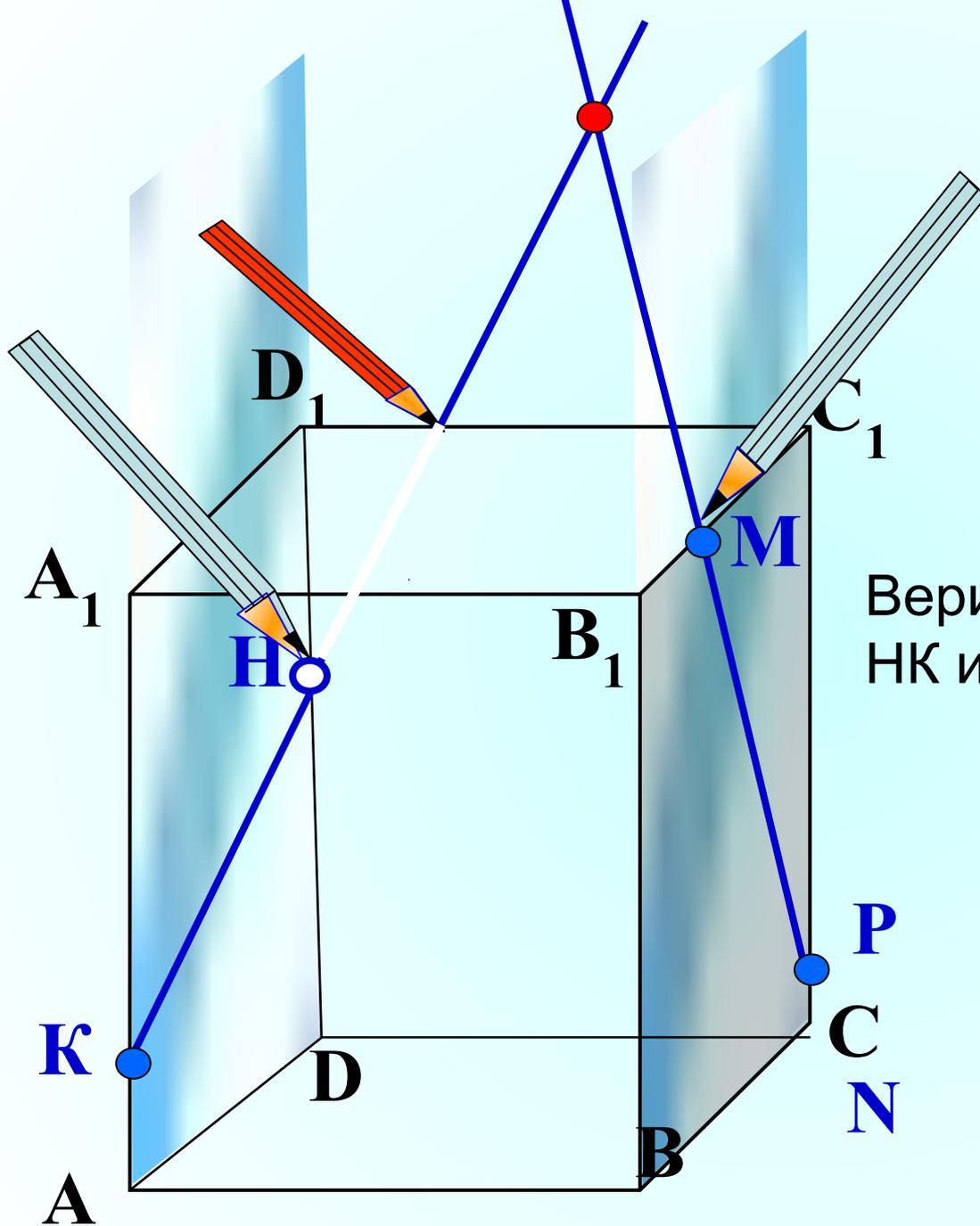
Верите ли вы, что прямые  $NK$  и  $BB_1$  пересекаются?

# Блиц-опрос.



Верите ли вы, что  
прямые  $HK$  и  $BB_1$   
пересекаются?

# Блиц-опрос.

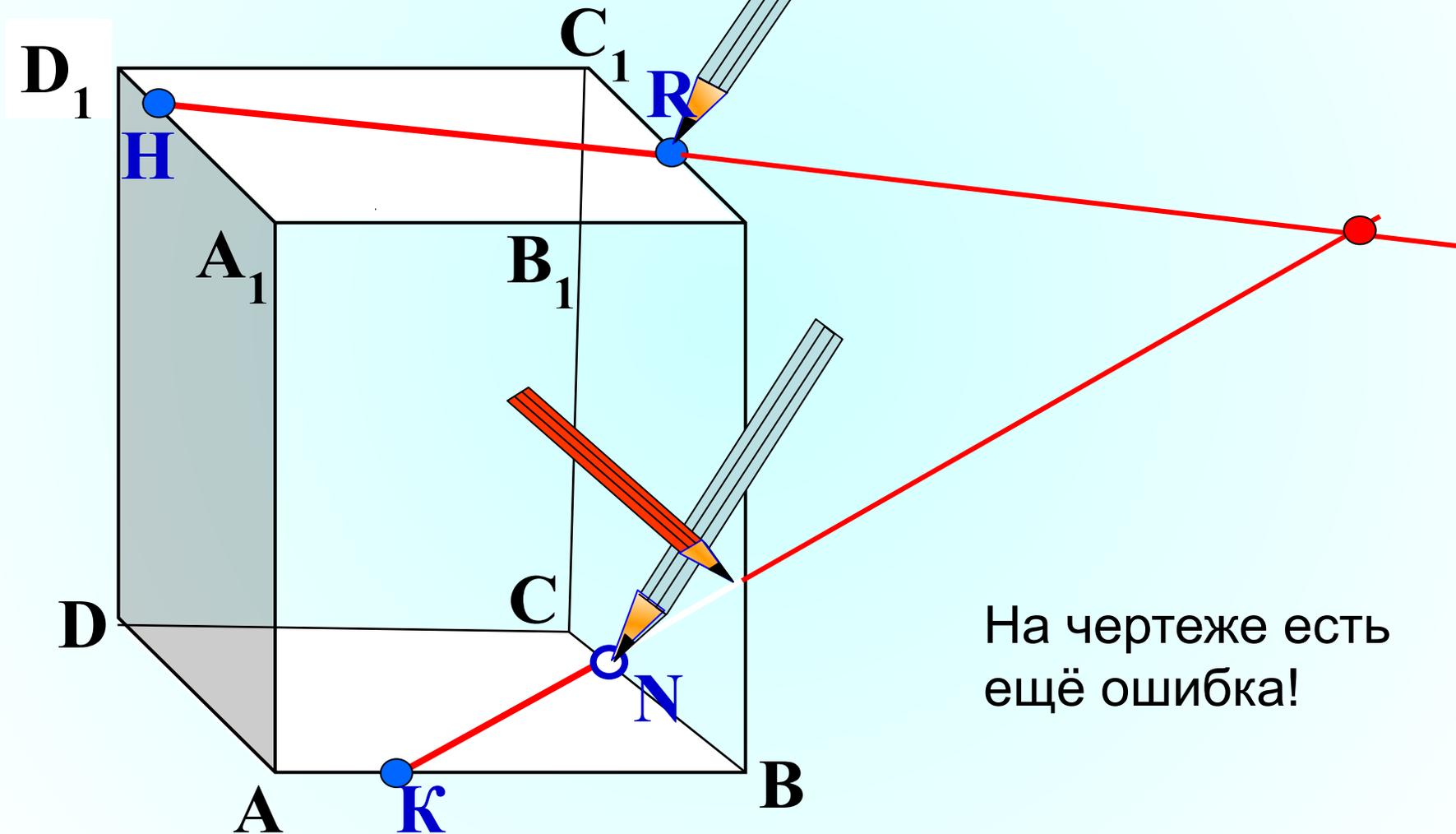


Верите ли вы, что прямые  $NK$  и  $MP$  пересекаются?

На чертеже есть ещё ошибка!

Верите ли вы, что прямые  $HR$  и  $NK$  пересекаются?

