

А. Б. ШУР

**Не роскошь, а хлеб насущный
- МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЧАЙНИКОВ**

Алчевск, 2008

4

Список сокращений

КП – коэффициент передачи, он же производная

КПЧС – коэффициенты передачи частных связей,
они же частные производные

МСС – метод структурных схем

ОС – обратная связь

РКП – результирующий коэффициент передачи,
он же полная производная

ТАУ – теория автоматического управления

ЧСС – число степеней свободы

Глава 4. Техника дифференцирования и интегрирования

4.1. Два замечательных предела

Два «замечательных предела», рассматриваемые здесь, имеют ключевое значение для многих математических выводов. С их помощью аналитические выражения для некоторых производных выводятся независимо от других формул дифференцирования. Их мы рассмотрим подробно, заодно на этих примерах познакомившись с общими подходами к вычислению пределов.

Первый замечательный предел

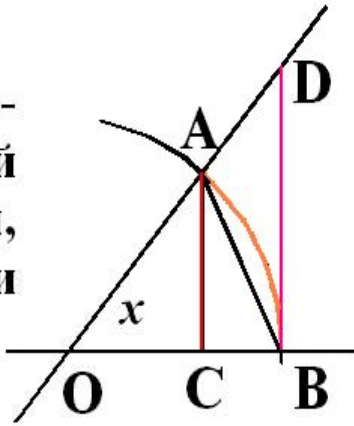
есть предел отношения $\frac{\sin x}{x}$
при $x \rightarrow 0$.

Для его определения рассмотрим рис. 4.1. Построим дугу окружности радиусом R с центром O и проведем через центр горизонтальную и наклонную линии с острым углом x между ними.

Точки **A** и **B** пересечения дуги с линиями соединим между собой и проведем через них вертикальные линии, образовав треугольники **OAB** (с высотой **AC**) и **ODB**. Очевидно, что площадь сектора **OAB** больше площади треугольника **OAB** и меньше площади треугольника **ODB**.

Рис. 4.1.

К выводу соотношений между дугой, синусом и тангенсом



С другой стороны, эти площади составляют:
 площадь **треугольника OAB** = $(R^2 \cdot \sin x)/2$;
 площадь **сектора OAB** = $R^2 \cdot x/2$;
 площадь **треугольника ODB** = $(R^2 \cdot \operatorname{tg} x)/2$;
 отсюда можем составить цепочку неравенств:
 $\sin x < x < \operatorname{tg} x$;

разделив все ее элементы на $\sin x$, получим: $1 < x/\sin x < 1/\cos x$,

а взяв от них обратные величины, окончательно имеем: $\cos x < \sin x / x < 1$.

Поскольку косинус – непрерывная функция, а при $x = 0$ ее значение равно 1, при уменьшении x до 0 среднее звено цепочки имеет своим пределом 1, или, в формальной записи, окончательно имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Второй замечательных предел –

предел выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при стремлении **n**

к бесконечности, принятый за основание натуральных логарифмов – число **e**. Для его вычисления нам понадобится формула бинома Ньютона :

$$(1+b)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot b^3 + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot b^k + \dots$$
$$0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Применив ее к формуле частичной суммы S_n для вычисления e, получим:

$$S_n = 1 + \frac{n}{n \cdot 1!} + \frac{n \cdot (n-1)}{n^2 \cdot 2!} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i) \dots (n-k+1)}{n^k \cdot k!} + \dots$$

В каждом слагаемом показатель степени при n в знаменателе равен числу сомножителей в числителе. При делении каждого сомножителя на n он приводится к виду $(1-i/n)$, а в знаменателе остается только факториал. При замене каждого такого двучлена на 1 все выражение принимает вид:

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Заведомо можно утверждать:

- 1) при замене двучленов единицами числители возрастают, и $e_n > S_n$;
- 2) с увеличением n величина S_n растет, поскольку возрастает величина каждого члена и увеличивается их число;
- 3) с переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$ ряд S_n превращается в e_n .

