

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ЛЕКЦИЯ 1

Математический факультет. Кафедра математического
моделирования

Тема: Основные понятия теории множеств

Цель лекции – изучение основных понятий теории множеств, способов задания множеств, законов алгебры множеств

Содержание:

- Курс «Дискретная математика»: цель, структура
- Теория множеств как раздел дискретной математики
- Понятие множества
- Способы задания множеств
- Отношения принадлежности и включения
- Мощность множества. Пустое и универсальное множества
- Булеан и его мощность
- Операции над множествами
- Законы и тождества алгебры множеств Кантора

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 4-8 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 4-10 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.

Курс «Дискретная математика»: цель, структура

Цель курса – формирование базовых знаний в области ДМ, необходимых для освоения методов анализа и синтеза аппаратных и программных средств цифровых вычислительных систем и сетей различного назначения, изучения теоретической базы информационных технологий, математических способов представления дискретных информационных процессов



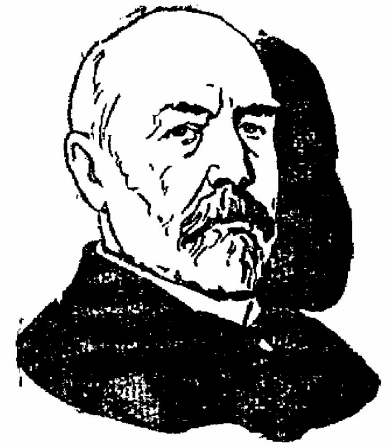
Курс «Дискретная математика»:

знания, умения, навыки

Знания	математический аппарат дискретной математики – множества и отношения, операции над ними, графы и операции над ними, формальные правила представления, минимизации и реализации логических функций; комбинаторика в части применения основных формул, методов оптимальных решений и их оценки при рассмотрении типовых задач
Умения	формулировать и решать практические задачи разработки программного обеспечения автоматизированных систем, синтеза и анализа цифровых дискретных объектов на основе выбора наиболее рационального математического аппарата дискретной математики с целью ее оптимального решения
Навыки	вычисление теоретико-множественных операций, применение операций минимизации и поглощения, составление матриц для графов, правила минимизации булевых функций, определение полноты булевых функций

Историческая справка

- **Немецкий ученый, математик, создатель теории множеств**
- **Родился в Петербурге в 1845г.**
- **В 1867 г. окончил Берлинский университет**
- **В 1872-1913 гг. – профессор университета в Галле**
- **Сформулировал общее понятие мощности множества (1878)**
- **Развил принципы сравнения мощностей множеств и**
- **Систематически изложил принципы своего учения**
- **Созданная Кантором теория множеств, некоторые идеи которой имелись у его предшественников, послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную ее структуру.**



**Георг Кантор
(XIX-XXвв.)**

Теория множеств как раздел дискретной математики

- *Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств*

Н. Бурбаки

Термины

Базовые понятия:

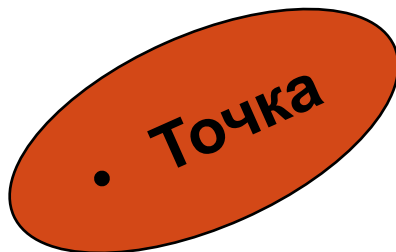
- множество
- элемент
- операции над множествами

Ключевые слова:

- множество
- элемент (объект) множества
- принадлежность
- подмножество
- включение
- мощность
- пустое множество
- универсум
- булеан
- объединение
- пересечение
- дополнение

Понятие множества

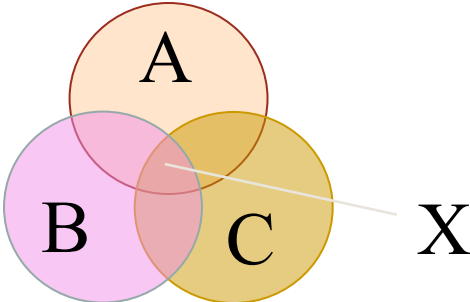
*Множество есть многое,
мыслимое как единое
Г. Кантор*



- Множество является **первичным** понятием
- Множество рассматривается как совокупность объектов той или иной природы
- Объекты, которые образуют множество, называются его **элементами**