**Блиц-опрос.**

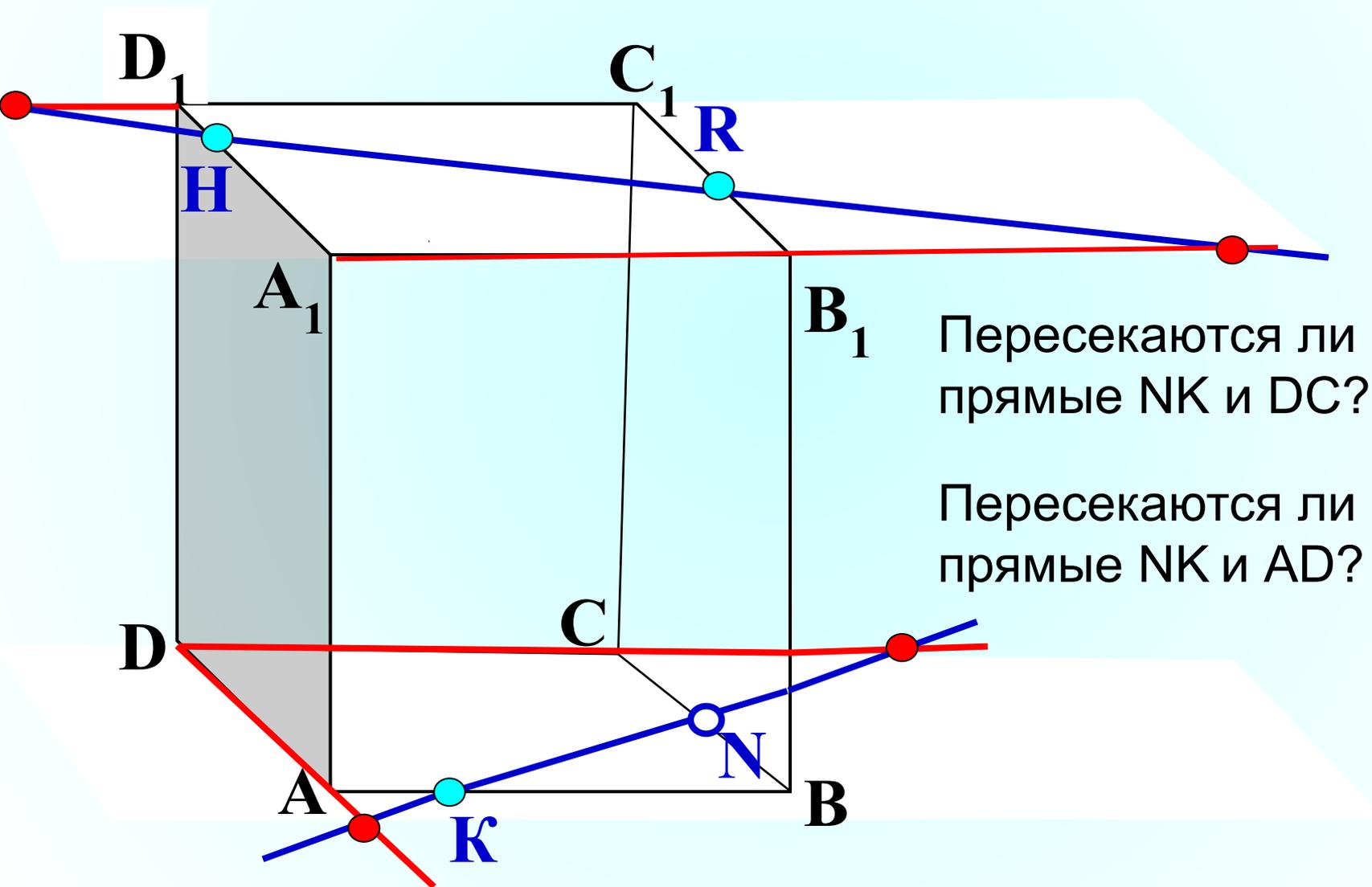


На чертеже есть ещё ошибка!

Пересекаются ли прямые  $HR$  и  $A_1B_1$ ?

Пересекаются ли прямые  $HR$  и  $C_1D_1$ ?

**Блиц-  
опрос.**

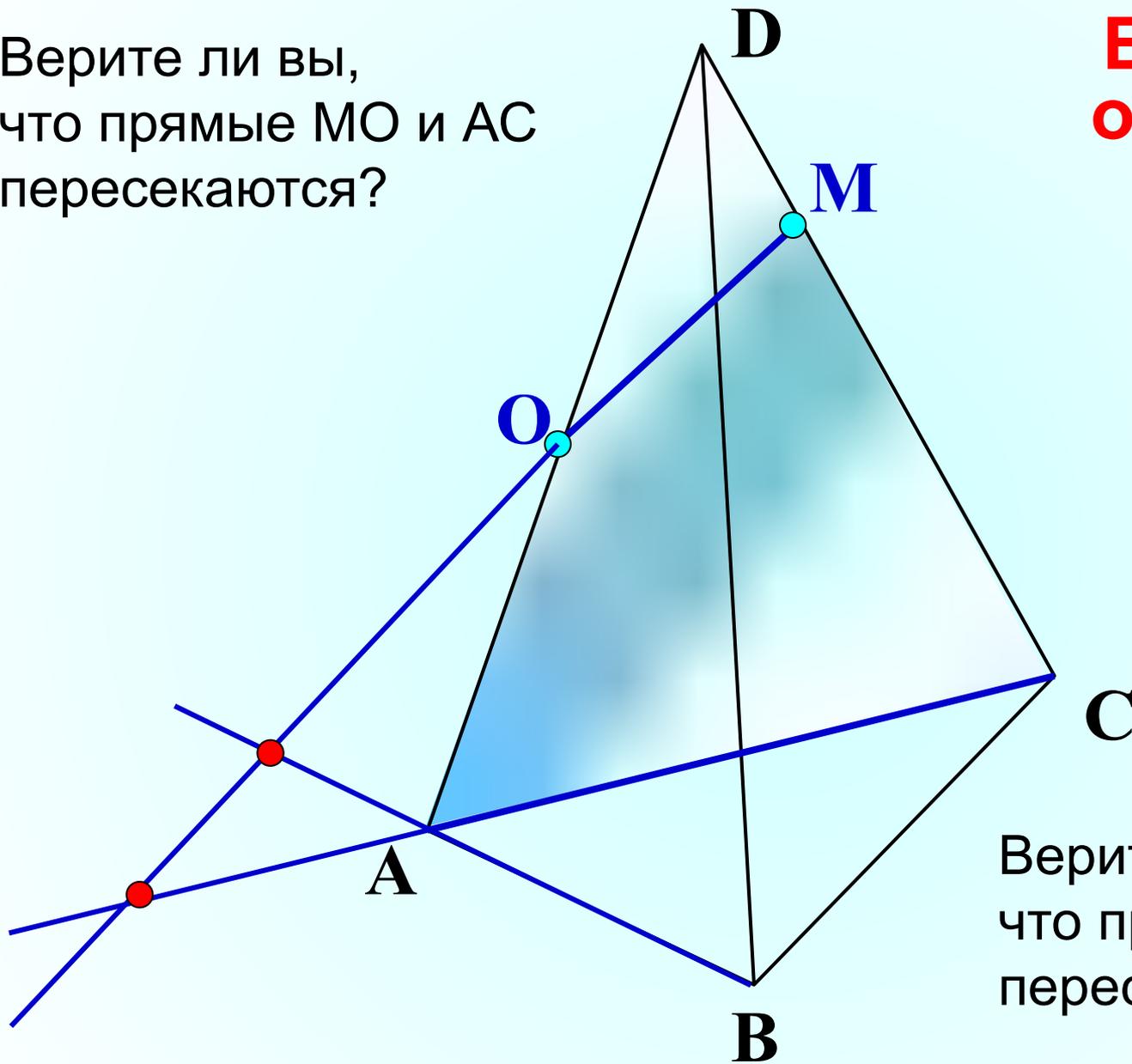


Пересекаются ли  
прямые  $NK$  и  $DC$ ?

Пересекаются ли  
прямые  $NK$  и  $AD$ ?

Верите ли вы,  
что прямые  $MO$  и  $AC$   
пересекаются?

**Блиц-  
опрос.**



Верите ли вы,  
что прямые  $MO$  и  $AB$   
пересекаются?

# *Как научиться решать задачи?*

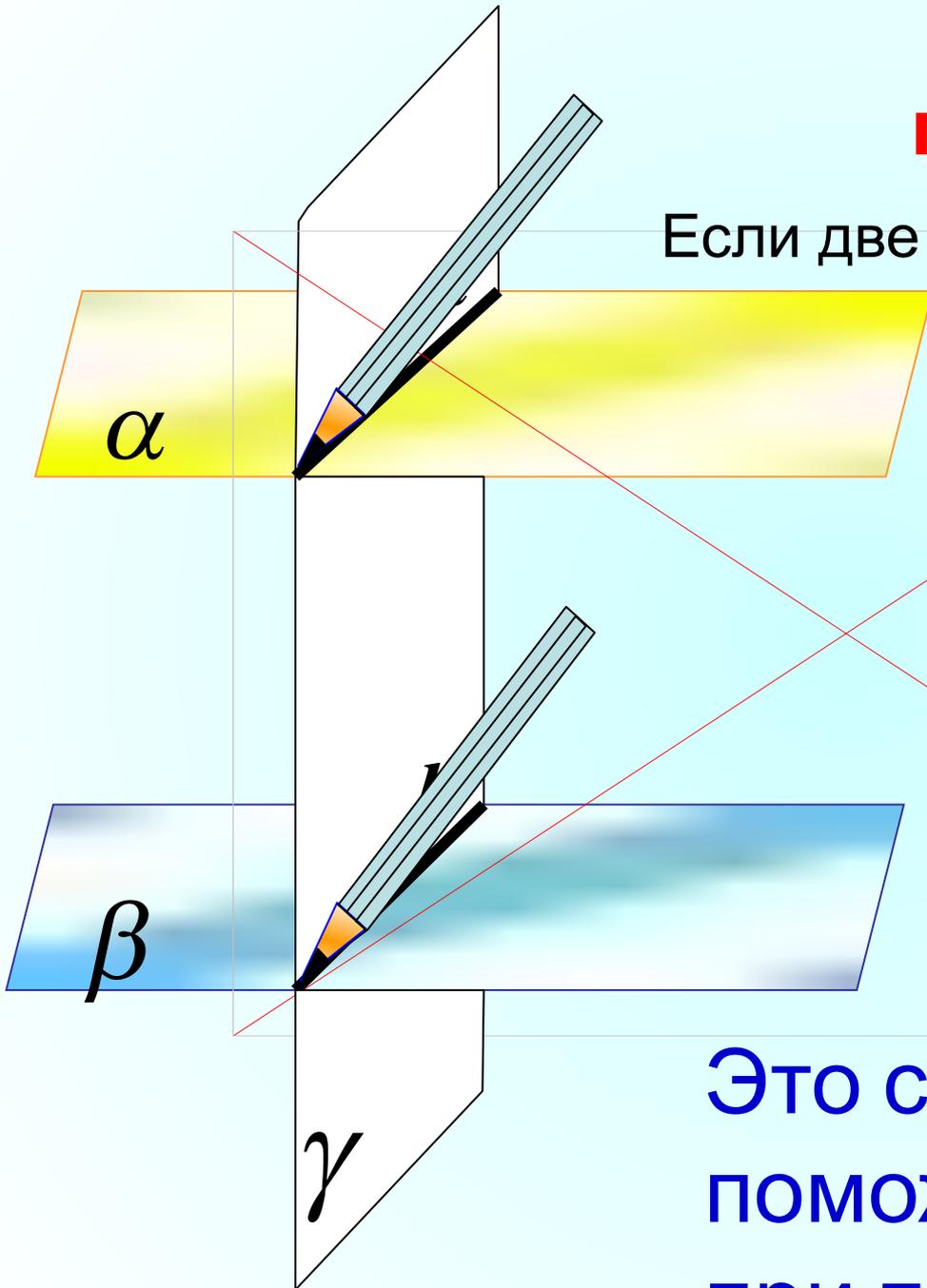
**Умение решать задачи – практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах ... : научиться этому можно лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь..**