Отсюда следует, что если предел e_n существует, то он является и пределом для S_n и искомым значением e . Оценим его границы. Прежде всего, из выражения для e_n следует, что $e > 2$. Далее, завысим значения всех членов, начиная с третьего, заменив факториалы в их знаменателях степенями двойки. Тогда имеем:

$$e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \dots = 2 + s$$

где $s = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$ – сумма убывающей геометрической прогрессии с начальным членом $1/2$ и знаменателем $1/2$. Тем самым мы установили, что $2 < e < 3$.

Если проделать аналогичную процедуру на одно слагаемое позже, можно использовать степени тройки в знаменателе:

$$e < 2.5 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^k} \dots = 2.5 + s,$$

где $s = \frac{1/6}{1 - 1/3} = 1/4$, отсюда $2.5 < e < 2.75$.

Проделав то же самое еще на одно слагаемое позже, используем степени четверки:

$$e < 2.667 + \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{6 \cdot 4^k} \dots = 2.667 + s,$$

где $s = \frac{1/24}{1 - 1/4} = 1/18$, отсюда $2.667 < e < 2.723$.

Продолжая эту процедуру, увидим, что нижняя граница интервала, заключающего число e , будет все время возрастать, верхняя – уменьшаться, а разница между ними s – уменьшаться, стремясь к нулю. Отсюда следует, что искомый предел существует. Для его вычисления с точностью до 3 (5) знаков после запятой достаточно использовать 7 (9) членов ряда. Искомое значение составляет **2.71828...**

4.2. Дифференцирование элементарных функций

Название раздела не вполне соответствует его действительному содержанию. Дело в том, что функции, обычно именуемые элементарными, на самом деле таковыми не являются. Здесь логика классификации вошла в противоречие с вопросами практического удобства.

Строго говоря, элементарными следовало бы считать те функции, при дифференцировании которых нельзя опереться на правила для других функций. Таких оказывается всего лишь три: линейная, логарифмическая и синус. Выведя для них правила дифференцирования, их затем можно использовать как основу для получения из них всех остальных правил. При этом больше не требуется прибегать к методам теории пределов. Говоря об этом, надо заметить, что вообще при выводе формул дифференцирования многочисленное оперирование предельными переходами используется явно в избыточном количестве. В то же время, приведенный перечень элементарных функций условен. Например, можно обосновать способ дифференцирования синуса, после чего правило для косинуса вывести через него. Но можно с таким же успехом вывести правило для косинуса, а для синуса получить через него. Здесь идет речь лишь о минимальном числе ведущих функций.

Можно применить независимые правила для нескольких ведущих функций, а потом для ряда табличных функций получить выражения через них. И можно выполнить несколько избыточных действий такого рода, чтобы убедиться в том, что, например, для обратной величины предельный переход дает тот же результат, что степенная с показателем минус единица.

1) Производная линейной функции. Уже упоминалось, что для линейной зависимости производная – она же коэффициент передачи – есть величина постоянная, равная угловому коэффициенту: $y = k \cdot x + b$; $y' = k$.

В частности, для постоянной величины, изображаемой на графике горизонтальной линией, $y' = k = 0$.

2) Производная синуса.

При определении производной синуса удобно брать приращение аргумента не одностороннее, а двустороннее, с одинаковым интервалом h влево и вправо от исследуемой точки графика. Тогда

$$\Delta x = 2 \cdot h ; \quad \Delta y = \sin (x + h) - \sin (x - h) =$$

$$= (\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h) - (\sin x \cdot \cos h - \cos x \cdot \sin h) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin h$$

;

$$\Delta y / \Delta x = (2 \cdot \cos x \cdot \sin h) / (2 \cdot h) = \cos x \cdot \sin h / h ;$$

Отношение $\sin h / h$ есть первый замечательный предел, равный **1** при стремлении аргумента к нулю, поэтому окончательно имеем

$$dy/dx = \cos x .$$

Производная синуса равна косинусу того же аргумента.