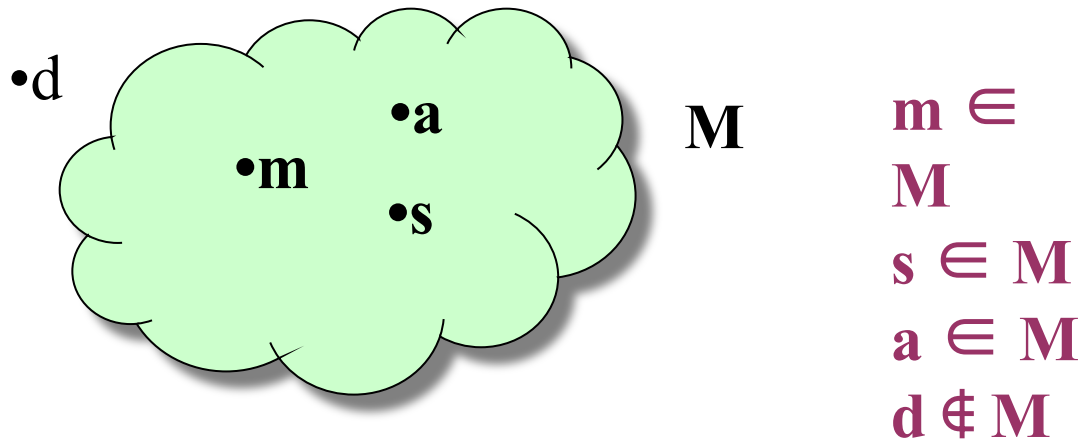
Некоторые способы задания множеств



Способ	Пример
Перечисление элементов	$\{a,b,c\}, A=\{1,3,5,7\}$
Характеристическое свойство $A=\{a \mid a, \text{ обладающие свойством } Q\},$ $M=\{x \mid P(x)\}$	$A=\{x \mid x=2k, k \in \mathbb{N}\};$ $M=\{x \mid \sin x = 1\}$
Порождающая процедура (операции над множествами)	$X=(A \cup B) \cap C$
Графически при помощи диаграмм Эйлера	

Отношение принадлежности

- Отношение **принадлежности** устанавливает связь между множеством и его элементами
- Объект принадлежит множеству, если он является его элементом
- Принадлежность элемента x множеству X обозначается при помощи символа \in : $x \in X$
- **Пример**



Отношение включения

- Устанавливает связь между двумя множествами:

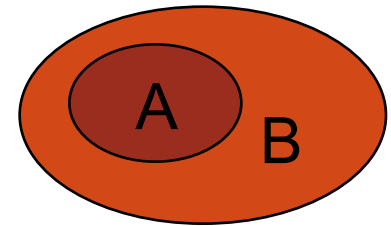
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall m \in A \Rightarrow m \in B$$

- Обозначение:

\subset – строгое включение;

\subseteq – нестрогое включение

- A – подмножество множества B
- B – надмножество множества A
- Множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов



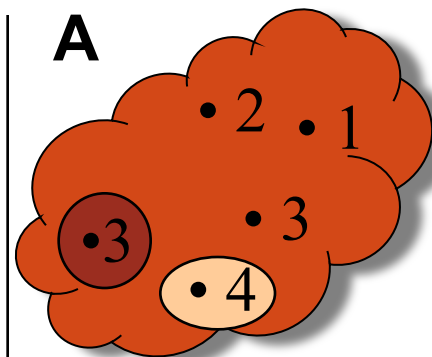
$A \subset B$

Отношения принадлежности и включения: пример

Дано множество $A = \{1, 2, 3, \{3\}, \{4\}\}$.

Какие из следующих утверждений верны?

- $2 \in A$ верно, так как в множестве A есть элемент 2;
- $\{1, 2\} \subset A$ верно, так как в множестве A есть элементы 1, 2, т.е. $1 \in A, 2 \in A$;
- $3 \in A$ верно, так как в множестве A имеется элемент 3;
- $\{3\} \in A$ верно, поскольку в множестве A есть элемент $\{3\}$;
- $4 \in A$ – неверно, так как в множестве A нет элемента 4;
- $\{4\} \in A$ – верно, так как в множестве A имеется элемент $\{4\}$;
- $\{4\} \subset A$ – неверно, поскольку в множестве A нет элемента 4.



$2 \in A$

$\{1, 2\} \subset A$

$3 \in A$

$\{3\} \in A$

$4 \notin A$

$\{4\} \in A$

$\{4\} \not\subset A$

Time Out



Мощность множества.

Пустое и универсальное множества

- **Мощность множества** или **кардинальное число** определяет количество элементов данного множества
- Обозначения: $|M|$, $\text{card } M$
- **Пустое множество** \emptyset не содержит ни одного элемента:

$$|\emptyset|=0$$

- **Универсальное множество** U – надмножество всех множеств:

$$\emptyset \subseteq M \subseteq U$$

Булеан. Мощность булеана

- **Булеан** – множество всех подмножеств данного множества M
- Обозначение: $B(M)$
- **Пример**: дано множество $A=\{a,b,c\}$. Найти $B(A)$.

$$B(A)=\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$$

- **Мощность булеана** определяется по формуле:
$$|B(M)|=2^{|M|}$$
- Пустое множество и само множество являются **несобственными** подмножествами множества M
- Остальные подмножества – **собственные**





Операции над множествами

Название операции	Определение	Диаграммы Эйлера
Пересечение	$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$	
Объединение	$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$	
Разность	$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$	
Дополнение	$\bar{A} = U \setminus A = \{ x \mid x \in U \text{ и } x \notin A \}$	
Симметрическая разность	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	

