Матрицы
и операции над ними.

- Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \left\| \quad \right\| \qquad C = \left[\quad \right]$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A=\left(a_{ij}\right)$, где a_{ij}- элемент матрицы

i- номер строки: $i=1,2,\dots,m$

j- номер столбца: $j=1,2,\dots,n$

- Если у матрицы m строк и n столбцов, то она имеет размерность $m \times n$ (прямоугольная матрица)

  $A_{m \times n}$ или $A \in R^{m \times n}$

- Если $m=n$, то матрица называется квадратной.

- Число строк или стобцов квадратной матрицы называется её порядком.

Квадратная матрица n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ

главная диагональ

- Если у квадратной матрицы отличны от нуля только элементы, лежащие на главной диагонали, то такие матрицы называются диагональными.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Матрица, у которой все элементы, лежащие выше (ниже) главной диагонали – нули, называется треугольной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Дана прямоугольная матрица $m \times n$.

- Если m=1, то получаем матрицу-строку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Если n=1, то получаем матрицу-столбец:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

- Две матрицы называются равными, если они одинаковой размерности и соответствующие элементы равны.

Т.е, пусть A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}):

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A, B \in R^{m \times n} \quad и \quad a_{\mathrm{ij}} = b_{ij}$$

Линейные операции над матрицами.

- Суммой матриц A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) называется матрица C=(c_{ij}) (A+B=C), элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, причем $A, B, C \in R^{m\times n}$

Найти A + B и A - B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 6+4 \\ 2+3 & -4+7 \\ -3+8 & 9-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 6-4 \\ 2-3 & -4-7 \\ -3-8 & 9-(-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}$$

Свойства сложения матриц:

$A, B, C \in R^{m \times n}$

1) A+B=B+A закон коммутативности

2) (A+B)+C=A+(B+C) закон ассоциативности

3) $\exists\, 0 \in R^{m\times n}$, что A+0=0+A=A

4) $\forall$ A $\exists$ B: A+B=B+A=0, т.е. B=-A

(матрица, противоположная матрице A).

- Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число $\kappa \in R$, называется матрица κA, каждый элемент которой равен κa_{ij}: $\kappa A=(\kappa a_{ij})$

$$-2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матрицы на число:

$$A, B \in R^{m\times n} \qquad a, b \in R$$

1) $(a+b)\mathrm{A}=a\mathrm{A}+b\mathrm{A}$

закон дистрибутивности относительно сложения чисел

2) $a(\mathrm{A}+\mathrm{B})=a\mathrm{A}+a\mathrm{B}$

закон дистрибутивности относительно сложения матриц

3) $(ab)\mathrm{A}=a(b\mathrm{A})$

4) $1\cdot\mathrm{A}=\mathrm{A} \quad \forall\,\mathrm{A}$

- Произведением матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})=A\cdot B$, элементы которой

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

где $i=1,2,\ldots,m$

$k=1,2,\ldots,p$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ \boxed{a_{i1} \quad . \quad . \quad . \quad a_{in}} & & & & \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & . & b_{1k} & . & b_{1p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & . & b_{nk} & . & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & c_{ik} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c_{m1} & . & . & . & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$: $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{4 \quad -5 \quad 8} \\ 1 \quad\;\; 3 \quad -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & . \\ . & . \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot 3 =$$

$$= -4 + 10 + 24 = 30$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ . & . \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{21} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 4 \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) + 8 \cdot 4 =$$

$$= 20 + 15 + 32 = 67$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & . \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 =$$

$$= -1 - 6 - 3 = -10$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad -1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 =$$

$$= 5 - 9 - 4 = -8$$

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$: $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}$$

- ✔ умножение матриц имеет смысл только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

- ✔ в результате умножения получается матрица с количеством строк первой и количеством столбцов второй.

Свойства умножения матриц:

1) $AB \neq BA$

2) $A(BC)=(AB)C$ закон ассоциативности

3) $(A+B)C=AC+BC$ закон дистрибутивности

4) Если $\exists AB$, то $a(AB)=(aA)B=A(aB)$, $a \in R$

5) Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей.

- Если $AB=BA$, то матрица A и B называются перестановочными или коммутирующими.

- Если в диагональной матрице все элементы главной диагонали 1, то матрица называется единичной.

$$E = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Свойство: EA=AE=A

- Если в матрице $A \in R^{m\times n}$ переставить строки местами со столбцами, то получим матрицу, которая называется транспонированной: $A^T \in R^{n\times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Матрица называется симметричной, если $A^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

симметричная

Свойства транспонированной матрицы:

1) $\left(A^T\right)^T = A \qquad \forall\ A \in R^{m\times n}$

2) $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T \qquad \forall\ A, B \in R^{m\times n}$

3) $\left(cA\right)^T = cA^T \qquad \forall\ A \in R^{m\times n}, c \in R$

4) $\left(AB\right)^T = B^T A^T \qquad \forall\ A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times p}$

Даны матрицы А и В: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Вычислить:

$$C = A^2 + 2B$$

$$D = 3A^T - B^2$$

$$K = 2A^T B^T$$

Ответ: $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -60 & 40 \\ 47 & -20 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} -28 & 20 \\ 38 & -28 \end{pmatrix}$

Каков порядок матриц A и B? Вычислить AB.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 10 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} -27 & -24 & 44 \\ 10 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

Каков порядок матриц А и В? Вычислить АВ.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 38 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 21 \\ -8 & 16 & -24 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$