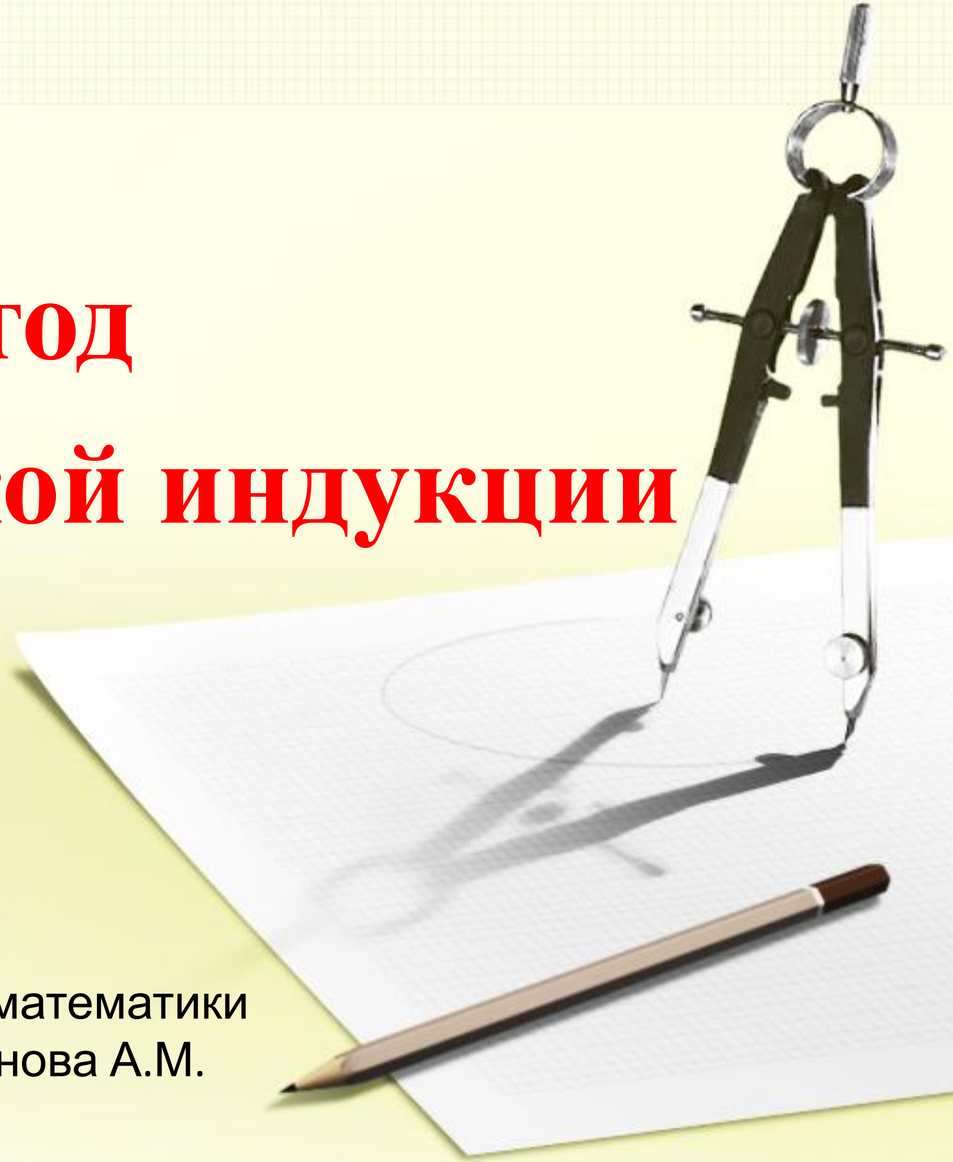
Метод математической индукции



Учитель математики
Баутдинова А.М.

В основе всякого математического исследования лежит дедуктивный и индуктивный методы обоснования того или иного утверждения.

Дедукция –

переход от общих утверждений к частным.

Пример

Все граждане России имеют право на образование.

Петров – гражданин России.

Петров имеет право на образование.

Индукция –

переход от частных утверждений к общим.

Пример

140 делится на 5.

Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

---

140 делится на 5.

Все трёхзначные числа делятся на 5.