Законы и тождества алгебры множеств Кантора. 1



Название	Формула
Коммутативность	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
Ассоциативность	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Дистрибутивность	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Идемпотентность	$A \cap A = A, A \cup A = A$
Действия с константами	$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U, A \cap U = A$
Закон противоречия	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Закон исключенного третьего	$A \cup \bar{A} = U$
Инволюция	$\bar{\bar{A}} = A$

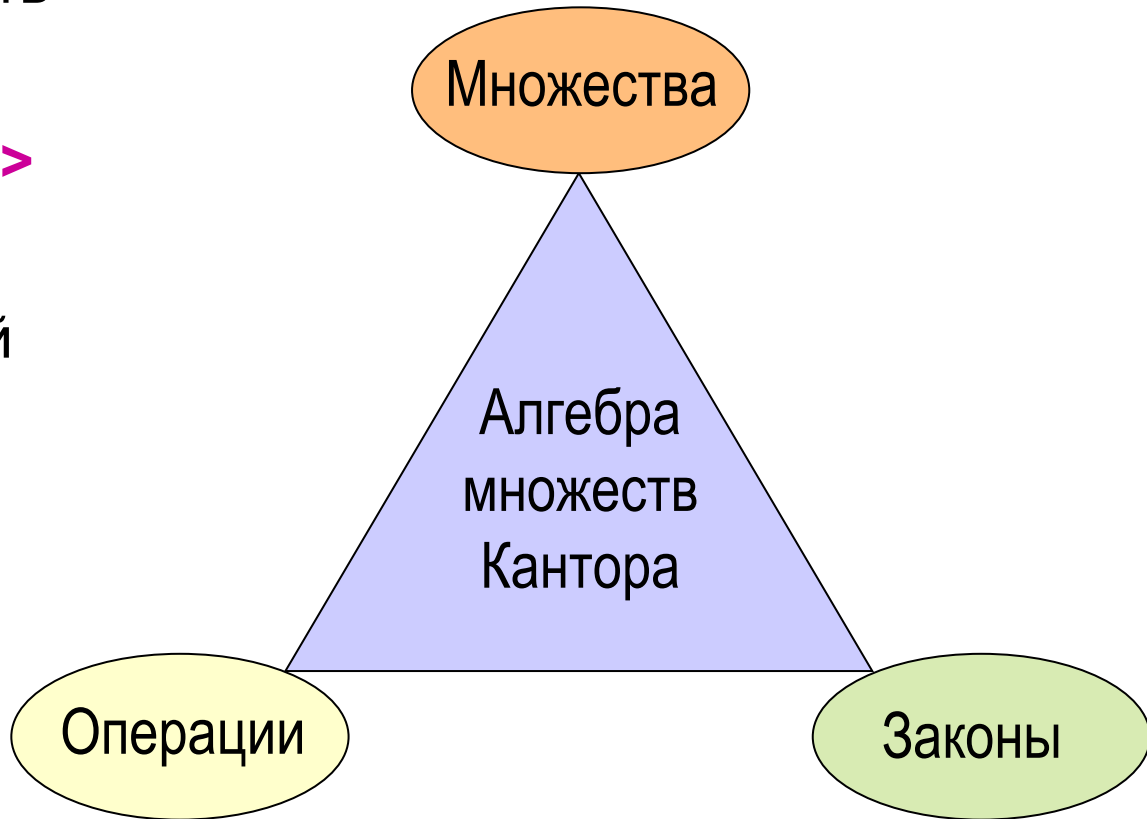
Законы и тождества алгебры множеств Кантора. 2



Название	Формула
Закон де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Элиминация	$(A \cup B) \cap A = A, (A \cap B) \cup A = A$
Склеивание	$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A, (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
Законы Блэйка-Порецкого	$A \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B, A \cup (A \cap \overline{B}) = A \cup B$ $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B, A \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cup B$
Формулы для определения мощности	$ A \cup B = A + B - A \cap B ,$ $ A \cap B = A + B - A \cup B $

Алгебра множеств Кантора. Выводы

- **Алгебра** – совокупность носителя и сигнатуры
- Обозначение: $A = \langle N, S \rangle$
- Замкнутость относительно операций
- Алгебра множеств Кантора:
носитель – множества,
сигнатура – набор операций
- Обозначение: $A_k = \langle N_k, S_k \rangle$



Тест-вопросы

1. Могут ли повторяться элементы множества?
а) да; б) нет
2. Является ли множество несобственным подмножеством самого себя?
а) да; б) нет
3. Множества равны, если они содержат
а) одни и те же элементы;
б) одинаковое количество элементов.
4. Являются ли понятия мощность и кардинальное число идентичными?
а) да; б) нет.
5. Определить мощность булеана множества $F = \{a, \{d, c\}\}$:
а) $|B(F)| = 2$;
б) $|B(F)| = 4$;
в) $|B(F)| = 0$;
г) $|B(F)| = 3$.