**Д. Пойа**



# Свойство параллельных плоскостей.

Если две параллельные плоскости  
пересечены третьей,  
то линии их пересечения  
параллельны.

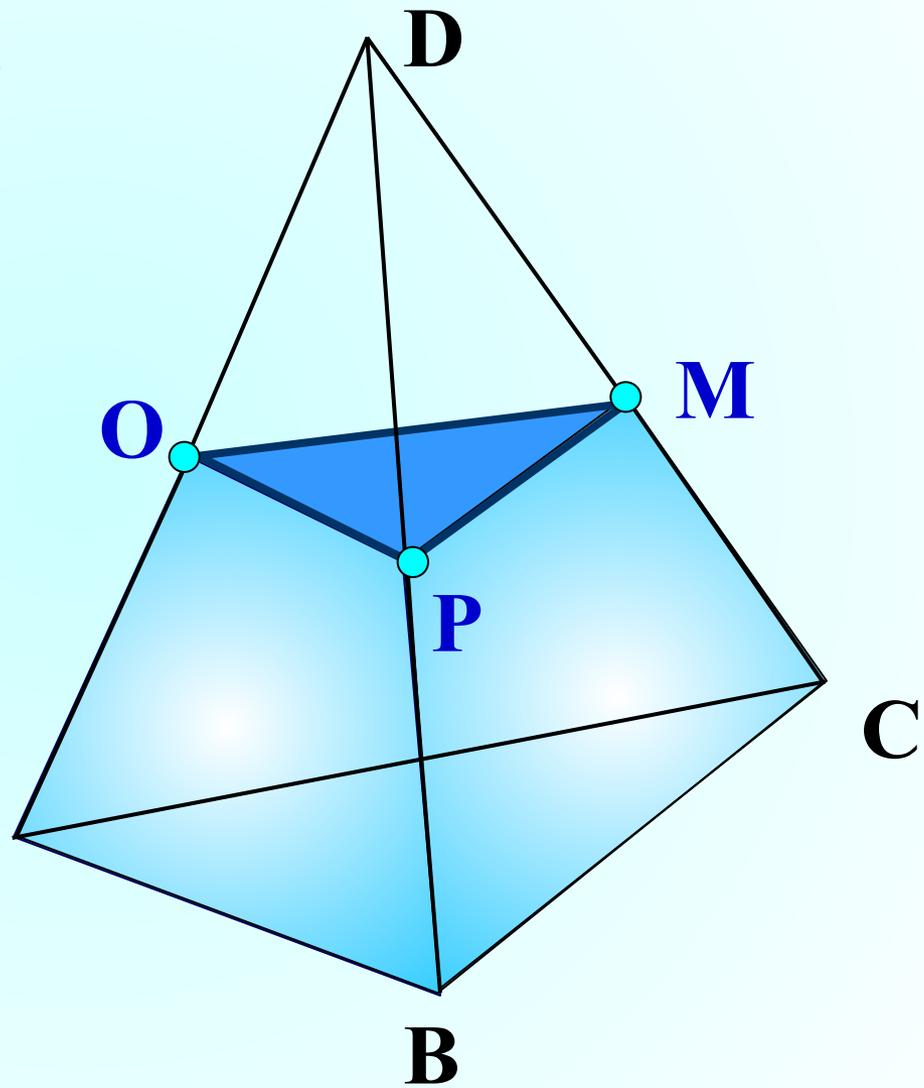
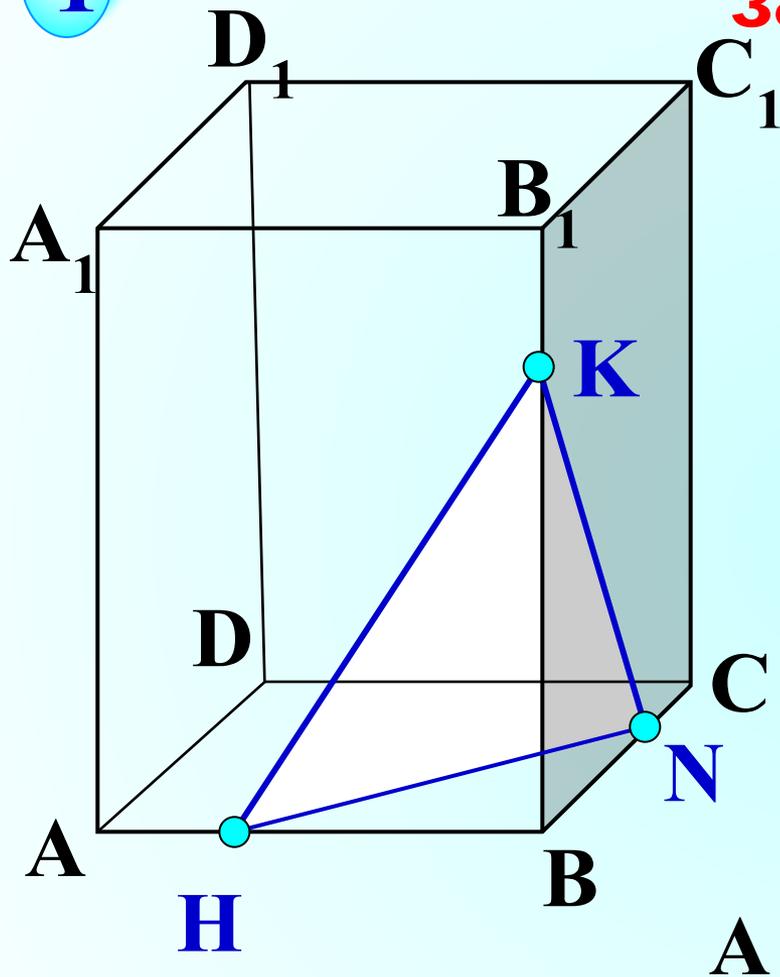


Это свойство нам  
поможет  
при построении

1

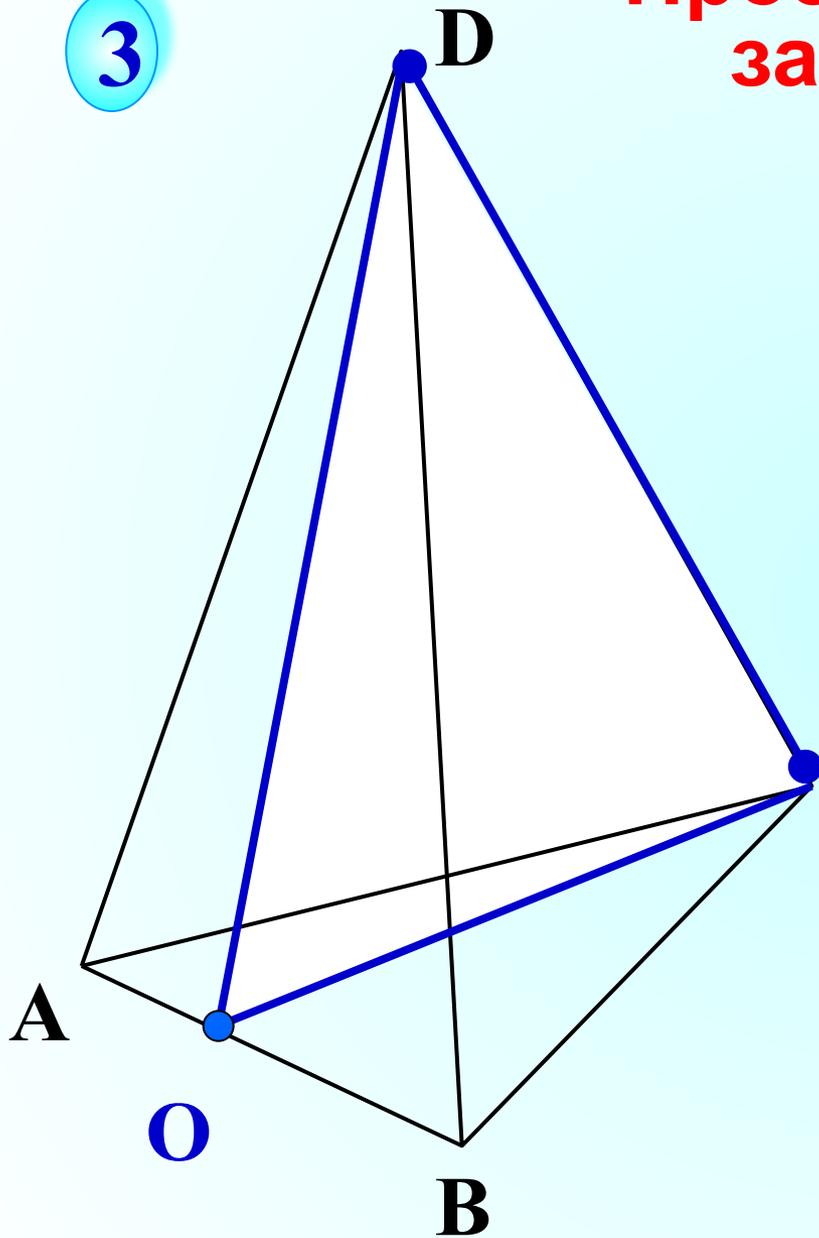
# Простейшие задачи.

