



# Статистика

# Тема: **Ряды динамики**

1. Понятие ряда динамики, виды, правила построения
2. Аналитические показатели временного ряда и способы их исчисления
3. Методы выявления тенденции в рядах динамики
4. Особенности измерения сезонных колебаний

# 1. Понятие ряда динамики, виды, правила построения

*Динамикой* называется процесс развития социально-экономических явлений во времени.

Для отображения динамики строят *ряды динамики*, представляющие собой временную последовательность значений статистического показателя.

Составными элементами ряда динамики являются:

- единицы времени – « $t$ »
  - периоды (годы, кварталы, месяцы)
  - моменты (даты)
- уровни ряда – « $Y$ »

Численность населения Российской Федерации с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума и дефицит денежного дохода в 2002-2007 гг.

	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>Численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума:</b>						
млн. человек	35,6	29,3	25,2	25,2	21,5	18,9
в процентах от общей численности населения	24,6	20,3	17,6	17,7	15,2	13,4
в процентах к предыдущему году	89,0	82,3	86,0	87,7	85,3	87,9
<b>Дефицит денежного дохода:</b>						
млрд. руб.	250,5	235,4	225,6	286,9	276,6	273,2
в процентах от общего объема денежных доходов населения	3,7	2,6	2,1	2,1	1,6	1,3

Источник: Росстат

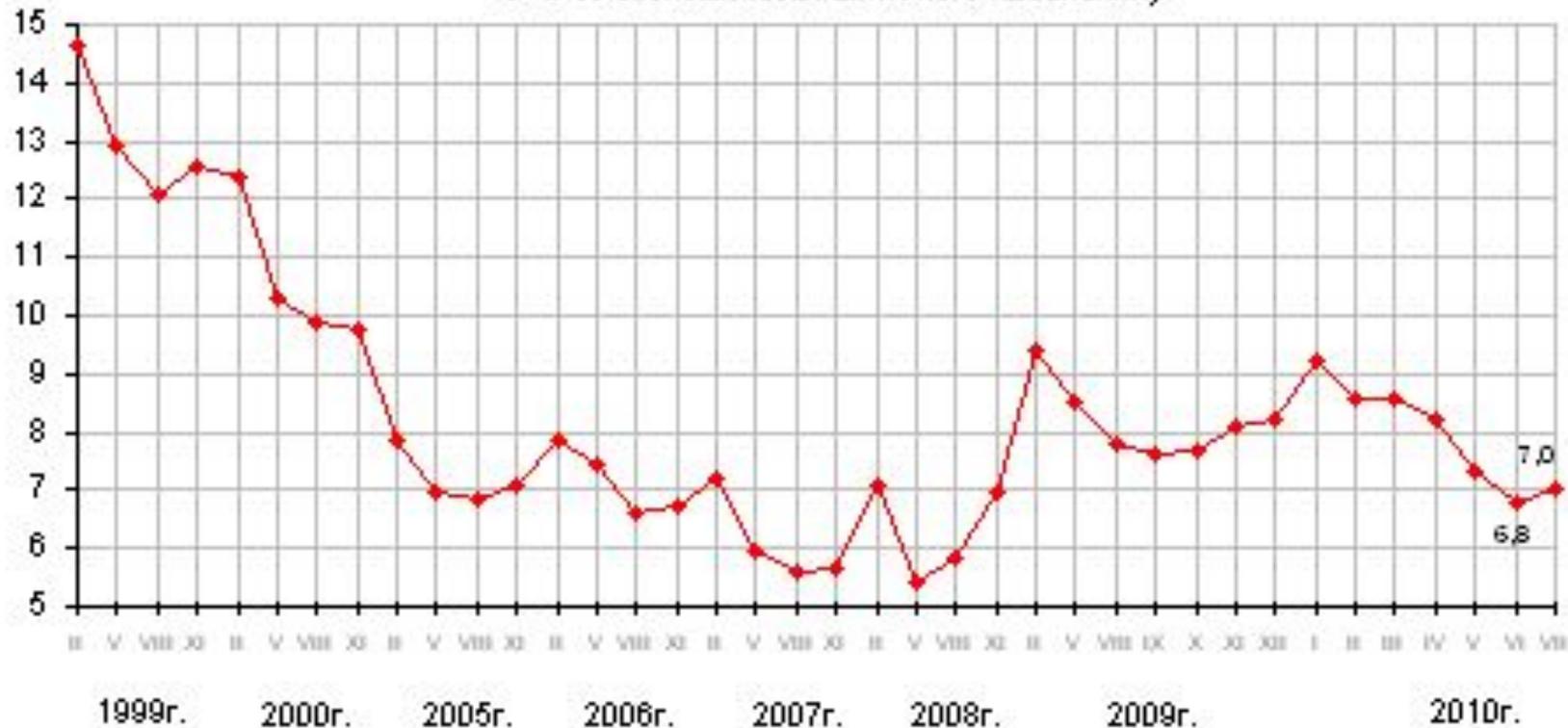
Динамика поголовья крупного рогатого скота  
в хозяйствах всех категорий России, млн. голов



Источник: Росстат

## Уровень безработицы, по методологии МОТ

(без корректировки сезонных колебаний;  
в % от экономически активного населения)



Источник: Росстат

# Виды рядов динамики

## По полноте отображения динамики

Полные

Неполные

## В зависимости от статистической природы уровней

На базе абсолютных показателей

На базе относительных показателей

На базе средних

## В зависимости от времени

Интервальные

## В зависимости от динамической аддитивности

Аддитивные

Неаддитивные

**Аддитивность** (от англ. additivity) -

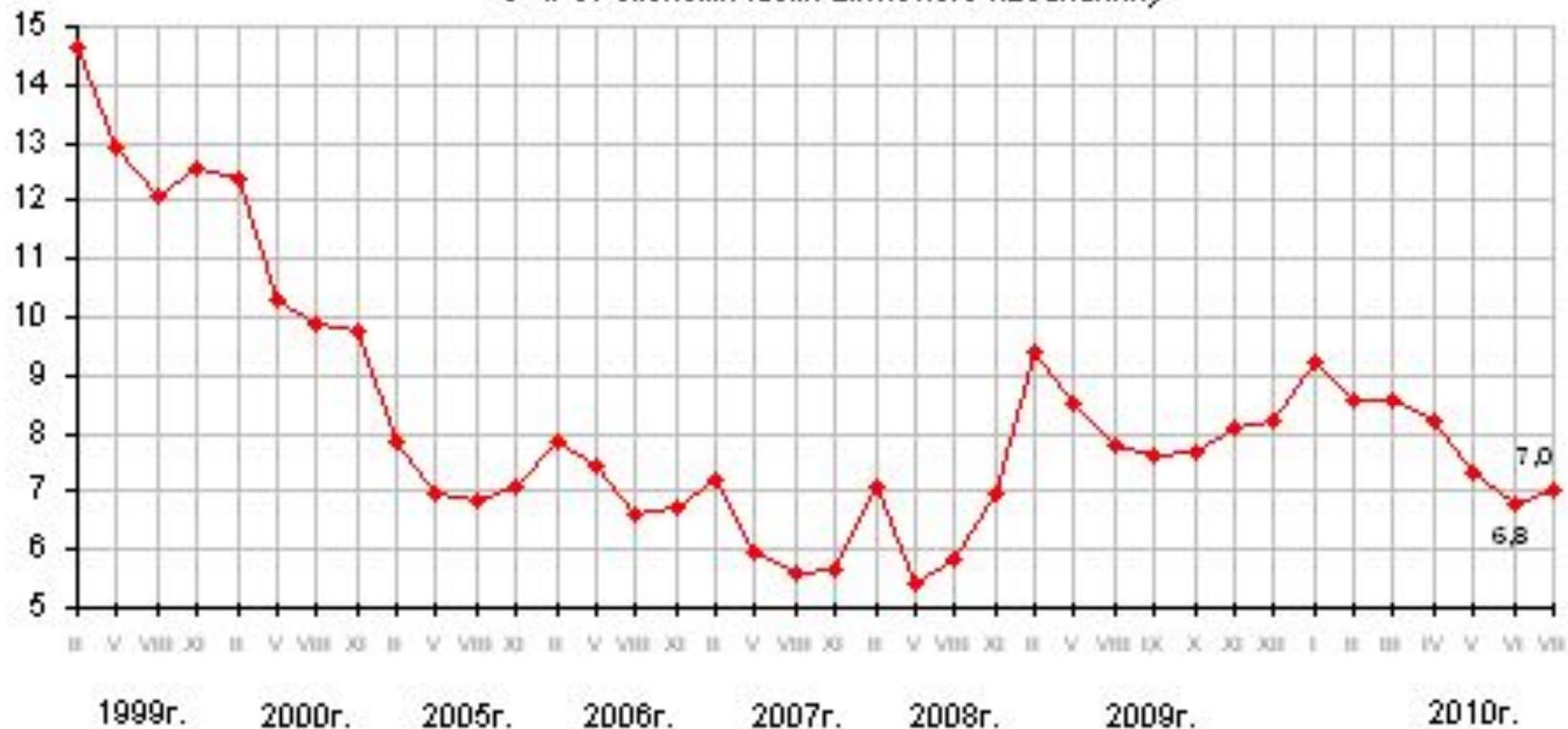
свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом возможном разбиении объекта на части.