3) Производная натурального логарифма:

$y = \ln x$; введем промежуточное обозначение $t = x/\Delta x$. Тогда

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln((x + \Delta x)/x) = \ln(1 + \Delta x/x) = \ln(1 + 1/t),$$

$$\text{или } \Delta y/\Delta x = (1/\Delta x) \cdot \ln(1 + 1/t) = (t/x) \cdot \ln(1 + 1/t) = (1/x) \cdot \ln(1 + 1/t)^t.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $t \rightarrow \infty$,

и видно, что выражение под знаком логарифма есть второй замечательный предел – число e – основание натуральных логарифмов. По определению, $\ln e = 1$, и тогда окончательно:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\ln e}{x} = \frac{1}{x}, \quad \text{или, короче,} \quad y' = \frac{1}{x},$$

или

**Производная натурального логарифма
есть обратная величина аргумента.**

4) Производная обратной величины.

$$y = \frac{1}{x};$$

Вычисляем разность приращенного и исходного значений функции:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x \cdot (x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)};$$

Делим на приращение аргумента и переходим к пределу:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x \cdot (x + \Delta x) \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x^2};$$

Производная обратной величины равна минус обратному квадрату аргумента.

Замечание. Обратная величина есть частный случай степенной функции, так что выведение этой формулы является избыточным. Оно, однако, полезно, показывая достижимость одного и того же результата разными путями.

4.3. Функции с одноканальной зависимостью от аргумента

Мы переходим к выводу правил дифференцирования сложных функций, используя правила преобразований структурных схем (см. главу 3) и формулы для дифференцирования трех функций, принятых за основные (см. п. 4.2).

На самом деле, большинство из них сложными не являются, но действия с ними выполняются по единообразным правилам для сложных функций из аппарата МСС.

Функции, рассматриваемые ниже в п. 4.3-4.5, а также и ряд других, относят к элементарным и сводят в справочные таблицы. Вопрос об отнесении их к этой категории есть вопрос практического удобства – что проще: каждый раз выводить формулу заново или иметь длинный перечень табличных формул, требующих запоминания или поиска.

Вывод формул дифференцирования с помощью МСС производится в следующем порядке.

1. Составляем структурную схему для исходной формулы.
2. Определяем коэффициенты передачи частных связей (КПЧС) для всех стрелок схемы.
3. Свертываем схему, определяя ее результирующий коэффициент передачи (РКП) – это и есть искомая производная.

Использование этой методики выявляет не замечавшиеся раньше особенности процедуры. Так, в традиционной схеме не уделяется должного внимания числу каналов влияния аргумента на функцию. При работе с **МСС** становится ясно, что функции полезно классифицировать именно по этому признаку.

1) Дифференцирование функции от функции:

$$u=u(x), \quad y=y(u)=y(u(x));$$

в такой записи y есть внешняя, а u – внутренняя функции. Этот случай уже рассматривался при выводе правила 1, и повторяется здесь для систематизации. Он сводится к схеме с последовательными стрелками:



По правилу 1, $K = k_1 \cdot k_2$, или при дифференцировании функции от функции необходимо КП последовательных стрелок (здесь – производные внутренней и внешней функций) перемножить.

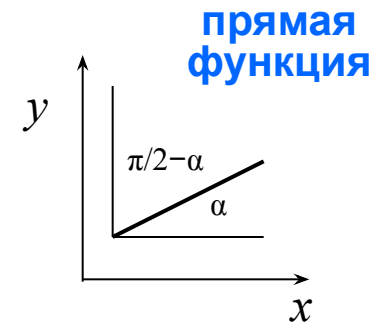
Сравним с традиционным выводом: $dy/dx = dy/du \cdot du/dx = k_2 \cdot k_1$.

Различие в том, что при традиционном способе дифференцирование начинают "снаружи", постепенно проникая "внутри" выражения, а в МСС оно начинается как бы "изнутри" – просто потому, что пользуясь схемой, удобнее двигаться в направлении стрелок – от входа к выходу, а не наоборот. От этого **изменяется порядок следования сомножителей, но, разумеется, не результат.** (Упомянем об этом различии только потому, что оно может смутить начинающих при переходе к другому способу).