2

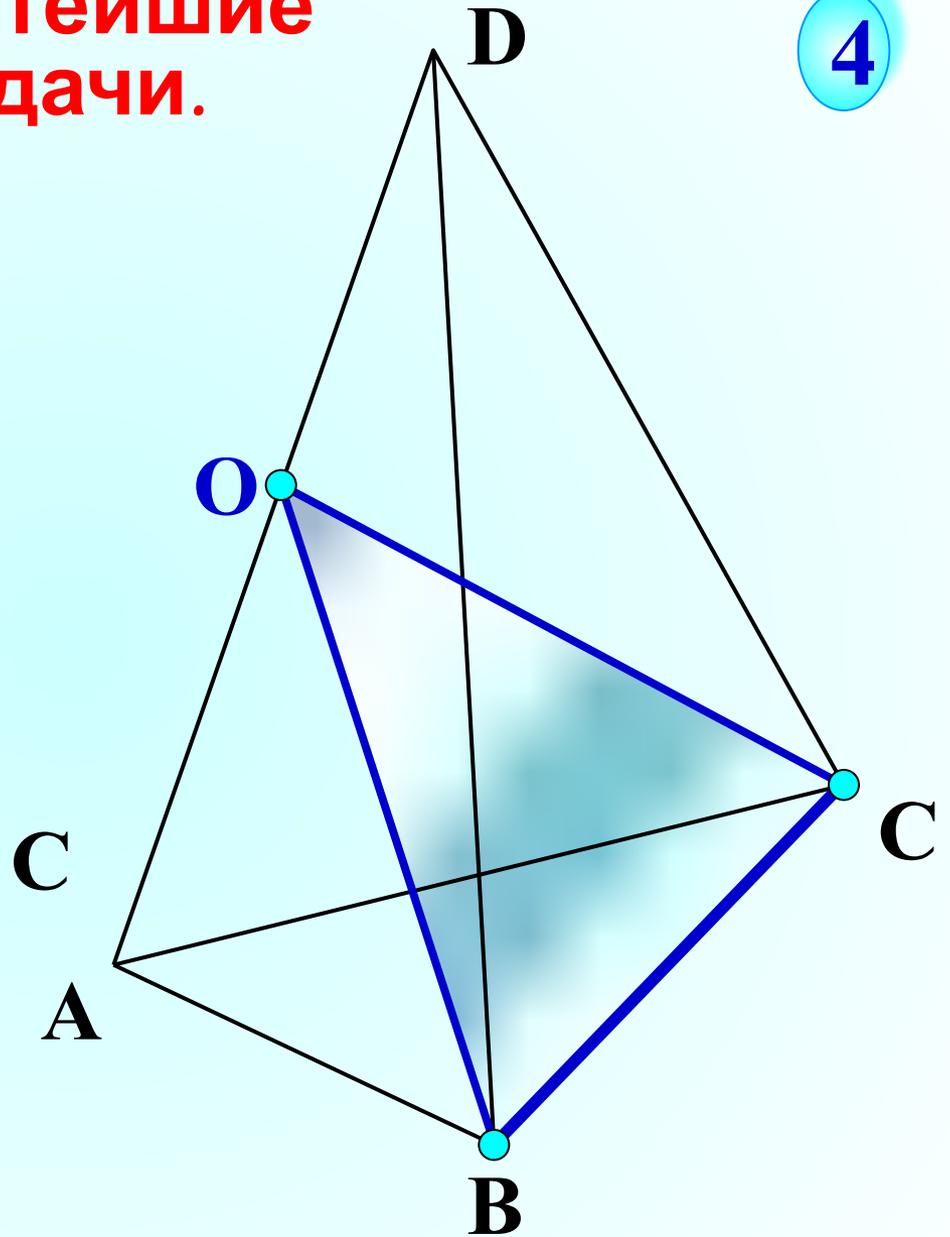


# Простейшие задачи.

3



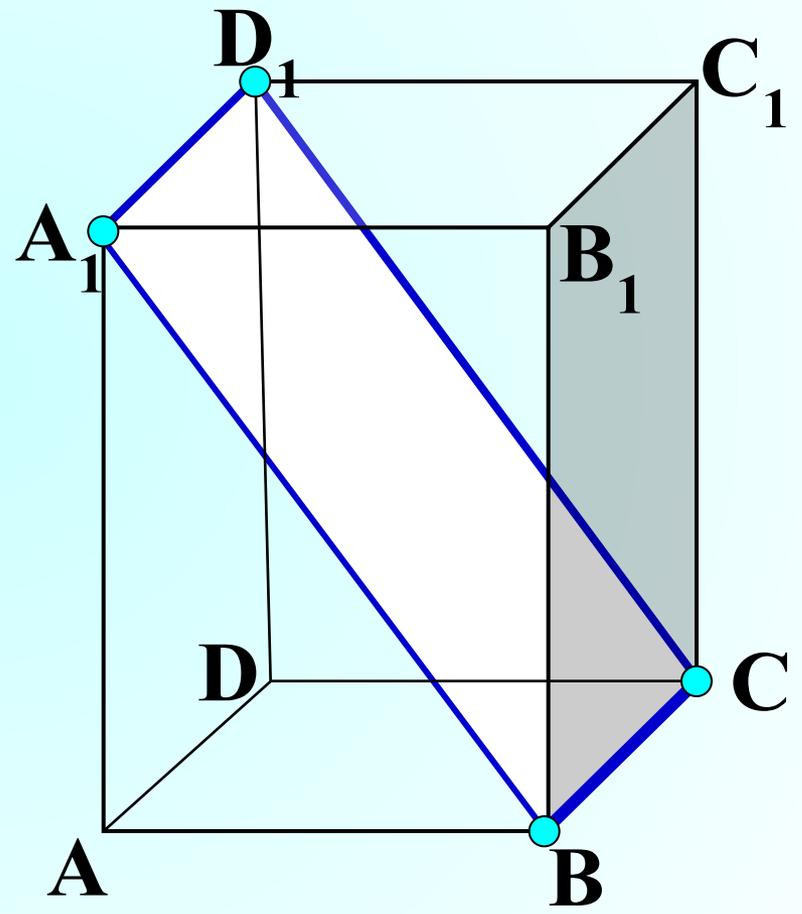
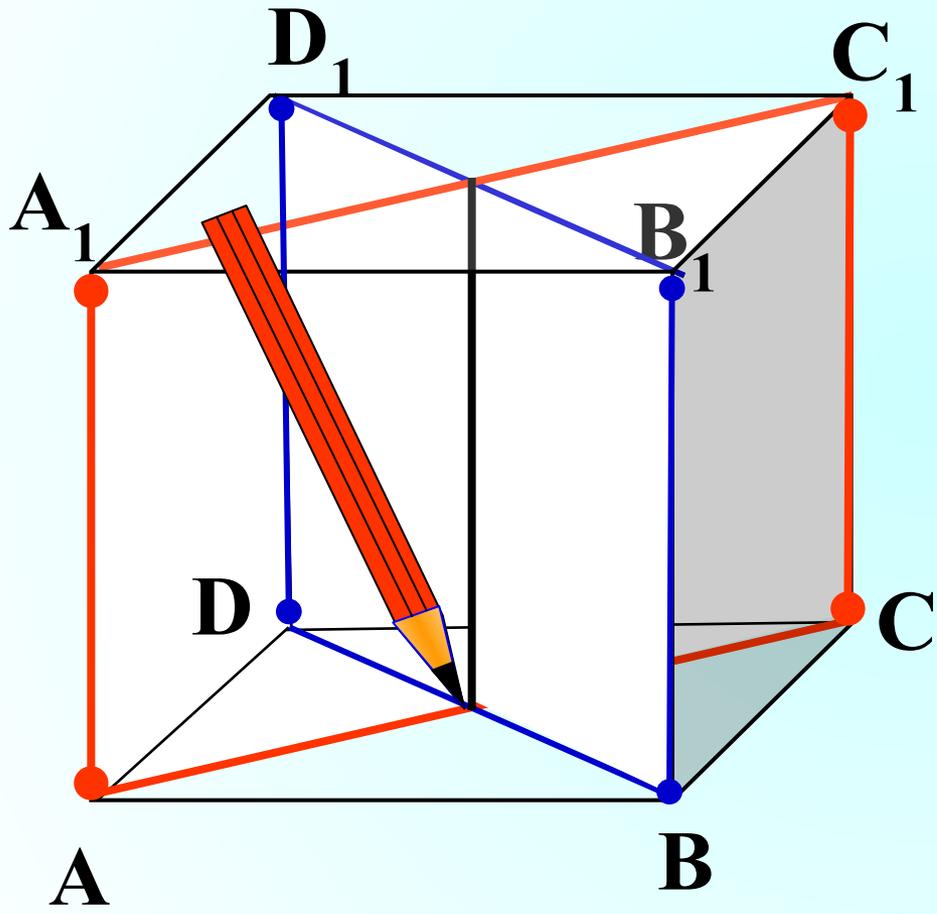
4



