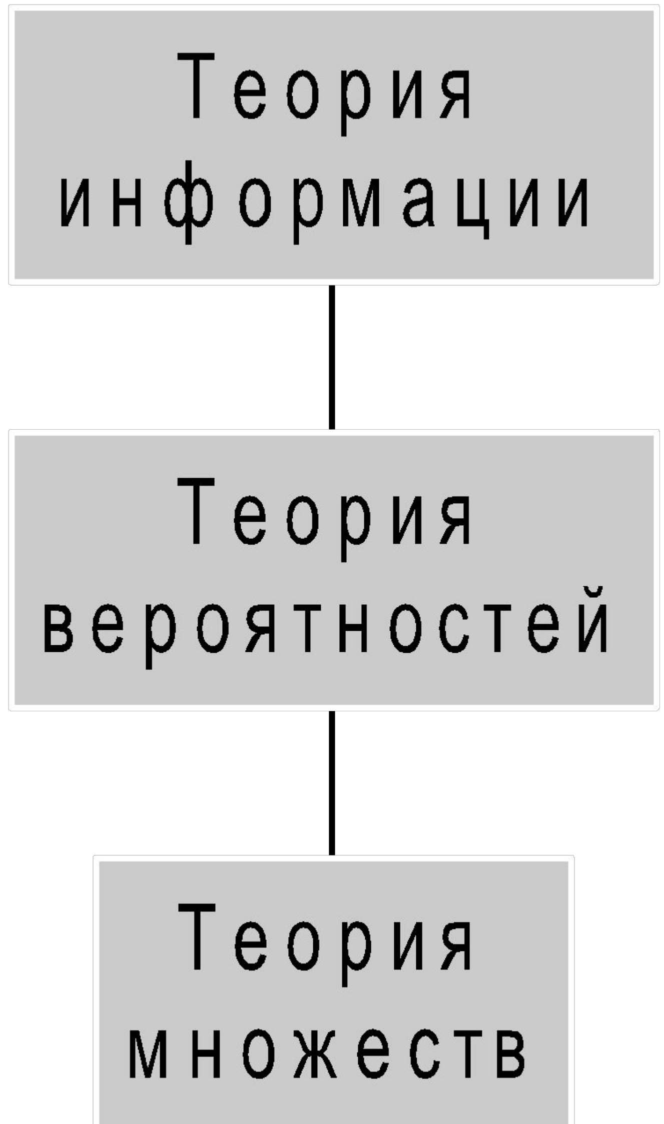