2) Производная обратной функции. На схеме переход к обратной функции означает изменение направления стрелки, ее вход и выход меняются местами:

$$x \xrightarrow{k_1} y \qquad x \xleftarrow{k_2} y$$

На графике это означает обмен местами координатных осей с одновременным поворотом и зеркальным отражением. При этом угловой коэффициент для прямой функции есть тангенс угла наклона касательной к горизонтали, а для обратной – котангенс того же угла, или тангенс дополнительного к нему угла. Иными словами, коэффициенты передачи обратной и прямой функций есть взаимно-обратные величины:



$$k_2 = 1/k_1, \quad \text{или} \quad dx/dy = 1/(dy/dx).$$

3) Производная экспоненты (показательной функции)

$$y = e^x .$$

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции.

$$\begin{array}{cc} x \xrightarrow{k_1} y & x \xleftarrow{k_2} y \\ x \xrightarrow{k_1} e^x & \ln y \xleftarrow{k_2} y \end{array}$$

Здесь это $x = \ln y$. Для нее $dx/dy = 1/y$ (см. 4.2, 3), поэтому

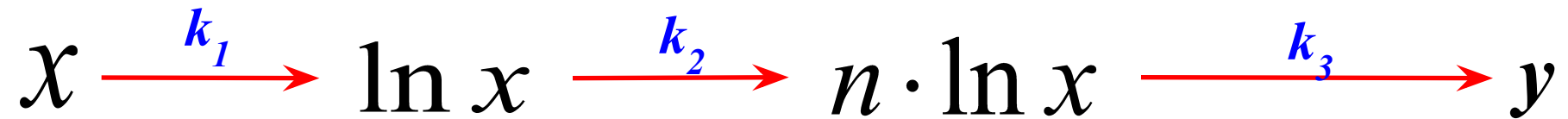
$$y' = dy/dx = y = e^x .$$

Производная экспоненциальной функции с основанием e равна самой функции.

4) Дифференцирование степенной функции: $y = x^n$.

Преобразуем ее к виду: $y = x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \cdot \ln x}$.

Составим для последнего выражения структурную схему и пронумеруем в ней коэффициенты передачи:



определим коэффициенты передачи частных связей, используя уже известные правила для логарифма, линейной функции и экспоненты:

$$k_1 = \frac{1}{x}, \quad k_2 = n, \quad k_3 = y,$$

определим результирующий коэффициент передачи :

$$K = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = \frac{1}{x} \cdot n \cdot y = \frac{1}{x} \cdot n \cdot x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Прокомментируем вывод формулы для степенной функции.

Обычно ее выводят вначале для целых положительных показателей, исходя из свойств произведения. Затем доказывают применимость к дробным и отрицательным показателям. То и другое требует предельных переходов.

Здесь мы получили ее сразу для любых показателей степени, ни разу не прибегая к предельным переходам. Это не значит, что они вообще не нужны: к ним прибегали, получая используемые здесь средства - формулу для логарифма и правила преобразований МСС для функции общего вида.

Определим этим путем производную обратной величины.

$$y' = n \cdot x^{n-1} = (-1) \cdot x^{(-1)-1} = -x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

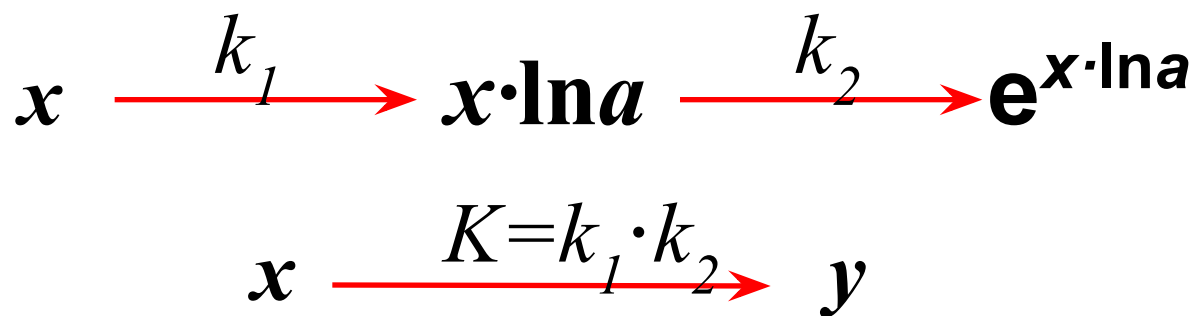
Этот результат нам уже известен из п. 4.2, 4, и там указано на его избыточность.