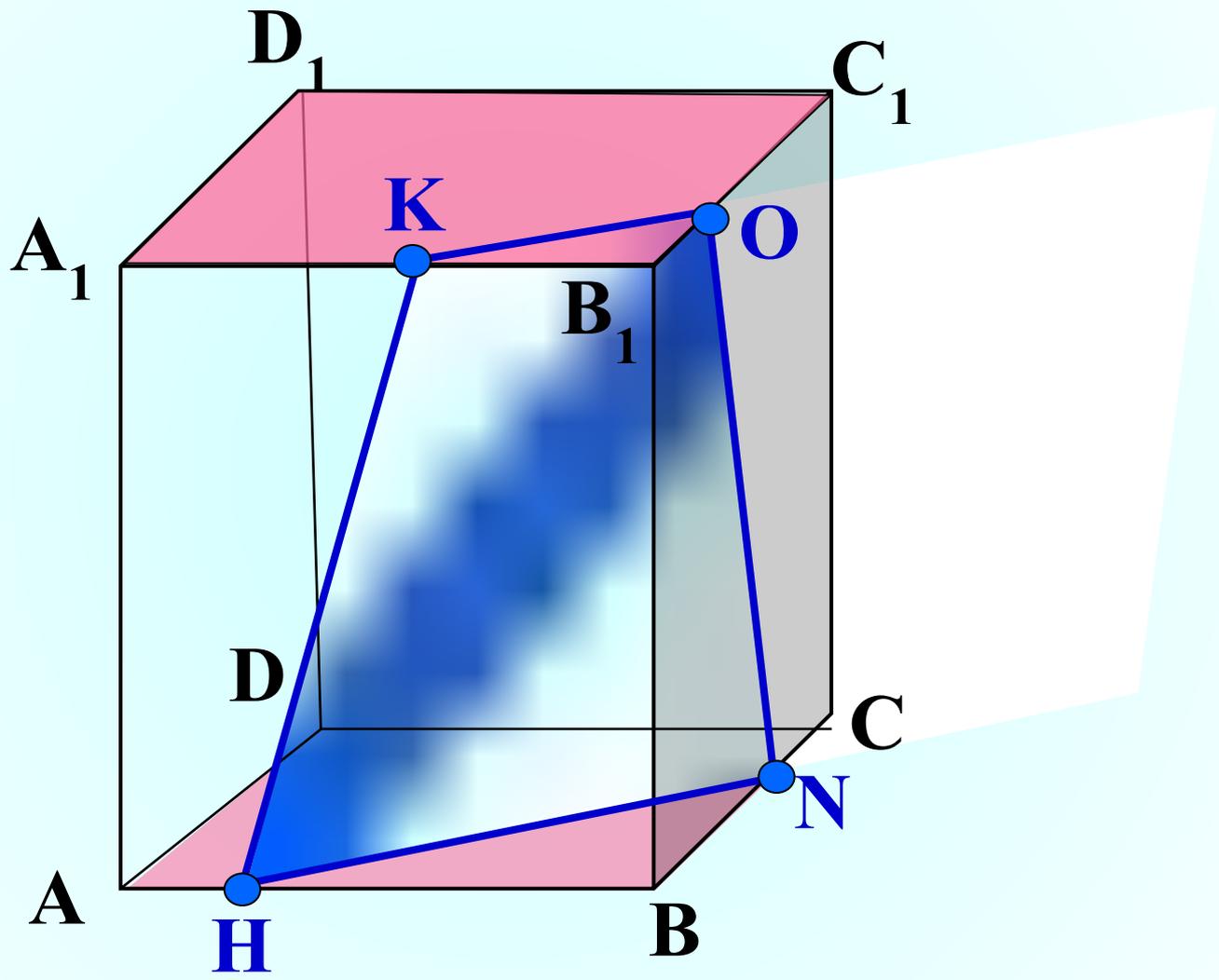
5

# Диагональные сечения.

6



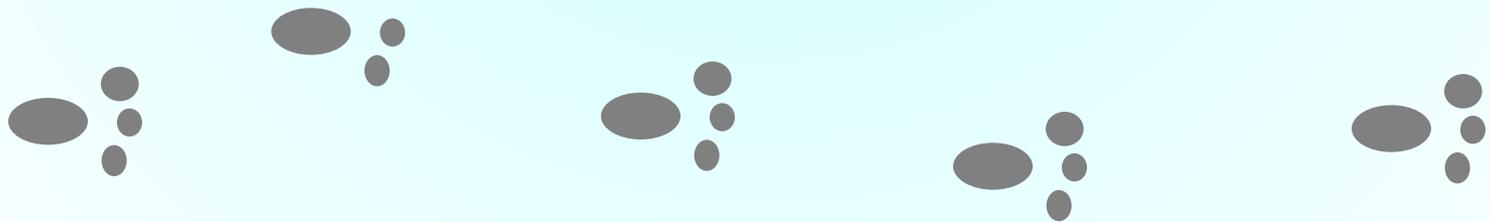
7



# Аксиоматический метод

## Метод следов

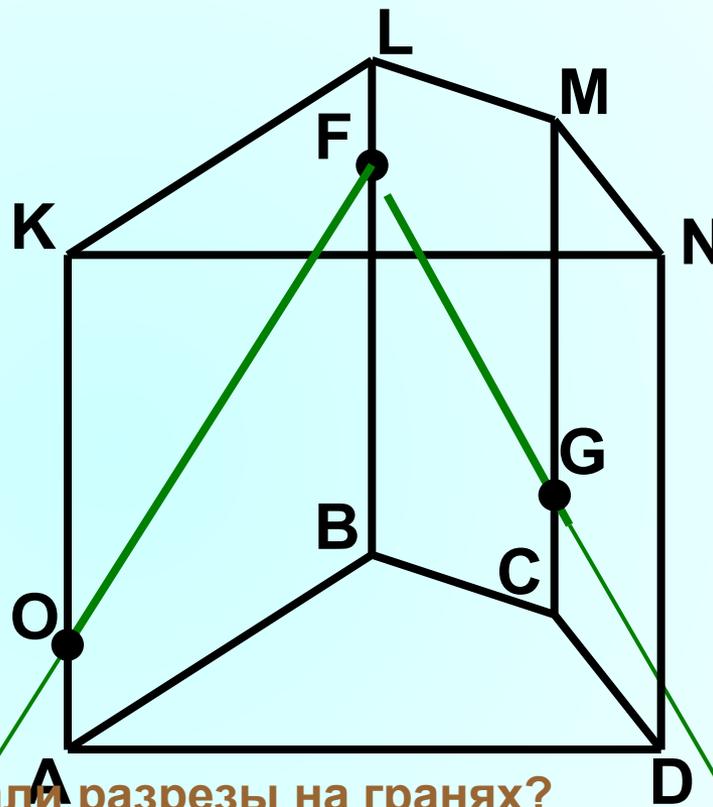
*Суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры . Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Эту линию называют следом секущей плоскости. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры .*



**Постройте сечение призмы, проходящее через точки O, F, G**

**Шаг 1: разрезаем грани KLBA и LMCB**

- Проводим через точки F и O прямую FO.
- Отрезок FO есть разрез грани KLBA секущей плоскостью.
- Аналогичным образом отрезок FG есть разрез грани LMCB.