## Правила построения рядов динамики:

- периодизация временного ряда
- обеспечение сопоставимости уровней временного ряда
- обеспечение непрерывности и последовательности отображения уровней ряда

## Уровень безработицы, по методологии МОТ

(без корректировки сезонных колебаний;  
в % от экономически активного населения)

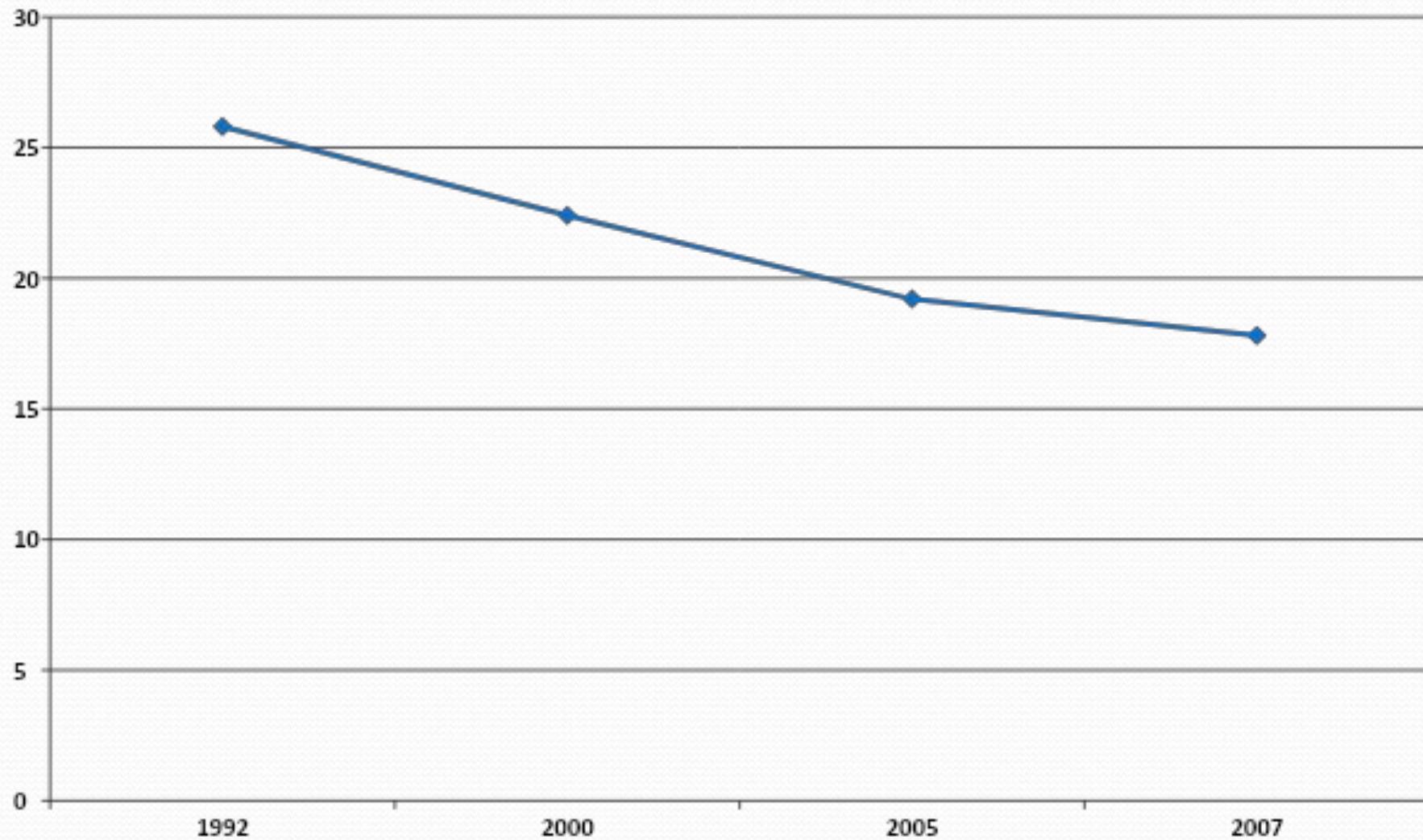


*Ежеквартально*

*Ежемесячно*

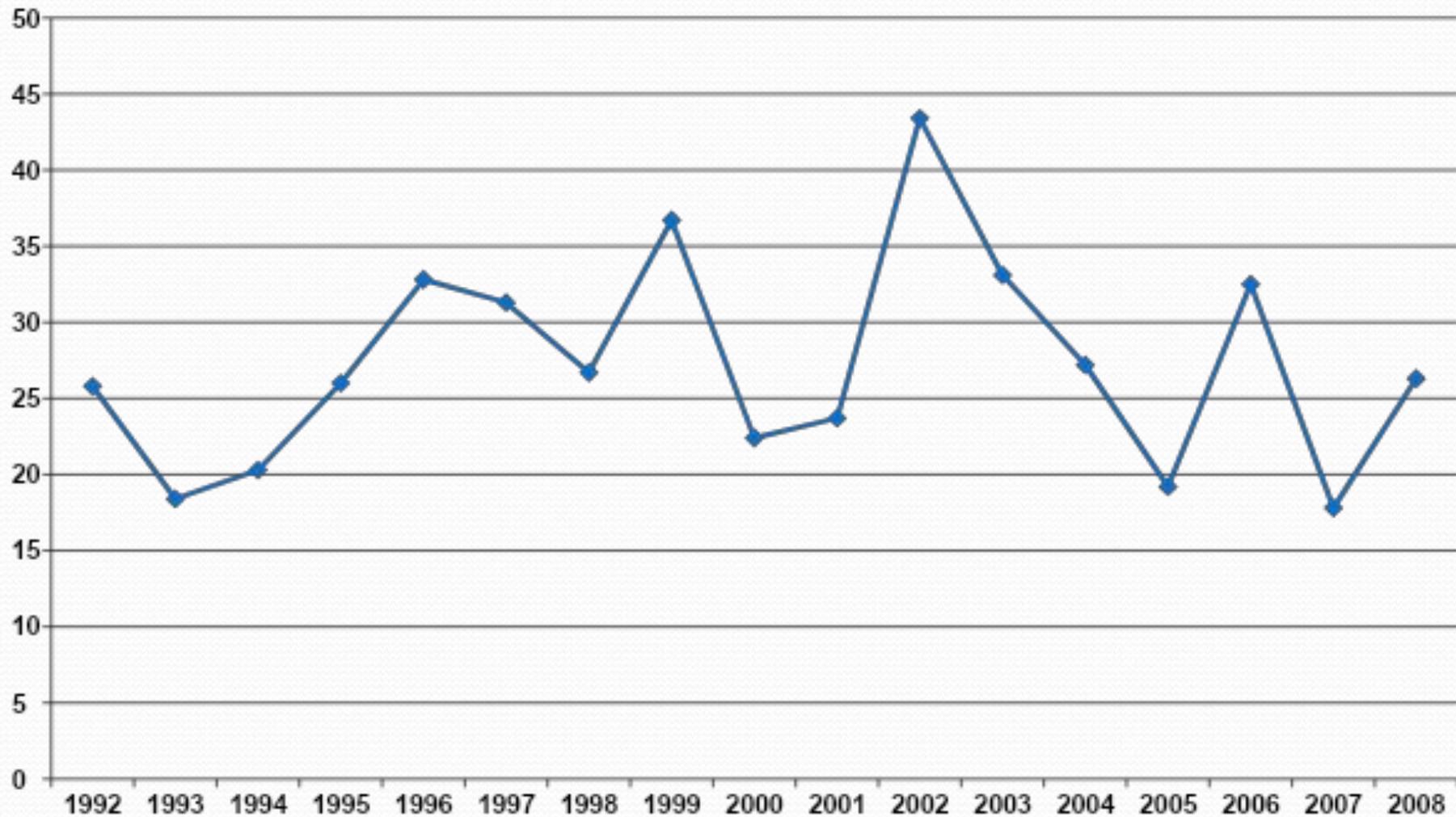
Источник: Росстат

Число лесных пожаров в Российской Федерации, тыс.



Источник: Росстат

Число лесных пожаров в Российской Федерации, тыс.



Источник: Росстат

## 2. Аналитические показатели временного ряда и способы их исчисления

Для оценки интенсивности изменений уровней временного ряда определяют следующие показатели:

- абсолютный прирост
- темп роста
- темп прироста
- абсолютное значение 1% прироста.

Расчеты производят двумя способами: *цепным и базисным*.

### **Абсолютный прирост**

$$\Delta^{цен} = y_i - y_{i-1}$$

$$\Delta^{баз} = y_i - y_1$$

### **Темп роста**

$$T_p^{цен} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%$$

$$T_p^{баз} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100\%$$

### **Темп прироста**

$$T_{при}^у = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \times 100 = T_{pi}^у - 100$$

$$T_{при}^б = \frac{y_i - y_1}{y_1} \times 100 = T_{pi}^б - 100$$

### **Абсолютное значение 1% прироста**

$$A_{1\%} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100} = 0,01 y_{i-1}$$

**Основные взаимосвязи**  
**между аналитическими показателями временного ряда,**  
**исчисленными различными способами**

- **Сумма цепных абсолютных приростов** за период равна **базисному абсолютному приросту** за тот же период

$$\sum \Delta y_i^{\ddot{o}} = (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_1$$

- **Разность** между двумя смежными базисными абсолютными приростами (последующим и предыдущим) определяет **цепной абсолютный прирост** между смежными уровнями временного ряда

$$(y_i - y_1) - (y_{i-1} - y_1) = (y_i - y_{i-1})$$

- **Произведение цепных коэффициентов (темпов) роста** за период равно **базисному коэффициенту (темпу) роста** за тот же период

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_1}$$

- **Отношение** двух смежных базисных коэффициентов (темпов) роста (последующего к предыдущему) равно **цепному коэффициенту (темпу) роста** между смежными уровнями временного ряда

$$\frac{y_i}{y_1} \div \frac{y_{i-1}}{y_1} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

В практике статистических расчетов используют и *вторичные* показатели анализа ряда динамики:

- *абсолютное ускорение* (замедление) – разность между последующим и предыдущим цепными абсолютными приростами:

$$\Delta' = \Delta y_i - \Delta y_{i-1}$$

Абсолютное ускорение показывает, на сколько данная абсолютная скорость больше или меньше предыдущей. Оно может быть как *положительным*, так и *отрицательным* числом.