Попутное замечание: не нужно путать обратную величину и обратную функцию – это совершенно разные вещи.

5) Производная экспоненты с произвольным основанием.

Выразим основание степени через его натуральный логарифм:

$y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$; получаем функцию от функции, для которой составим структурную схему:



Определим для нее коэффициенты передачи частных связей и получим

выражение для искомой производной: $k_1 = \ln a$; $k_2 = y$;

$$y' = K = k_1 \cdot k_2 = (\ln a) \cdot y = (\ln a) \cdot a^x,$$

или $y' = (\ln a) \cdot a^x$.

б) Производная косинуса. Преобразуем косинус в синус дополнительного угла: $y = \cos x = \sin(\pi/2 - x)$, и составим структурную схему для дифференцирования функции от функции :

$$x \xrightarrow{k_1} \pi/2 - x \xrightarrow{k_2} \sin(\pi/2 - x)$$
$$x \xrightarrow{K = k_1 \cdot k_2} y$$

Определим для нее коэффициенты передачи частных связей и получим выражение для искомой производной:

$$k_1 = -1; \quad k_2 = \cos(\pi/2 - x);$$

$$y' = K = k_1 \cdot k_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x,$$

или

$$y' = -\sin x.$$

7) Производная арксинуса:

$$y = \arcsin x.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции.

$$x \xrightarrow{k_1} y$$

$$x \xleftarrow{k_2} y$$

$$x \xrightarrow{k_1} \arcsin x$$

$$\sin y \xleftarrow{k_2} y$$

Здесь это $x = \sin y$. Для нее $dx/dy = k_2 = \cos y$ (см. 4.2, 2),
поэтому

$$y' = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

ИЛИ

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

8) Производная арккосинуса:

$$y = \arccos x.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции.

$$x \xrightarrow{k_1} y$$

$$x \xleftarrow{k_2} y$$

$$x \xrightarrow{k_1} \arccos x$$

$$\cos y \xleftarrow{k_2} y$$

Здесь это $x = \cos y$. Для нее $dx/dy = k_2 = -\sin y$ (см. 4.3, 6),
поэтому

$$y' = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

ИЛИ

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.4. Функции с двухканальной зависимостью от аргумента

(функции от двух функций одного аргумента).

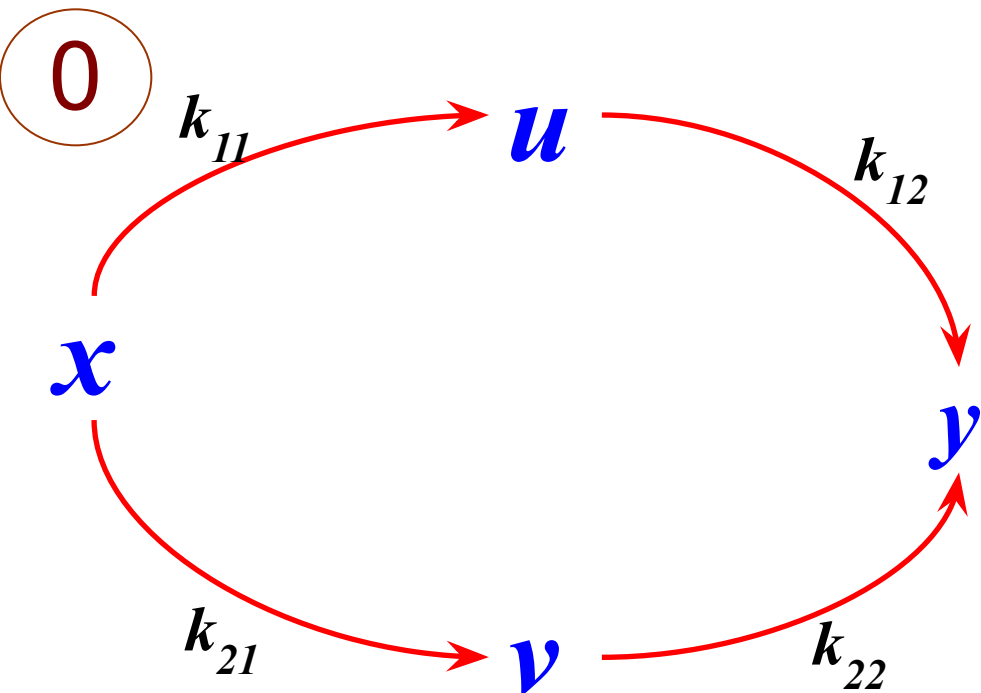
Они соответствуют уже известной нам схеме рис. 1.3, повторенной ниже на рис. 4.1, 4.2. Вывод ряда следующих из нее формул дифференцирования легко унифицируется с помощью таблицы 4.1. В ней рассмотрен ряд функций, разнообразных по виду, и объединенных лишь одним общим признаком – двухканальностью влияния.