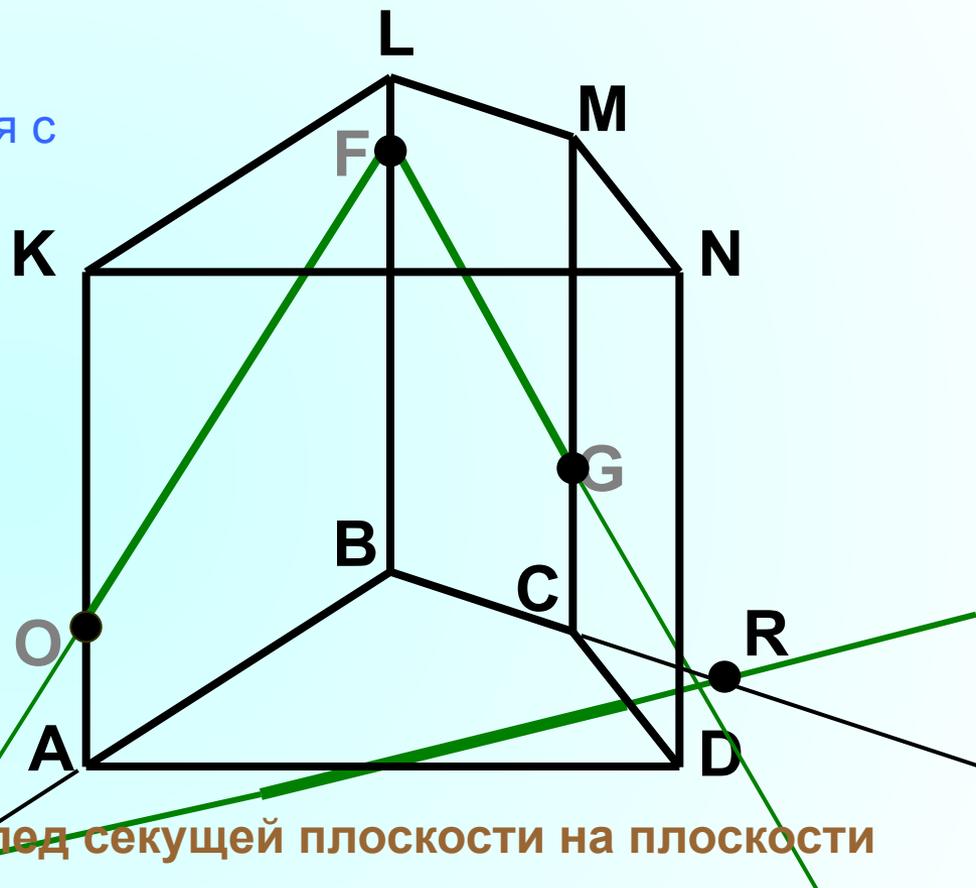
**Почему мы уверены, что сделали разрезы на гранях?**

**Аксиома** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (а у нас даже 2 точки).

**Теорема** Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

## Шаг 2: ищем след секущей плоскости на плоскости основания

- Проводим прямую  $AB$  до пересечения с прямой  $FO$ .
- Получим точку  $H$ , которая принадлежит и секущей плоскости, и плоскости основания.
- Аналогичным образом получим точку  $R$ .
- Через точки  $H$  и  $R$  проводим прямую  $HR$  – след секущей плоскости



Почему мы уверены, прямая  $HR$  – след секущей плоскости на плоскости основания?

**Аксиома** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (а у нас даже 2 точки).

**Теорема** Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

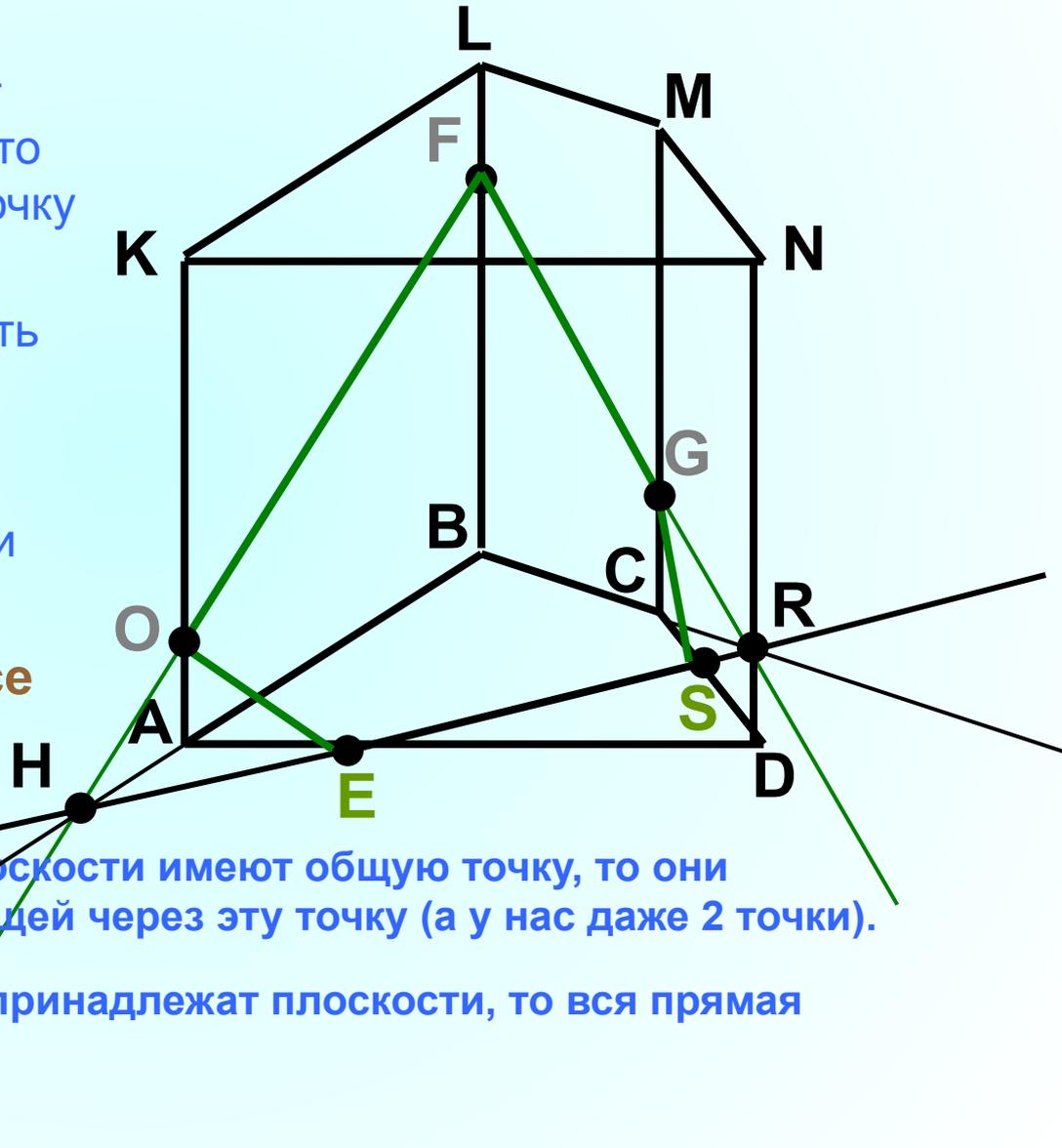
### Шаг 3: делаем разрезы на других гранях

- Так как прямая  $HR$  пересекает нижнюю грань многогранника, то получаем точку  $E$  на входе и точку  $S$  на выходе.
- Таким образом отрезок  $ES$  есть разрез грани  $ABCD$ .
- Проводим отрезки  $OE$  (разрез грани  $KNDA$ ) и  $GS$  (разрез грани  $MNDC$ ).

Почему мы уверены, что все делаем правильно?

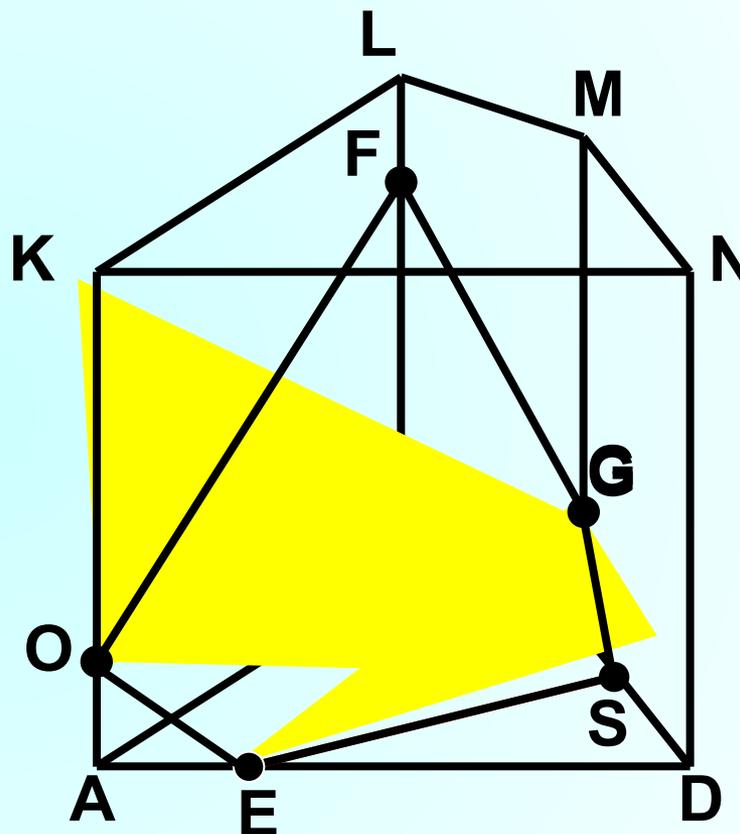
**Аксиома** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (а у нас даже 2 точки).