- *относительное ускорение* (замедление) – отношение абсолютного ускорения к цепному абсолютному приросту, принятому за базу сравнения:

$$\Delta'_o = \Delta' / \Delta y_i = 1 - \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta y_i}$$

Оно показывает, какую часть абсолютное ускорение (замедление), достигнутое в анализируемом периоде, составляет в цепном абсолютном приросте этого же периода. Показатель вычисляется лишь в том случае, если абсолютный прирост, принятый за базу сравнения, число *положительное*.

Пример: По субъекту РФ имеются данные о добыче нефти

Год	Объем добычи нефти, млн т	Цепные показатели динамики			
		абсолютный прирост, млн т	темп роста, %	темп прироста, %	Абсолютное значение 1% прироста, млн т
2005	35,3				
2006		2,4			
2007			106,1		
2008				7,3	

## Показатели динамики добычи нефти в субъекте РФ

Год	Объем добычи нефти, млн тонн	Цепные показатели динамики			
		абсолютный прирост, млн т	темп роста, %	темп прироста, %	Абсолютное содержание 1% прироста, млн тонн
<b>2005</b>	35,3	...	...	...	...
<b>2006</b>	37,7	2,4	106,8	6,8	0,353
<b>2007</b>	40,0	2,3	106,1	6,1	0,377
<b>2008</b>	42,9	2,9	107,3	7,3	0,400

## Средние показатели анализа ряда динамики

К данной группе показателей относятся:

- средние уровни ряда динамики
- средние показатели изменения уровней ряда динамики.

Методы расчета *среднего* уровня в *интервальных* и *моментных* рядах динамики *различны*.

Для *интервальных* полных рядов:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n},$$

Для *моментных* динамических рядов возможны *четыре* варианта расчета, обусловленные полнотой ряда, а также особенностями представления его уровней.

*Вариант 1*  
(ряд динамики *полный*)

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n},$$

Пример: По двум организациям за апрель отчетного года имеются данные о списочной численности работников, чел.

Дни месяца	Организация	
	1	2
1 - 27	500	-
28- 30	400	100

$$\bar{y}_1 = \frac{500 \cdot 27 + 400 \cdot 3}{30} = 490 \text{ чел.}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10 \text{ чел.}$$

## Вариант 2

(ряд динамики *неполный*, состоит из *начального* и *конечного* уровней)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_n}{2}$$

## Вариант 3

(ряд динамики *неполный*, уровни приведены через *разные промежутки времени* (*неравноотстоящий*))

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i t_i}{\sum t_i} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} t_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} t_2 + \frac{y_3 + y_4}{2} t_3 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} t_{n-1}}{\sum t_i}$$

## Вариант 4

(ряд динамики *неполный*, уровни приведены через *равные промежутки времени* (*равноотстоящий*))

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}}{n-1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1}$$

В учебной литературе такой алгоритм расчета получил название *средней хронологической* простой.

*Пример:* Имеются данные о стоимости нефинансовых активов муниципальных организаций города, млн руб.