Выражение для полной производной (РКП) для них всех

одинаково и имеет вид:
$$K = k_{11} \cdot k_{12} + k_{21} \cdot k_{22}.$$

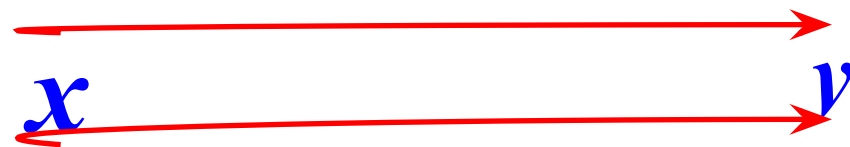
Различаются лишь выражения для входящих в эту формулу коэффициентов передачи частных связей (КПЧС).

Схема дифференцирования «элементарных» функций с двухканальной зависимостью от аргумента. Значения КПЧС см. в шапке таблицы 4.1.



Показаны два этапа свертывания схемы

1 $k_{11} \cdot k_{12}$



2 $k_{11} \cdot k_{12} + k_{21} \cdot k_{22}$

x y

$k_{21} \cdot k_{22}$

Пример функции с двухканальной зависимостью от аргумента

$$k_{11} = \cos x$$

sin x

$$k_{12} = 1/\cos x$$

x

tg x

$$k_{21} = -\sin x$$

cos x

$$k_{22} = -\sin x/\cos^2 x$$

$$k_{11} \cdot k_{12} = 1$$

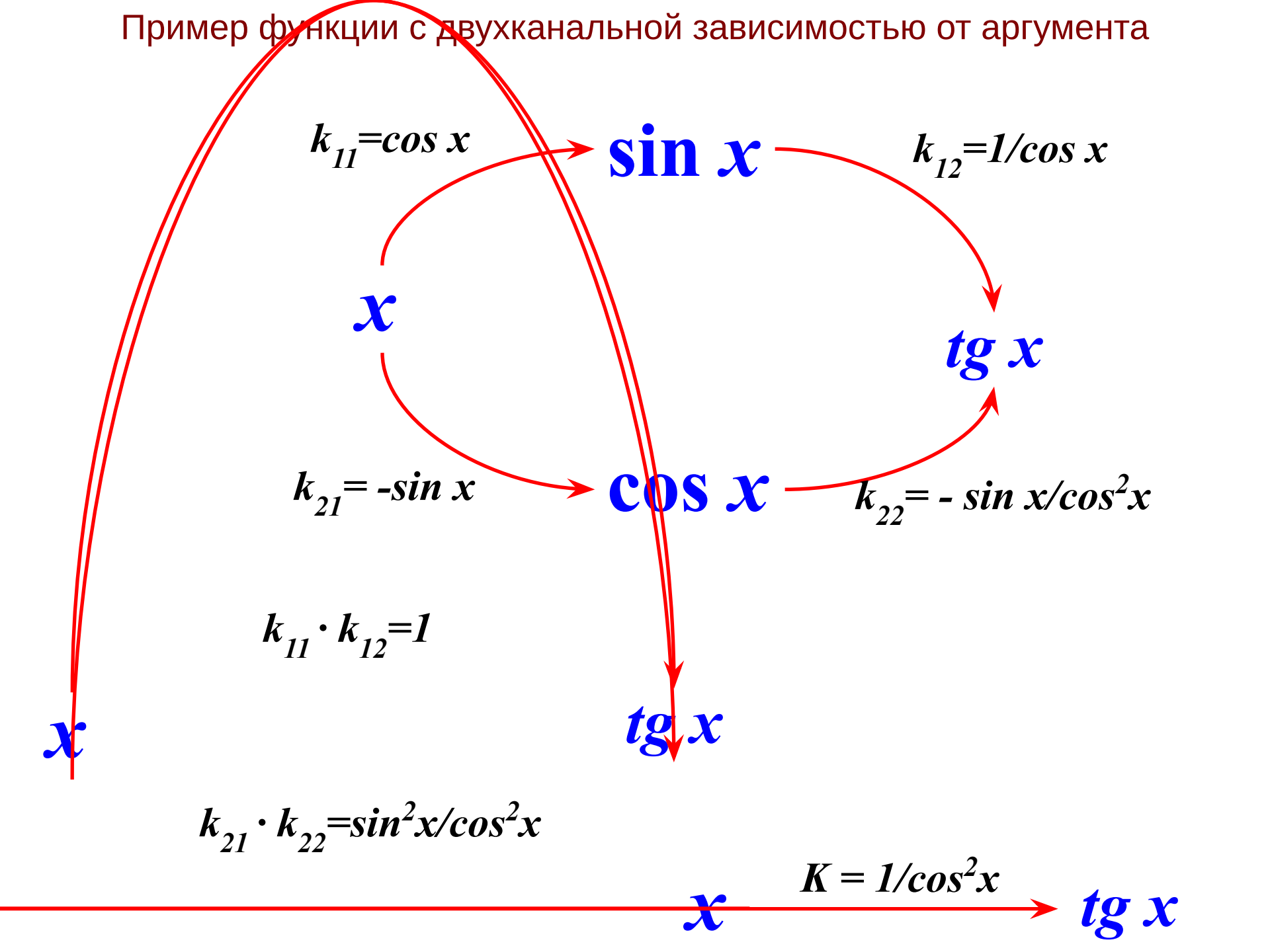
tg x

$$k_{21} \cdot k_{22} = \sin^2 x/\cos^2 x$$

$$K = 1/\cos^2 x$$

x

tg x



В таблице приведены разновидности указанных функций, и для каждой – выражения для всех четырех **КП** частных связей, их промежуточных попарных произведений и искомого **РКП**. Входящие в таблицу промежуточные выражения были рассмотрены ранее либо рассматриваются в ней самой. В целом порядок вывода ясен из таблицы.

Первые три строки содержат формулы для дифференцирования суммы, произведения и дроби. Формулы для суммы и произведения аналогичным способом легко обобщаются на любое число слагаемых или сомножителей: для этого нужно хотя бы мысленно построить схему с нужным числом каналов.

Формула для разности не приведена, она отличается от формулы для суммы лишь знаком минус у коэффициента k_{22} .

Формула для тангенса представляет собой частный случай формулы для дроби.

В конце таблицы даны формулы для показательно-степенной функции, у которой переменны и основание, и показатель степени, являющиеся функциями одного аргумента, а затем для ее частного случая, где обе эти функции совпадают с аргументом. Здесь дифференцирование по первому каналу ведется как для степенной, а по второму – как для показательной функции.

Обратим внимание на то, что для этих двух строк применение МСС особенно облегчает процедуру вывода формул, выявляя аналогию с остальными строками таблицы. В обычном исполнении они представляют серьезную трудность для начинающих.