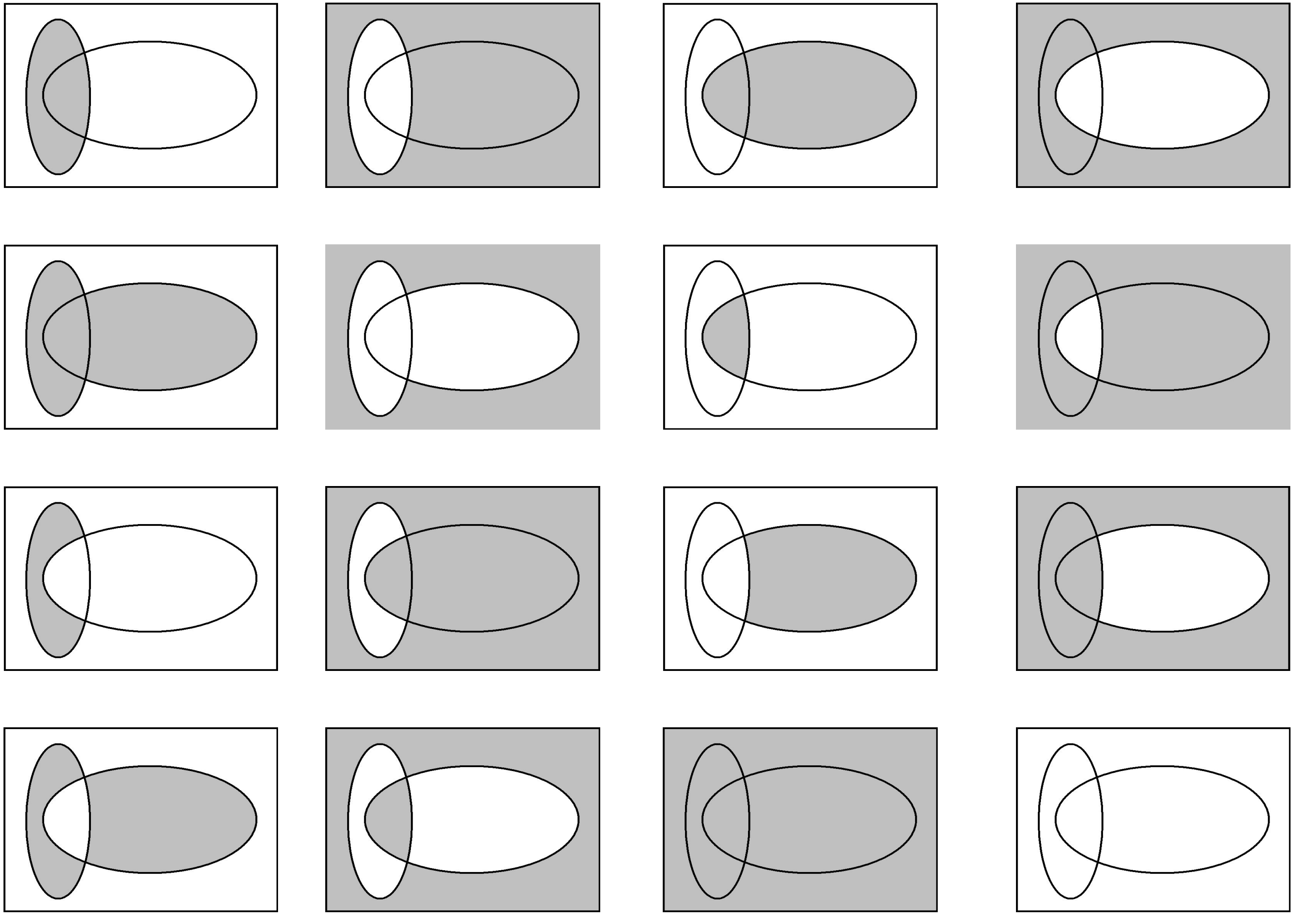
Элементы теории вероятностей