<b>Организация</b>	<b>Данные на</b>				
	<b>1.01 отчетного года</b>	<b>1.04</b>	<b>1.07</b>	<b>1.10</b>	<b>1.01 следующего года</b>
<b>1</b>	<b>120</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>220</b>
<b>2</b>	<b>80</b>	<b>90</b>	<b>...</b>	<b>130</b>	<b>150</b>
<b>3</b>	<b>100</b>	<b>120</b>	<b>140</b>	<b>160</b>	<b>200</b>

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{120 + 220}{2} = 170,0 \text{ млн руб.}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum \bar{y}_i t_i}{\sum t_i} = 111,3 \text{ млн руб.}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{y_1 + y_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i}{n-1} = 142,5 \text{ млн руб.}$$

## Средние показатели изменения уровней ряда динамики:

- средний абсолютный прирост

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$$

- средний темп роста

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \times 100\% = \sqrt[n-1]{K_p^{\delta}} \times 100\% = \sqrt[n-1]{K_{2/1} \times K_{3/2} \times \dots \times K_{n/n-1}} \times 100\%$$

- средний темп прироста

$$\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 100\%$$

Среднегодовые темпы прироста основных социально-экономических показателей в России за 1991-2005 гг., %

	1991-1995	1996-2000	2001-2005
Численность населения (на конец года)	-0,04	-0,3	-0,5
Численность безработных (на конец года)	19,8	1,2	-4,6
Реальные денежные доходы населения	-8,0	-2,1	11,6
Реальная начисленная заработная плата	-18,2	-3,8	12,6
Валовой внутренний продукт	-9,1	1,6	6,2
Ввод в действие основных фондов	-20,5	-1,5	12,7
Промышленное производство	-45,8	13,8	26,5
Продукция сельского хозяйства	-7,7	-1,3	3,1
Ввод в действие общей площади жилых домов	-12,1	-8,2	7,0
Оборот розничной торговли	-1,8	1,0	11,0
Платные услуги населению	-24,9	2,0	5,3
Инвестиции в основной капитал	-22,1	-8,6	9,2

Источник: Росстат

Для оценки интенсивности изменений уровней нескольких динамических рядов рассчитываются коэффициенты опережения:

$$K_{\text{опереж}} = \frac{T_p^{бА}}{T_p^{бБ}}$$

$$K_{\text{опереж}} = \frac{\overline{T_p^A}}{\overline{T_p^B}}$$

$$K_o = \frac{111,6}{106,2} = 1,050$$

$$K_o = \frac{112,6}{106,2} = 1,060$$

### 3. Методы выявления тенденции в рядах динамики

Под *тенденцией* понимают направление изменения социально-экономического явления.

Для выявления тенденции в рядах динамики используют *методы*:

- механического сглаживания
- аналитического выравнивания.

Наиболее простыми являются методы *первой* группы.

Среди них наиболее употребительными являются:

- укрупнение интервалов
- скользящих средних.

Пример: По субъекту Федерации имеются данные об экспорте пшеницы:

Номер года	Экспорт пшеницы, тыс. т
1	16,5
2	20,2
3	27,7
4	22,4
5	22,2
6	27,5
7	22,5
8	28,8
9	27,9
10	30,0

Динамика экспорта пшеницы субъекта Федерации за последние 10 лет



## Укрупнение интервалов

Номер года	Экспорт пшеницы, тыс. т	Укрупнение интервалов		
		Объем экспорта по пятилетиям, тыс. т	Средний годовой объем экспорта за пятилетие, тыс. т	Средний годовой объем экспорта за пятилетие, тыс. т
1	16,5	109,0	21,8	21,8
2	20,2			21,8
3	27,7			21,8
4	22,4			21,8
5	22,2			21,8
6	27,5	136,7	27,3	27,3
7	22,5			27,3
8	28,8			27,3
9	27,9			27,3
10	30,0			27,3

## Динамика экспорта пшеницы субъекта Федерации за последние 10 лет

	В среднем за год	
	Первое пятилетие	Второе пятилетие
Экспорт пшеницы, тыс. т	21,8	27,3

## Метод скользящей средней

Период скользяжения –

нечетный

n=3



$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}$$

n=5



$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}$$

и т.д.

Период скользяжения – четный

n=2



$$\bar{y}_i = \frac{\frac{1}{2}y_{i-1} + y_i + \frac{1}{2}y_{i+1}}{2}$$

n=4

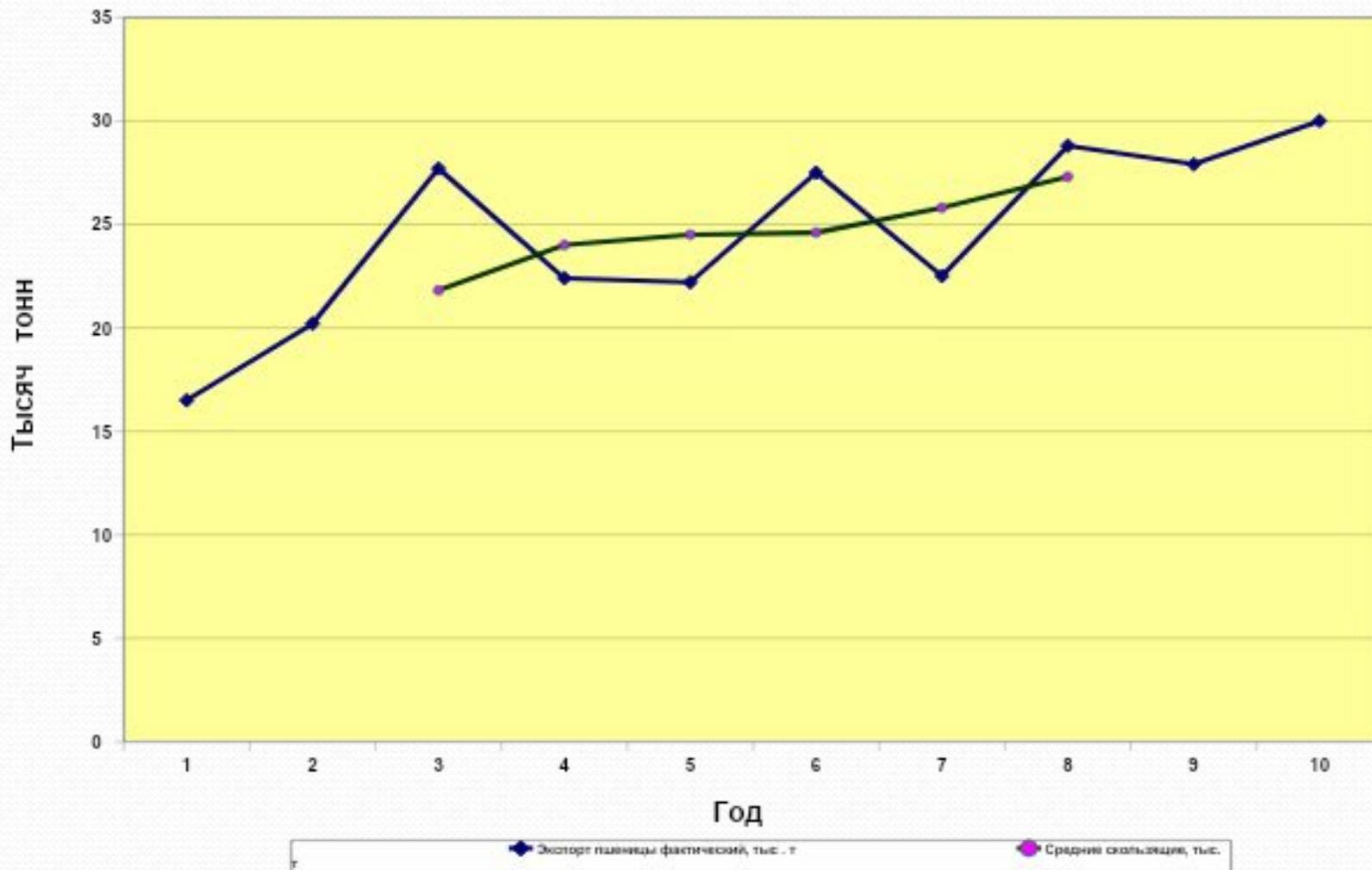


$$\bar{y}_i = \frac{\frac{1}{2}y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{1}{2}y_{i+2}}{4}$$

и т.д.