Табл. 4.1. Вывод формул дифференцирования для функций с двухканальной зависимостью от аргумента
 $y = f(u(x), v(x))$

$f(u, v)$	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	$k_{11} \cdot k_{12}$	$k_{21} \cdot k_{22}$	$K = k_{11} \cdot k_{12} + k_{21} \cdot k_{22}$
$u+v$	u'	1	v'	1	u'	v'	$u' + v'$
$u \cdot v$	u'	v	v'	u	$u' \cdot v$	$u \cdot v'$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	u'	$\frac{1}{v}$	v'	$-\frac{y}{v}$	$\frac{u'}{v}$	$-\frac{v' \cdot y}{v}$	$\frac{u' - v' \cdot y}{v}$

Тангенс - частный случай дроби: $u = \sin x$, $v = \cos x$

$\operatorname{tg} x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos x}$	$-\sin x$	$-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	1	$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
-----------------------	----------	--------------------	-----------	----------------------------	---	-----------------------------	----------------------

Показательно - степенная функция и ее частный случай

u^v	u'	$v \cdot u^{v-1}$	v'	$u^v \cdot \ln u$	$u' \cdot v \cdot u^{v-1}$	$v' \cdot u^v \cdot \ln u$	$u^{v-1} \cdot (u' \cdot v + v' \cdot u \cdot \ln u)$
x^x	1	$x \cdot x^{x-1}$ $= x^x$	1	$x^x \cdot \ln x$	x^x	$x^x \cdot \ln x$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$

4.5. Продолжение дифференцирования функций с одноканальной зависимостью от аргумента (после рассмотрения тангенса по двухканальной схеме)

7) Производная арктангенса:

$$y = \text{arc tg } x.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & y \\ x & \xrightarrow{k_1} & \text{arc tg } x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xleftarrow{\quad} & y \\ \text{tg } y & \xleftarrow{k_2} & y \end{array}$$

Здесь это $x = \text{tg } y$. Для нее $dx/dy = k_2 = 1/\cos^2 y$ (см. 4.4, 4), поэтому

$$y' = \frac{1}{dx/dy} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\text{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

ИЛИ

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

8) Производная котангенса. Преобразуем котангенс в тангенс дополнительного угла: $y = \text{ctg } x = \text{tg}(\pi/2 - x)$, и составим структурную схему для дифференцирования функции от функции :

$$x \xrightarrow{k_1} \pi/2 - x \xrightarrow{k_2} \text{tg}(\pi/2 - x)$$
$$x \xrightarrow{K = k_1 \cdot k_2} y$$

Определим для нее коэффициенты передачи частных связей и получим выражение для искомой производной:

$$k_1 = -1; \quad k_2 = 1/\cos^2(\pi/2 - x);$$

$$y' = K = k_1 \cdot k_2 = \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

ИЛИ

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9) Производная арккотангенса:

$$y = \text{arc ctg } x.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{k_1} & y \\ x & \xrightarrow{k_1} & \text{arc ctg } x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xleftarrow{k_2} & y \\ \text{ctg } y & \xleftarrow{k_2} & y \end{array}$$

Здесь это $x = \text{ctg } y$. Для нее $dx/dy = k_2 = -1/\sin^2 y$ (см. 4.5, 8),
поэтому

$$y' = \frac{1}{dx/dy} = -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{\text{ctg}^2 y + 1} = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

ИЛИ

$$y' = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

4.5. Итоговые замечания

Функции, рассмотренные в данной главе, обычно называют элементарными, а формулы их дифференцирования сводят в справочные таблицы. Каждую из них при описании сложных систем можно изображать одной стрелкой, а **КП** выражать одной формулой. На самом деле большинство из них имеет собственную структуру, а правила дифференцирования для них выводятся из правил для других функций. Следовательно, они относятся к категории сложных (при всей их практической простоте). Именно поэтому для их дифференцирования оказалось возможным использовать **МСС**. Как видим, само понятие элементарности условно, и лишь из соображений практического удобства (а не четкой классификации) их считают элементарными, а формулы дифференцирования – табличными.

По-настоящему как с элементарными мы действовали с функциями линейной, натуральным логарифмом и синусом (и избыточно с обратной величиной); формулы дифференцирования остальных выведены в конечном счете через них.

При дифференцировании остальных "элементарных" функций использование МСС унифицирует и упрощает процедуру, особенно при двухканальной зависимости от аргумента, а также обеспечивает преемственность между выводом основных формул и их дальнейшим использованием.

Заметим, что при выводе формул дифференцирования не потребовалось правило **3**, поскольку среди функций, относимых к элементарным, отсутствуют неявно заданные.

Продолжение следует . . .