По материалам учебника
Гнеденко Б.В. «Курс теории вероятностей»,
7-е издание, 2001

На чем основана теория информации?





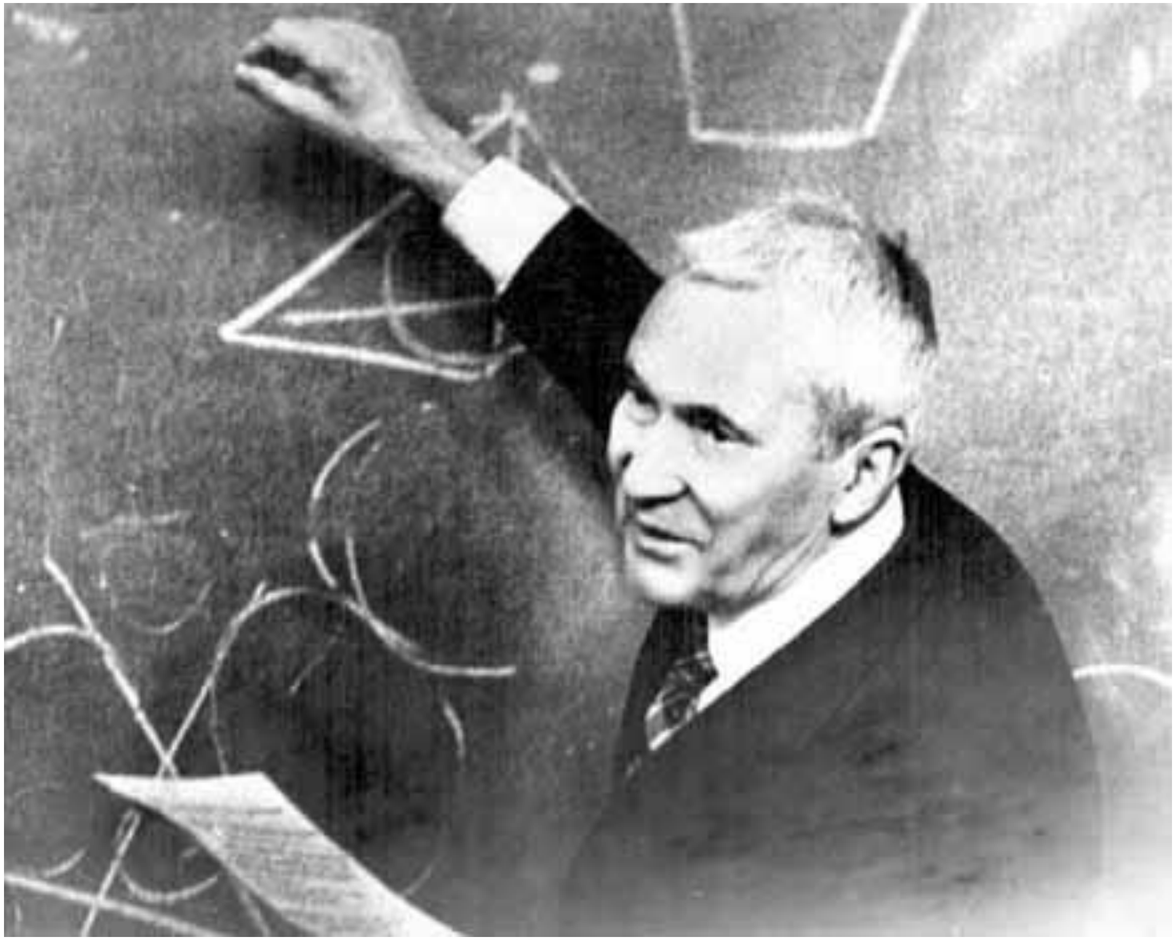
Все эти операции над множествами описываются тремя операциями:

•Операцией объединения

•Операцией пересечения

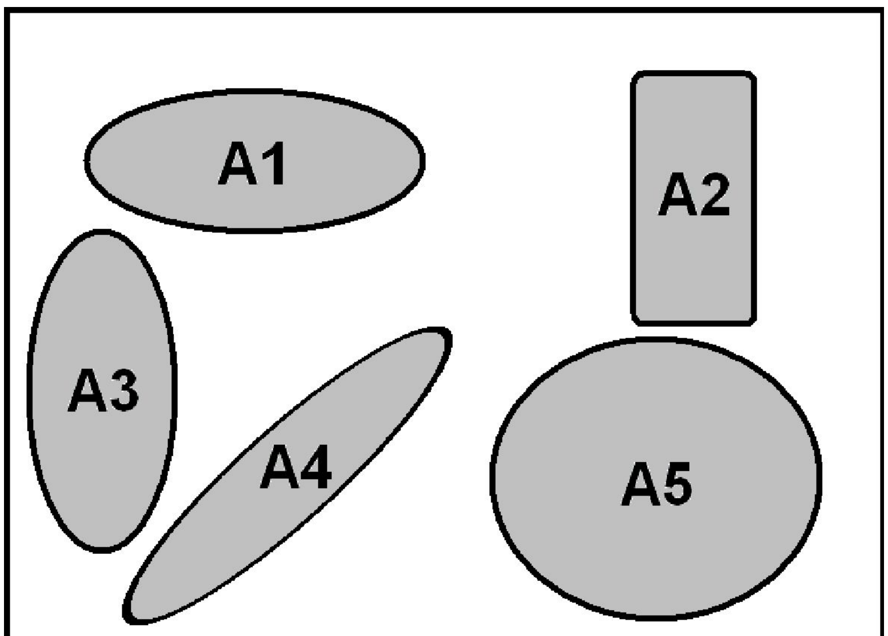
•Операцией отрицания.