**Теорема** Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.



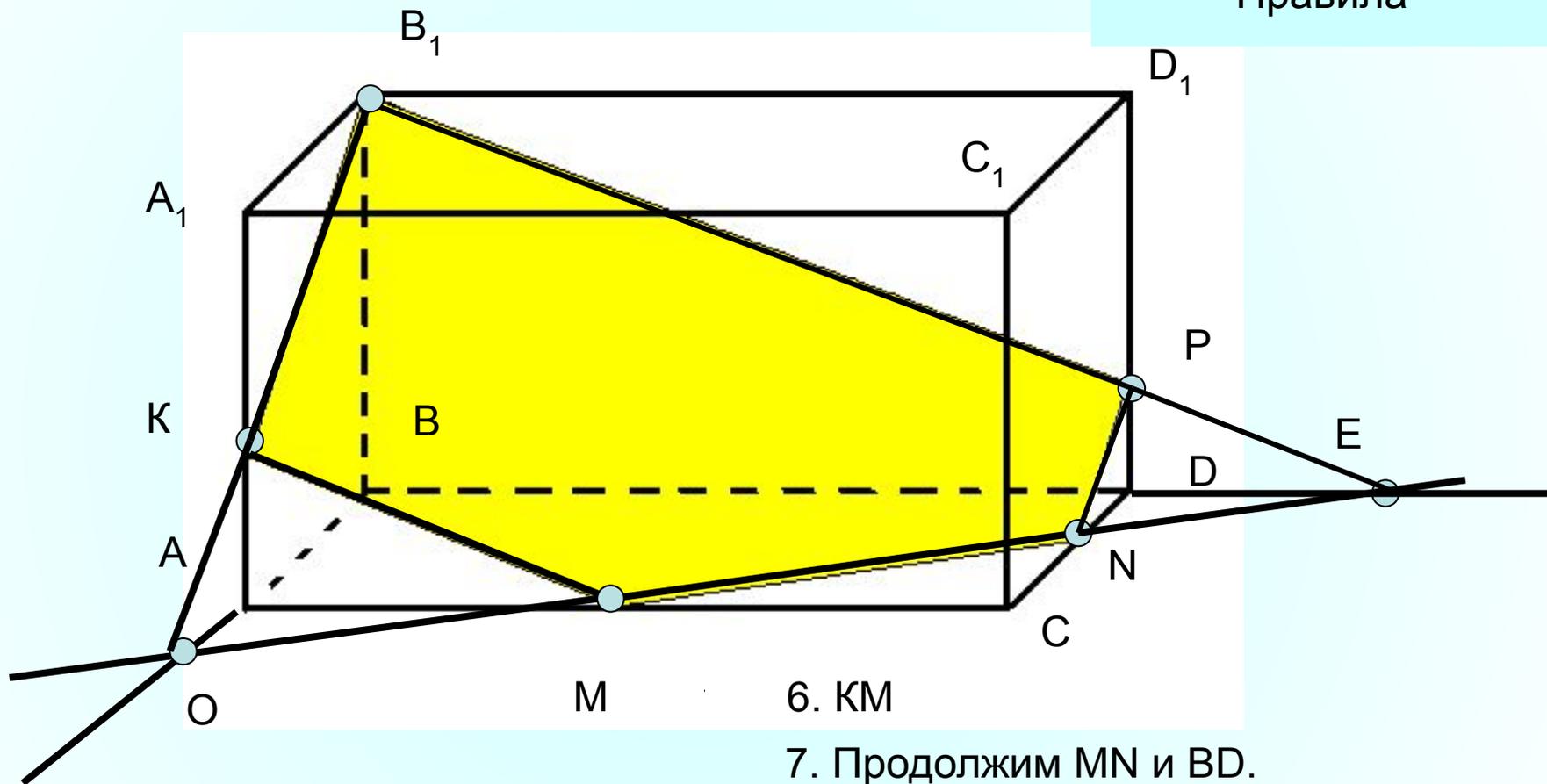
## Шаг 4: выделяем сечение многогранника

Все разрезы образовали пятиугольник **OFGSE**, который и является сечением призмы плоскостью, проходящей через точки **O, F, G**.



1. Построить сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $B_1$ ,  $M$ ,  $N$

Правила



1.  $MN$

3.  $MN \cap BA = O$

6.  $KM$

7. Продолжим  $MN$  и  $BD$ .