Номер года	Экспорт пшеницы, тыс. т	Метод скользящей средней (n=5)	
		Суммы по скользящим пятилетним интервалам, тыс. т	Средние скользящие по пятилетним интервалам, тыс. т
1	16,5	-	-
2	20,2	-	-
3	27,7	109,0	21,8
4	22,4	120,0	24,0
5	22,2	122,3	24,5
6	27,5	123,4	24,6
7	22,5	128,9	25,8
8	28,8	136,7	27,3
9	27,9	-	-
10	30,0	-	-

## Динамика экспорта пшеницы субъекта Федерации за последние 10 лет



## Аналитическое выравнивание

Предусматривает выражение тенденции на основе тех или иных математических функций. При этом значение уровня рассматривается как функция от времени ( $t$ ).

Аналитическое выравнивание включает два основных этапа:

- 1) выбор типа уравнения;
- 2) нахождение (оценка) его параметров.

Тип уравнения тренда выражает те или иные качественные свойства развития:

1. *Линейная форма тренда:*

$$\overline{y}_t = a_0 + a_1 t$$

2. *Параболическая форма тренда:*

$$\overline{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

3. *Гиперболическая форма тренда:*

$$\overline{y}_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

Когда тип уравнения тренда установлен, необходимо оценить значения его параметров исходя из фактических уровней временного ряда.

Для этого обычно используют *метод наименьших квадратов* (МНК).

Его смысл состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактических уровней ряда от выравненных уровней (исчисленных на основе уравнения тренда):

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_t)^2 \rightarrow \min$$

Для каждого типа тренда МНК приводит к своей системе нормальных уравнений, решение которой и позволяет оценить его параметры.

## Наиболее часто используемые математические функции для выражения тренда

Форма тренда	Уравнение тренда	Система нормальных уравнений
<i>Линейная</i>	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t$	$na_0 + a_1 \sum t = \sum y$ $a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty$
<i>Параболическая</i>	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$	$na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y$ $a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt$ $a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2$
<i>Гиперболическая</i>	$\bar{y}_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$	$na_0 + a_1 \sum \frac{1}{t} = \sum y$ $a_0 \sum \frac{1}{t} + a_1 \sum \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \sum \frac{y}{t}$

Пример: По субъекту Федерации имеются следующие данные:

Год	Экспорт, млн USD
2005	119
2006	142
2007	151
2008	155
Итого	567

Постройте *линейное* уравнение тренда?

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t$$

$$\left[ \begin{array}{l} na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{array} \right.$$

Пример: По субъекту Федерации имеются следующие данные:

Год	Экспорт, млн USD	t	t <sup>2</sup>	yt	$\bar{y}_t$	$y_i - \bar{y}_t$	$(y_i - \bar{y}_t)^2$
2005	119	1	1	119	124,2	-5,2	27,04
2006	142	2	4	284	135,9	6,1	37,21
2007	151	3	9	453	147,6	3,4	11,56
2008	155	4	16	520	159,3	-4,3	18,49
Итого	567	10	30	1476	567,0	-	94,30

$$4a_0 + 10a_1 = 567$$

$$10a_0 + 30a_1 = 1476$$

$$a_0 = 112,5$$

$$a_1 = 11,7$$

$$\bar{y}_t = 112,5 + 11,7t$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{94,3}{4}} = 4,9 \text{ млн USD}$$

t	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$	$\overline{\Delta y}$
0	$a_0$	-
1	$a_0 + a_1$	$a_1$
2	$a_0 + 2a_1$	$a_1$
3	$a_0 + 3a_1$	$a_1$
4	$a_0 + 4a_1$	$a_1$
...	...	...

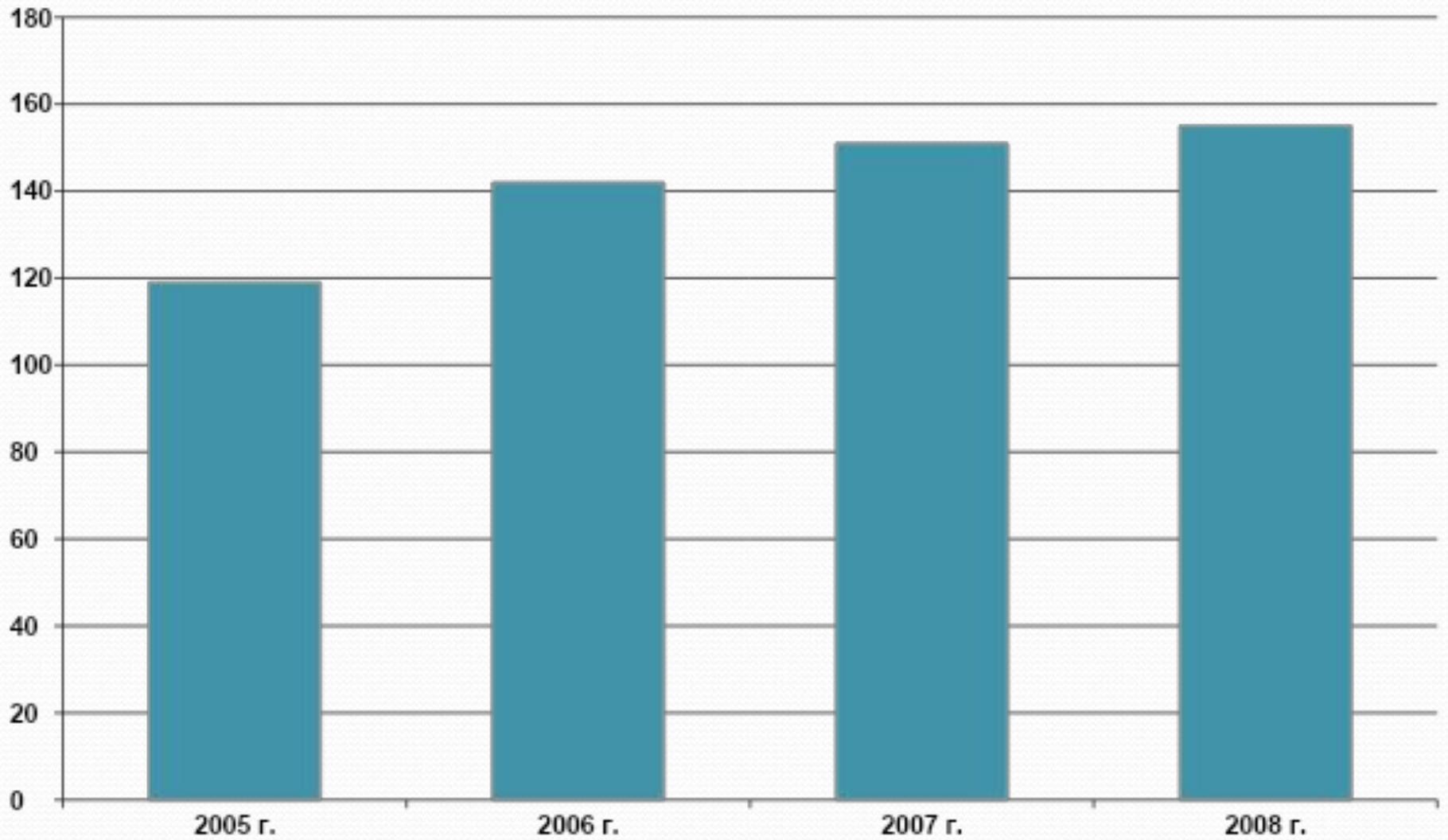
$$\hat{y}_t = 112,5 + 11,7t$$

Пример: По субъекту Федерации имеются следующие данные:

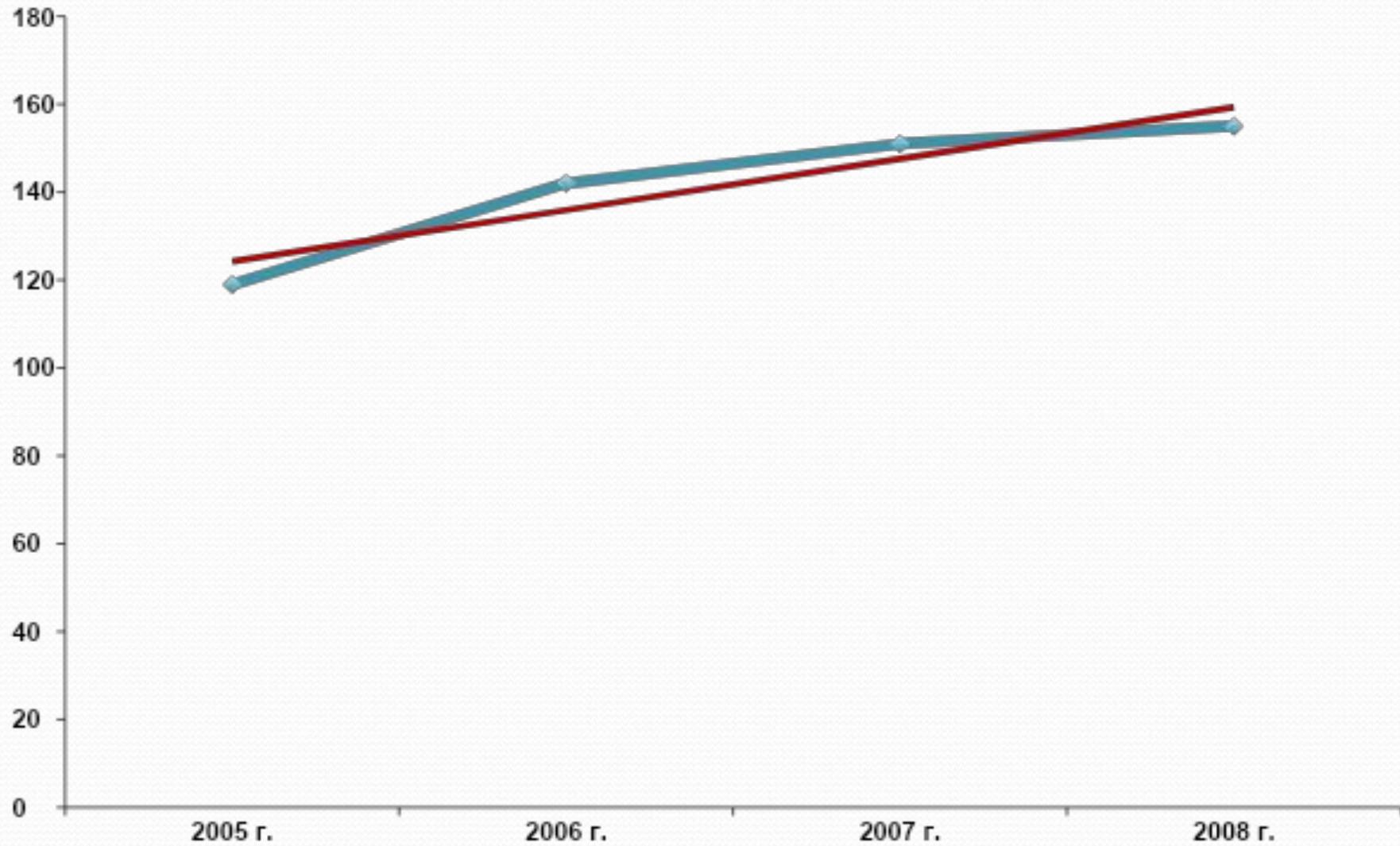
Год	Экспорт, млн USD	t	t <sup>2</sup>	yt	$\bar{y}_t$	$y_i - \bar{y}_t$	$(y_i - \bar{y}_t)^2$
2005	119	1	1	119	124,2	-5,2	27,04
2006	142	2	4	284	135,9	6,1	37,21
2007	151	3	9	453	147,6	3,4	11,56
2008	155	4	16	520	159,3	-4,3	18,49
Итого	567	10	30	1476	567,0	-	94,30

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{94,3}{4}} = 4,9 \text{ млн USD}$$

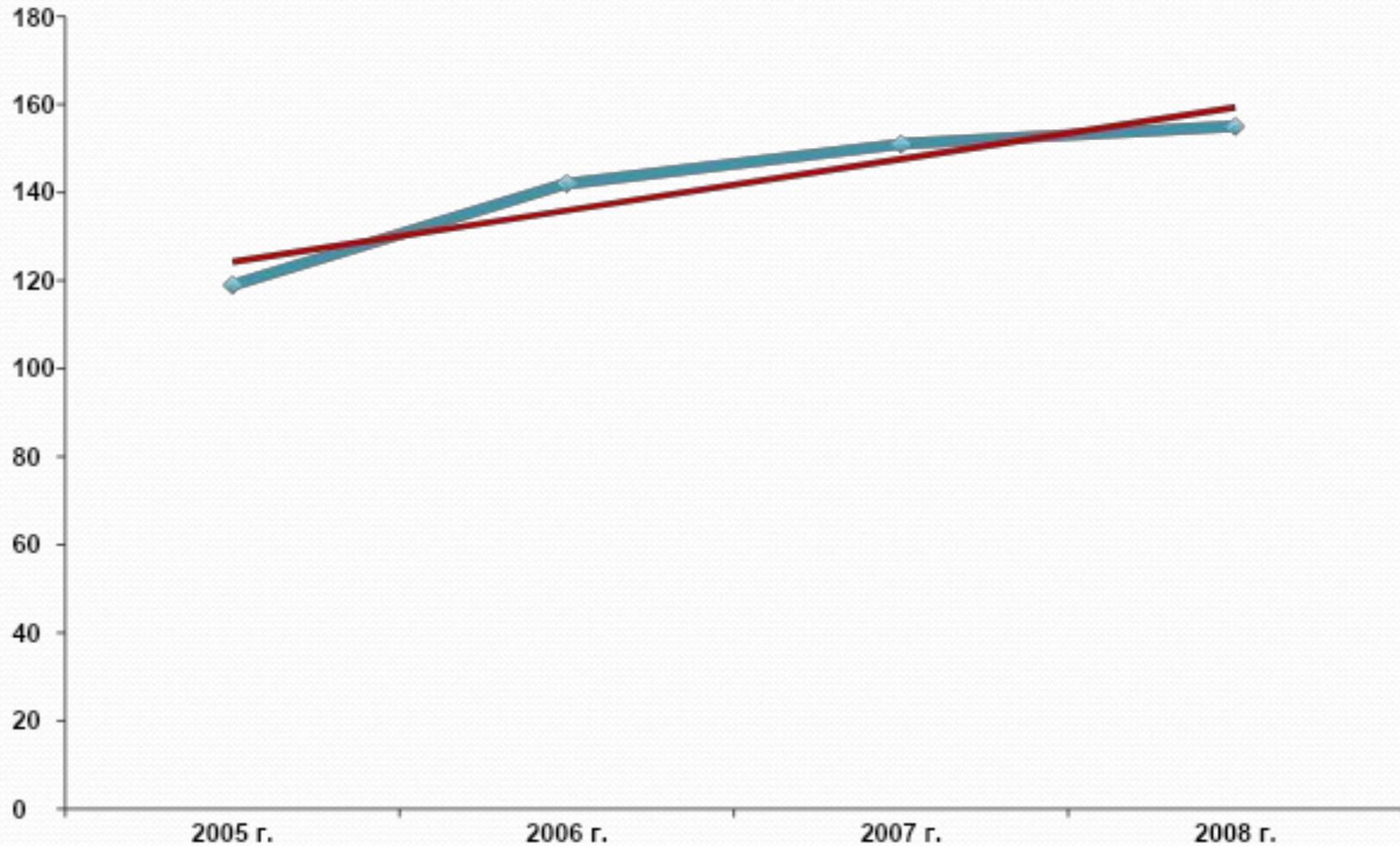
Динамика экспорта нефти субъекта Федерации  
млн USD