Аксиоматическое построение теории вероятности предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым (25 апреля 1903 – 20 октября 1987)



Аксиоматическое построение теории вероятности предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым

- Предположим, есть некоторое полное множество всех возможных элементарных событий - Е. Это множество состоит из ряда несовместимых событий: A_1, A_2, A_3, …, A_n, …



Аксиоматическое построение теории вероятности предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым:

- Аксиома 1. Каждому случайному событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.
- Аксиома 2. $P(E) = 1$.
- Аксиома 3. (аксиома сложения). Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ попарно несовместимы, то $P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n) =$
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$.

Элементарные следствия аксиом:

1. Вероятность невозможного события равна нулю.

Из очевидного равенства $E = \varnothing + E$

и аксиомы 3 следует, что $P(E) = P(\varnothing) + P(E)$

Элементарные следствия аксиом:

2. Для любого события A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Элементарные следствия аксиом:

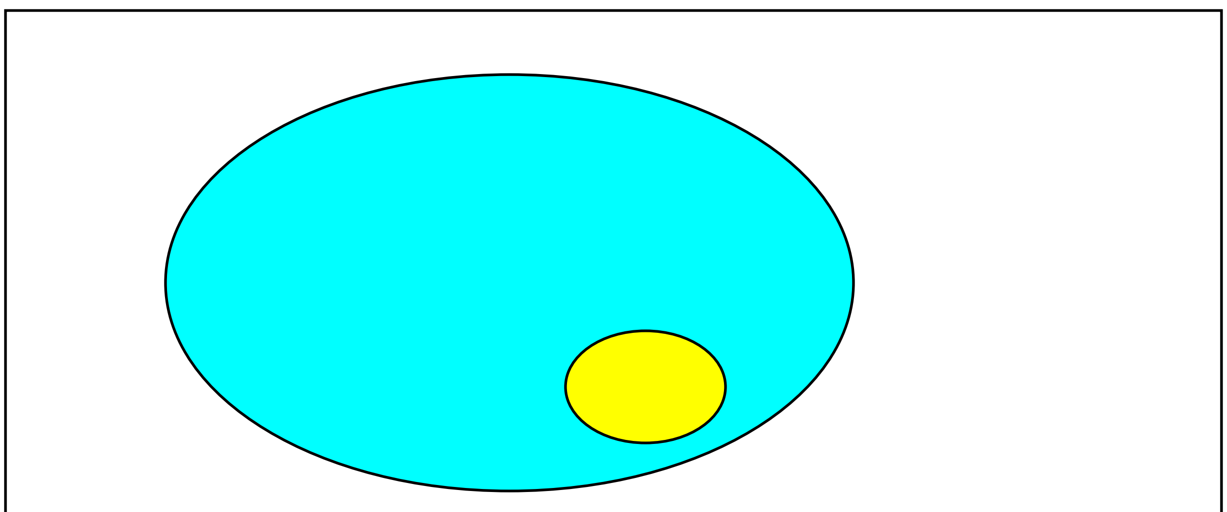
3. Каково бы ни было случайное событие A,

$$0 \le P(A) \le 1$$

Элементарные следствия аксиом:

4. Если событие A влечет за собой событие B, то

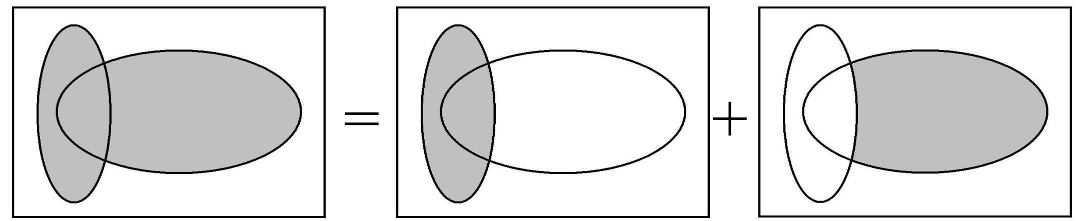
$$P(A) \le P(B)$$



Элементарные следствия аксиом:

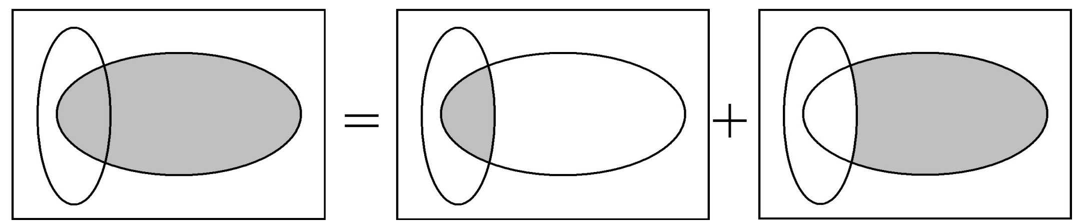
5. Пусть А и В – это два произвольных события. Поскольку в суммах

$$A + B = A + (B - AB)$$



и

$$B = AB + (B - AB)$$



слагаемые являются несовместимыми событиями, то по аксиоме 3 имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B - AB)$$

$$P(B) = P(AB) + P(B - AB)$$

Отсюда следует теорема сложения для произвольных событий А и В:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Условная вероятность и простейшие основные формулы

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Если $P(A) \cdot P(B) > 0,$ то справедлива ***теорема умножения***:

вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Независимость случайных событий

Говорят, что событие А ***независимо*** от события В, если имеет место равенство:

$$P(A \mid B) = P(A),$$

то есть, если наступление события В не изменяет вероятности события А.

Из предыдущей теоремы умножения:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

следует, что $$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Для независимых событий теорема умножения

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

принимает особенно простой вид, а именно,
если события А и В независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Формула полной вероятности

Предположим, что событие ***B*** может осуществиться с одним и только с одним и ***n*** несовместимых событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.
Иными словами положим, что

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$$

События BA_i и BA_j с разными индексами i и j несовместимы.
По теореме сложения вероятностей имеем:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Использовав теорему умножения, находим, что

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Пример. Имеется 5 урн:

- 2 урны состава $\boldsymbol{A_1}$ – 2 белых и 1 черный шар;
- 1 урна состава $\boldsymbol{A_2}$ – 10 черных шаров;
- 2 урны состава $\boldsymbol{A_3}$ – 3 белых и 1 черный шар.

Наудачу выбирается урна и из неё наудачу вынимается шар. Чему равна вероятность, что вынутый шар белый (событие $\boldsymbol{B}$)?

Решение:

$$B = A_1B + A_2B + A_3B$$

По формуле полной вероятности находим, что

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B \mid A_2) + P(A_3)\cdot P(B \mid A_3)$$

$$P(B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{0}{10} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{17}{30}$$

Формула Байеса

Пусть по-прежнему $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B \cap A_i.$ Найти $P(A_i \mid B).$

По теореме умножения имеем:

$$P(A_iB) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) = P(B) \cdot P(A_i \mid B)$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

Используя формулу полной вероятности, находим, что

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}.$$

Пример. Имеется 5 урн следующего состава:

- 2 урны состава $\boldsymbol{A_1}$ – 2 белых и 3 черных шара;
- 2 урна состава $\boldsymbol{A_2}$ – 1 белый и 4 черных шара;
- 1 урны состава $\boldsymbol{A_3}$ – 4 белых и 1 черный шар.

Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым (событие $\boldsymbol{B}$). Чему равна апостериорная вероятность того, что шар вынут из урны состава $\boldsymbol{A_3}$?

Решение: По формуле Байеса имеем

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$