2. Продолжим  $MN, BA$

4.  $B_1O$

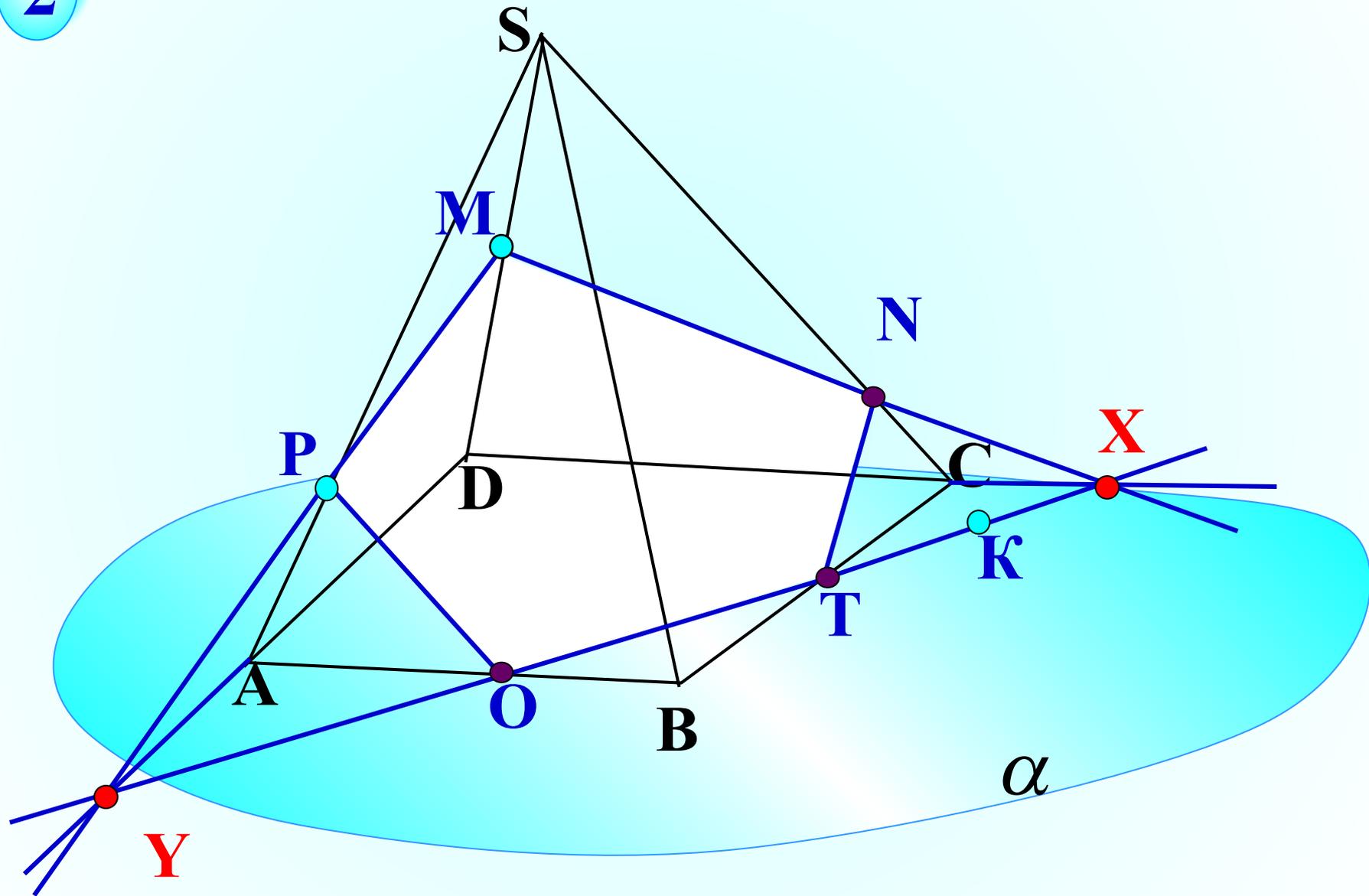
8.  $MN \cap BD = E$

9.  $B_1E$

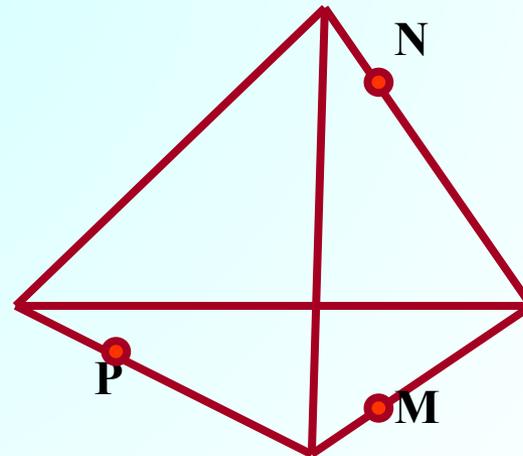
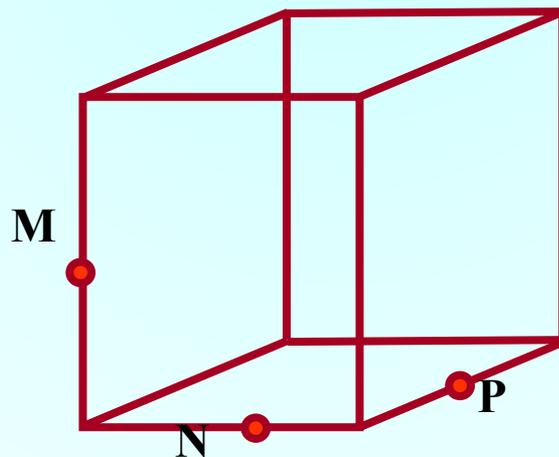
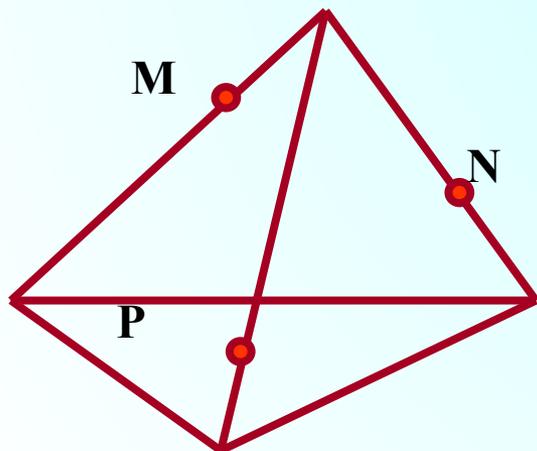
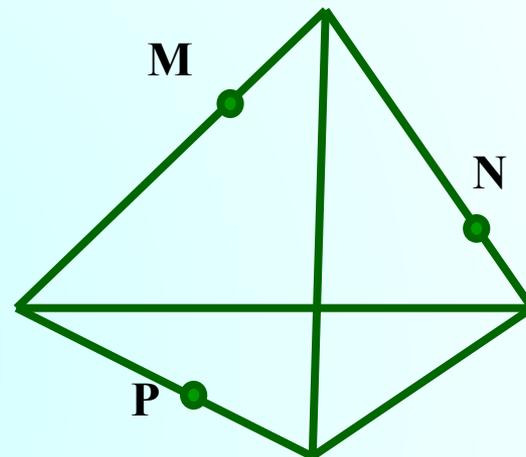
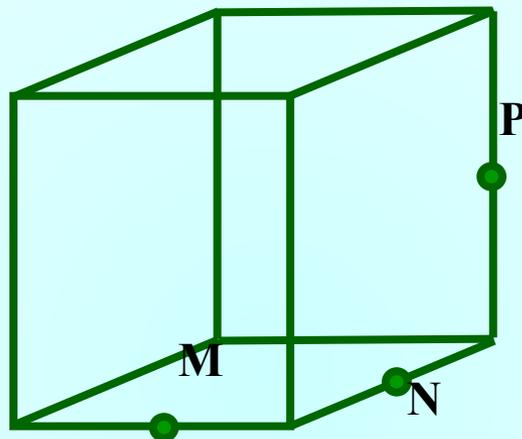
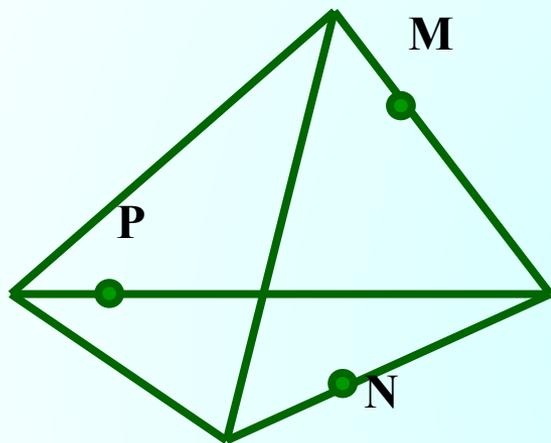
5.  $B_1O \cap A_1A = K$

10.  $B_1E \cap D_1D = P, PN$

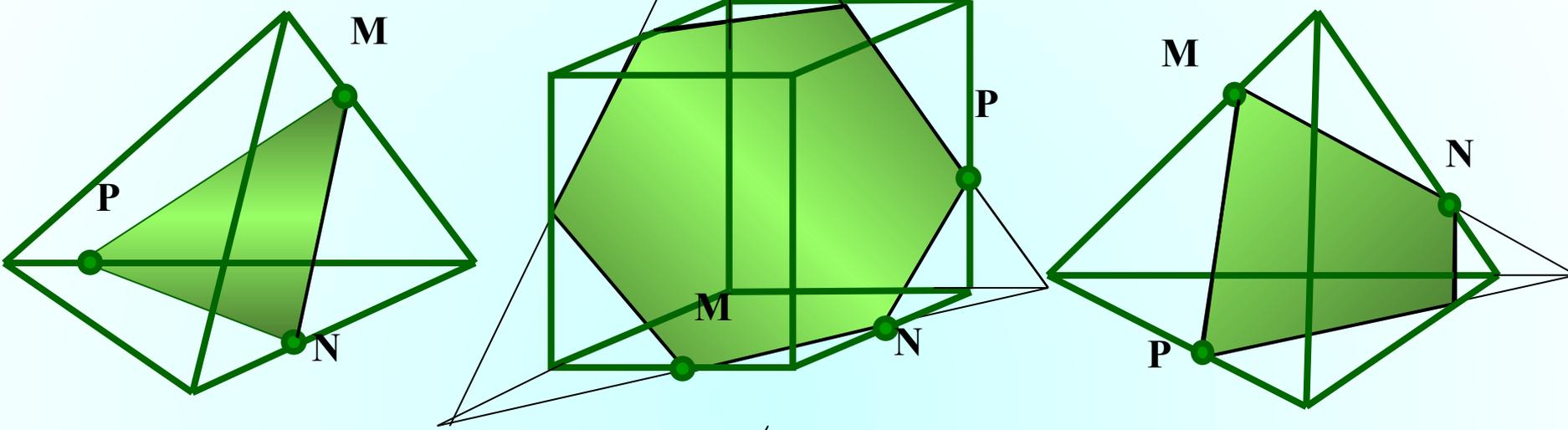
2



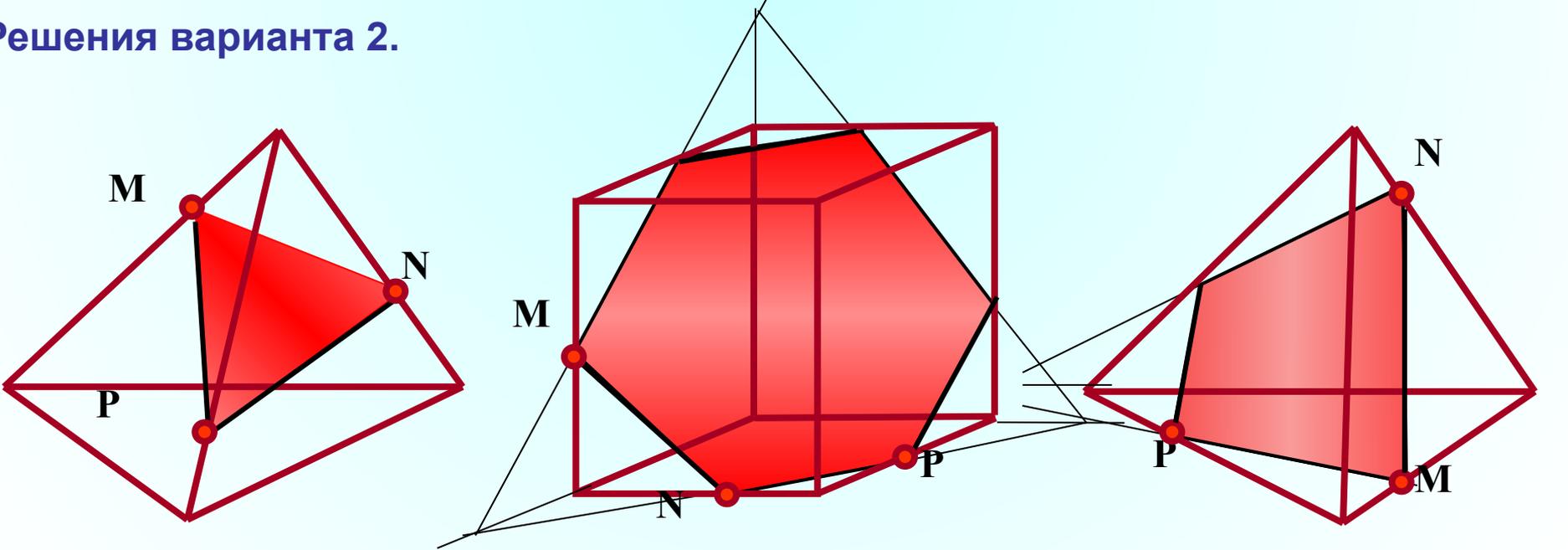
# Самостоятельная работа. (с последующей проверкой)



Решения варианта 1.



Решения варианта 2.



# Правила для самоконтроля:

- ***Вершины сечения находятся только на ребрах.***
- ***Стороны сечения находятся только на грани многогранника.***
- ***Секущая плоскость пересекает грань или плоскость грани, то только один раз.***

# *Творческое домашнее задание*

**Составить две задачи на построение сечений многогранников с использованием полученных знаний.**





**Если вы хотите научиться плавать, то  
смело входите в воду, а если хотите  
научиться решать задачи, то решайте  
их**

**(Д. Пойа)**

***СПАСИБО ЗА УРОК !***

# Использованные материалы и ресурсы

1. Атанасян Л.С., и др. Геометрия 10-11. – М.: Просвещение, 2008.
2. Литвиненко В.Н., Многогранники. Задачи и решения. – М.: Вита-Пресс, 1995.
3. Смирнов В.А., Смирнова И. М., ЕГЭ 100 баллов. Геометрия. Сечение многогранников. – М.: Экзамен, 2011.
4. Учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября» «Математика». Федотова О., Кабакова Т. Интегрированный урок "Построение сечений призмы", 9/2010.
5. Зив Б.Г. Дидактические материалы по геометрии для 10 класса. – М., Просвещение, 1997.
6. Электронное издание «1С: Школа. Математика, 5-11 кл. Практикум»

7.

[http://www.edu.yar.ru/russian/pedbank/sor\\_uch/math/legcosh/work.html](http://www.edu.yar.ru/russian/pedbank/sor_uch/math/legcosh/work.html)