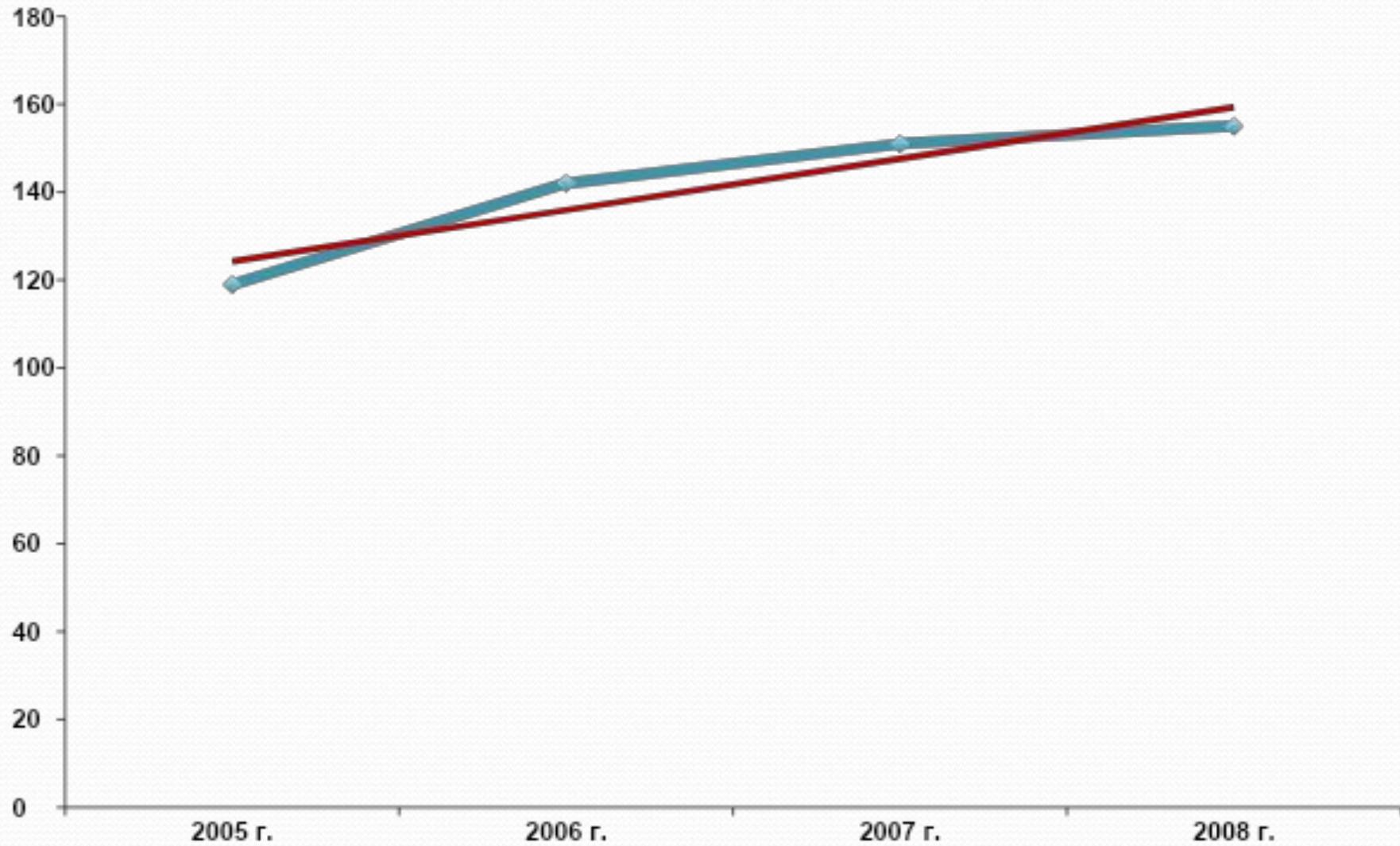
Динамика экспорта нефти субъекта Федерации,  
млн USD



Динамика экспорта нефти субъекта Федерации,  
млн USD



Динамика экспорта нефти субъекта Федерации,  
млн USD



## 4. Особенности измерения сезонных колебаний

**Сезонные колебания** - это внутригодовые устойчивые колебания уровней временного ряда.

Сезонные колебания измеряются с помощью **индексов сезонности**.

**Индексы сезонности** показывают во сколько раз фактический уровень ряда в момент или интервал времени  $t$  больше или меньше среднего уровня, либо уровня, выравненного с помощью скользящих средних или уравнения тренда.

Существует два основных способа определения индексов сезонности, обусловленных отсутствием или наличием тренда во временном ряду.