Рассмотрим пример рассуждения по индукции:

Требуется установить, что
Каждое четное натуральное число в пределах от 4 до 20 можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Для этого переберем все интересующие нас числа и выпишем соответствующие суммы:

$4 = 2 + 2$ $6 = 3 + 3$ $8 = 3 + 5$ $10 = 3 + 7$ $12 = 5 + 7$

$14 = 7 + 7$ $16 = 3 + 13$ $18 = 5 + 13$ $20 = 3 + 17$

Эти 9 равенств показывают, что сформулированное **общее утверждение верно**, оно было доказано перебором всех возможных частных случаев.

Это **полная индукция**, когда общее утверждение доказывается для **конечного множества** элементов рассмотрением каждого элемента множества по отдельности.

Но ведь чаще *общее утверждение относится* ***не к конечному, а к бесконечному множеству***, *когда рассмотреть каждый элемент множества невозможно.*

В таких случаях общее утверждение может быть лишь ***угаданным***, полученным ***неполной индукцией***.
Оно может быть верным, а может быть и неверным.

Примеры

1) Рассмотрим суммы первых n нечетных натуральных чисел:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Выдвинем гипотезу, что всегда **сумма первых n нечетных натуральных чисел равна n^2**.

Проверим ее для шести и семи слагаемых:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$

Гипотеза подтвердилась.
Но всё равно ***утверждение остается гипотезой, пока оно не доказано.***

Докажем его:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n – 1)$ – это сумма n членов арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

2) Рассмотрим последовательность $\mathbf{y_n = n^2 + n + 17}$.

Выпишем первые 7 её членов:

$y_1 = 19$ $y_2 = 23$ $y_3 = 29$ $y_4 = 37$ $y_5 = 47$

$y_6 = 59$ $y_7 = 73$

Все полученные числа простые.

Возникает предположение: ***вся последовательность состоит из простых чисел.***

Проверим это для следующих четырех членов последовательности:

$y_8 = 89$ $y_9 = 107$ $y_{10} = 127$ $y_{11} = 149$

Эти числа простые. Гипотеза подтвердилась.

*И тем не менее она **неверна**.*

Есть в последовательности числа, **не являющиеся простыми**, например:

$$y_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 16 \cdot (16 + 1) + 17 = 17(16 + 1) =$$
$$= 17 \cdot 17$$ - составное число

Итак, утверждение, полученное ***неполной индукцией***, ***остается лишь гипотезой***, пока оно не доказано точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи.

Во многих случаях выход заключается в обращении ***к особому методу рассуждений***, который называют **методом математической индукции**.

Принцип математической индукции

Утверждение, зависящее от натурального числа n, **справедливо для любого n**, если выполнены **два условия**:

1) утверждение верно для $n = 1$;

2) из справедливости утверждения для $n = k$, где k – любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n = k + 1$.

Пример 1

Доказать, что $$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \textbf{(1)}$$

1) для n = 1 $$1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

$$1=1$$

2) предположим, что равенство **(1)** выполняется при n = k, т.е., что верно равенство

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \textbf{(2)}$$

Докажем, что тогда проверяемое равенство **(2)** верно и при n = k + 1, т.е., что верно равенство

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad \textbf{(3)}$$

Само по себе равенство **(3)** нас не интересует, нас интересует только один вопрос: вытекает ли оно из равенства **(2)**.

Рассмотрим левую часть равенства **(3)** и воспользуемся в процессе преобразований равенством **(2)**:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)\cdot 2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Итак, из равенства **(2)** вытекает равенство **(3)**. ***Оба условия*** принципа математической индукции ***выполняются***, значит, равенство **(1)** справедливо для любого натурального числа n.

Пример 2

Доказать, что

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=(1+2+3+4+\ldots+n)^2 \quad \textbf{(4)}$$

1) для n = 1 $\quad 1^3=1^2$

$$1=1$$

2) при n = k верно равенство:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+k^3=(1+2+3+4+\ldots+k)^2 \quad \textbf{(5)}$$

при n = k + 1:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+\ldots+k+(k+1))^2$$

или

$$(1+2+3+\ldots+k+(k+1))^2-(1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3)=(k+1)^3 \quad \textbf{(6)}$$

Заменив сумму кубов в левой части равенства **(6)** правой частью равенства **(5)**, получим:

$$\left(1+2+3+\ldots+k+(k+1)\right)^2-\left(1+2+3+\ldots+k\right)^2=$$

$$=\left(\left(1+2+3+\ldots+k+(k+1)\right)-\left(1+2+3+\ldots+k\right)\right)\times$$

$$\times\left(\left(1+2+3+\ldots+k+(k+1)\right)+\left(1+2+3+\ldots+k\right)\right)=$$

$$=(k+1)\cdot\left(2(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)\right)=$$

$$=(k+1)\cdot\left(2\cdot\frac{1+k}{2}\cdot k+(k+1)\right)=$$

$$=(k+1)\cdot\left(k(k+1)+(k+1)\right)=(k+1)\cdot(k+1)^2=$$

$$=(k+1)^3$$

Итак, из равенства **(5)** вытекает равенство **(6)**. ***Оба условия*** принципа математической индукции ***выполняются***, значит, равенство **(4)** справедливо для любого натурального числа n.

Пример 3

Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Решение:

Обозначим заданную сумму символом S_n и найдем ее значение при n = 1, 2, 3, 4:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2} \qquad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4} \qquad S_4=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

Получили конечную последовательность $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$.

Можно предположить, что $S_n=\frac{n}{n+1}$.

Докажем справедливость этой формулы **методом математической индукции**.

Для n = 1 формула справедлива.

Предположим, что $S_k = \frac{k}{k+1}$, и докажем, что тогда

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

В самом деле, $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

По принципу математической индукции делаем вывод, что заданная сумма равна $\frac{n}{n+1}$.

Заметим, что в этом примере можно было обойтись без метода математической индукции:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Иногда требуется доказать некоторое утверждение **не** для всех натуральных чисел n, а для $\boldsymbol{n \geq p}$.
Тогда на первом шаге проверяют справедливость утверждения ***не для n = 1, а для n = p***, а в остальном схема применения метода математической индукции та же.

Пример 4

Доказать, что для n ≥ 2 и x > 0 справедливо неравенство

$$(1+x)^n > 1+nx$$

(его называют *неравенством Бернулли* в честь швейцарского математика Якоба Бернулли (1654-1705))

Решение:

1) При n = 2 получим верное неравенство:

$$(1+x)^2 > 1+2x \quad \text{(поскольку } 1+2x+x^2 > 1+2x\text{)}.$$

2) Предположим, что неравенство Бернулли верно для n = k (k ≥ 2):

$$(1+x)^k > 1+kx \qquad \textbf{(7)}$$

Докажем, что тогда неравенство Бернулли верно и для n = k + 1, т.е. докажем, что

$$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$$

Умножив обе части неравенства **(7)** на одно и то же положительное число 1 + x, получим:

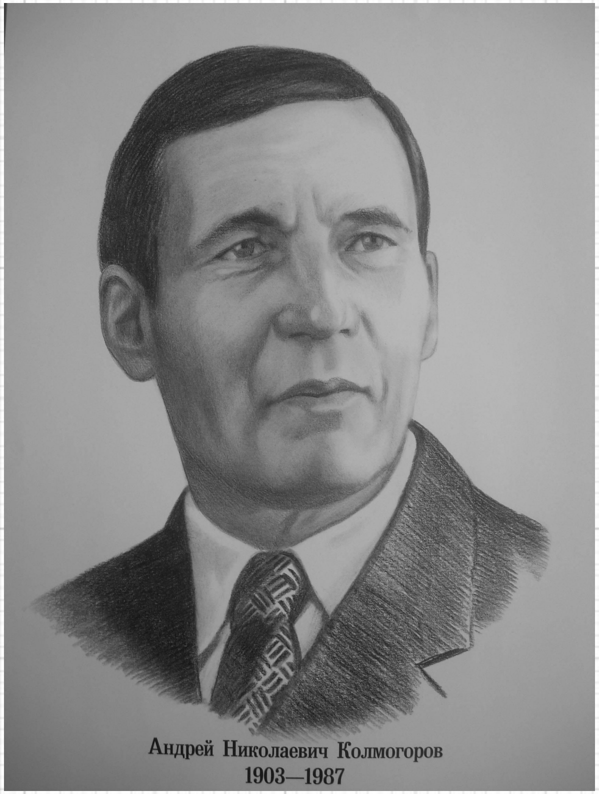
$$(1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} > 1+kx+x+kx^2 > 1+(k+1)x$$

Значит, мы доказали, что $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$

По принципу математической индукции делаем вывод, что неравенство Бернулли справедливо для $n \geq 2$.



«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику».

А.Н. Колмогоров