- тренд отсутствует или он незначителен

$$I_t = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}}$$

- тренд проявляется

$$I_t^S = \frac{i_t^1 + i_t^2 + \dots + i_t^T}{T},$$

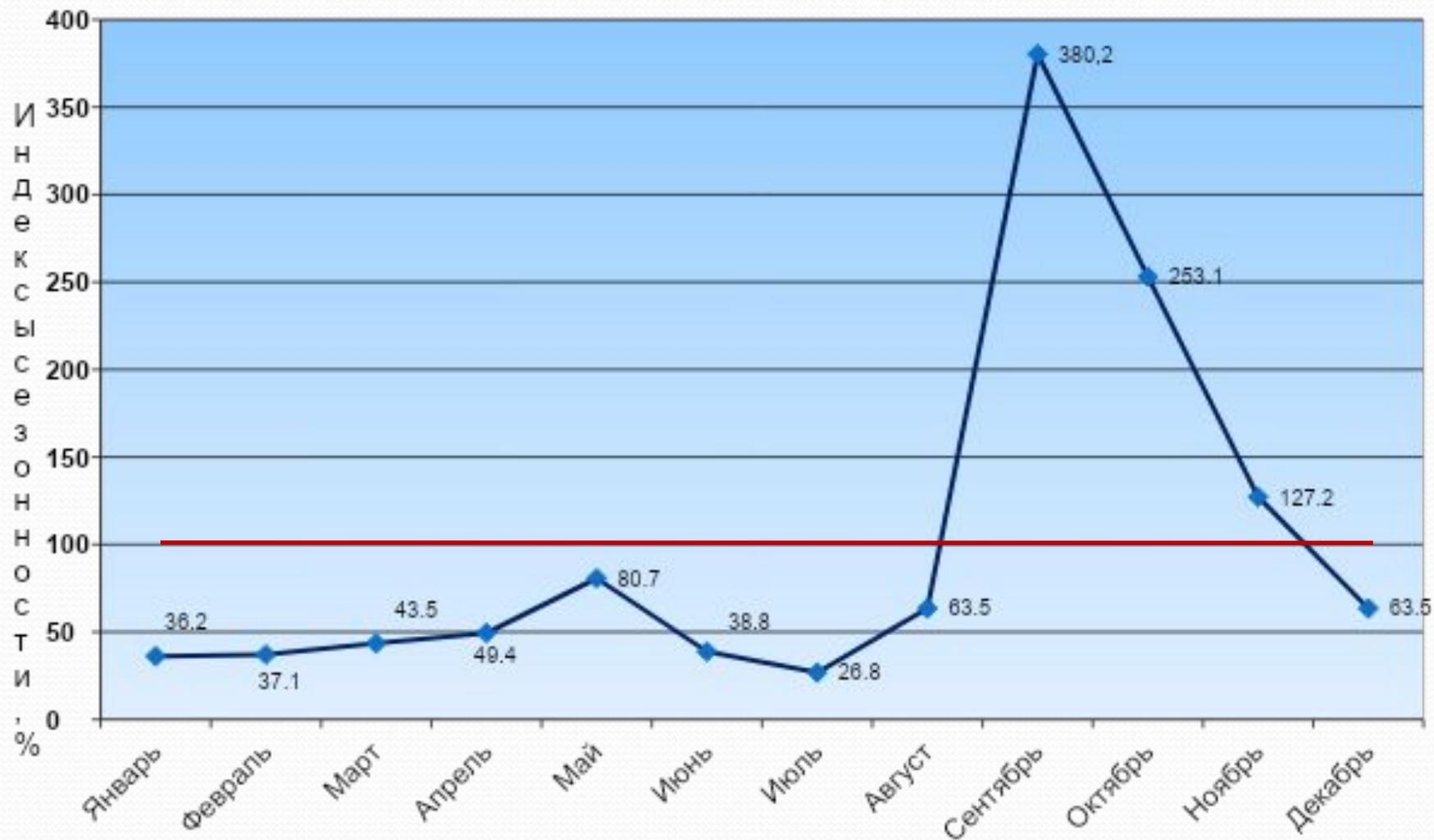
где 
$$i_t^S = \frac{y_i}{\hat{y}_t}$$

Техника применения этих приемов приведена ниже.

## Динамика продажи картофеля на рынках города, тыс. т

Месяц	2007 г.	2008 г.	2009 г.	В среднем за месяц	Индексы сезонности, %
Январь	63	48	59	56,7	36,2
Февраль	60	58	56	58,0	37,1
Март	69	68	67	68,0	43,5
Апрель	76	77	79	77,3	49,4
Май	117	122	140	126,3	80,7
Июнь	55	58	69	60,7	38,8
Июль	42	38	46	42,0	26,8
Август	85	104	109	99,3	63,5
Сентябрь	484	625	676	595,0	380,2
Октябрь	252	458	478	396,0	253,1
Ноябрь	195	198	204	199,0	127,2
Декабрь	103	91	104	99,3	63,5
Итого	1601	1945	2087	156,5	100,0

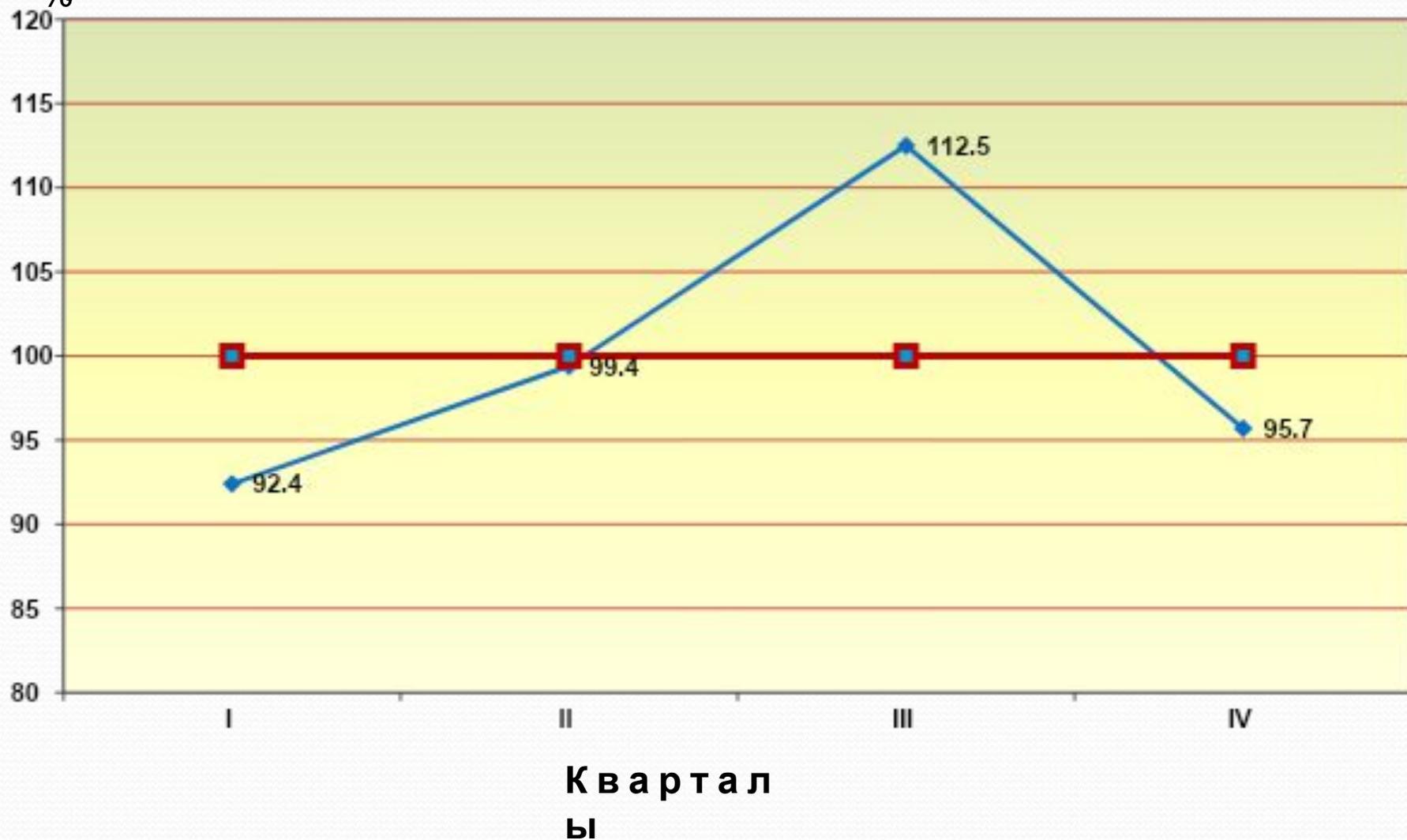
## Сезонность продажи картофеля на рынках города



*Пример:* Имеются данные об обороте розничной торговли сельскохозяйственными продуктами в регионе, млн руб.

Кварталы	2005	2006	2007	Скользящие средние, млн руб.			Индексы сезонности, %			Средний индекс сезонности, %
				2005	2006	2007	2005	2006	2007	
I	175	247	420	-	297,0	402,9	-	83,2	104,2	92,4
II	263	298	441	-	307,5	421,0	-	96,9	104,7	99,4
III	326	366	453	274,3	334,6	-	118,8	109,4	-	112,5
IV	297	341	399	287,6	374,1	-	103,3	91,1	-	95,7
Итого	1061	1252	1713	-	-	-	-	-	-	400,0

## Сезонность в реализации сельскохозяйственных продуктов в регионе



## Тесты для текущего контроля знаний

- Уровень ряда динамики - это:
  - а) величина относительного показателя на определенную дату
  - б) конкретное значение варьирующего признака в совокупности
  - в) величина среднего показателя на определенную дату или за определенный период времени
- Какое из этих утверждений верно?
  - а) базисный темп роста равен отношению двух смежных цепных темпов роста; б) базисный абсолютный прирост равен сумме цепных абсолютных приростов?
    - 1) а; 2) б; 3) а, б; 4) оба не верны.
- Темп роста балансовой прибыли организации в 2006 г. по сравнению с 2005 г. составил 1,06, а в 2008 г. по сравнению с 2006 г. – 104,0%.  
Определите темп прироста балансовой прибыли организации в 2008 г. по сравнению с 2005 г.
  - а) +10,2%; б) +10,0%; в) 1,102.