Элементы теории вероятностей

По материалам учебника
Гнеденко Б.В. «Курс теории вероятностей»,
7-е издание, 2001

На чем основана теория информации?

Теория информации

Теория вероятностей

Теория множеств

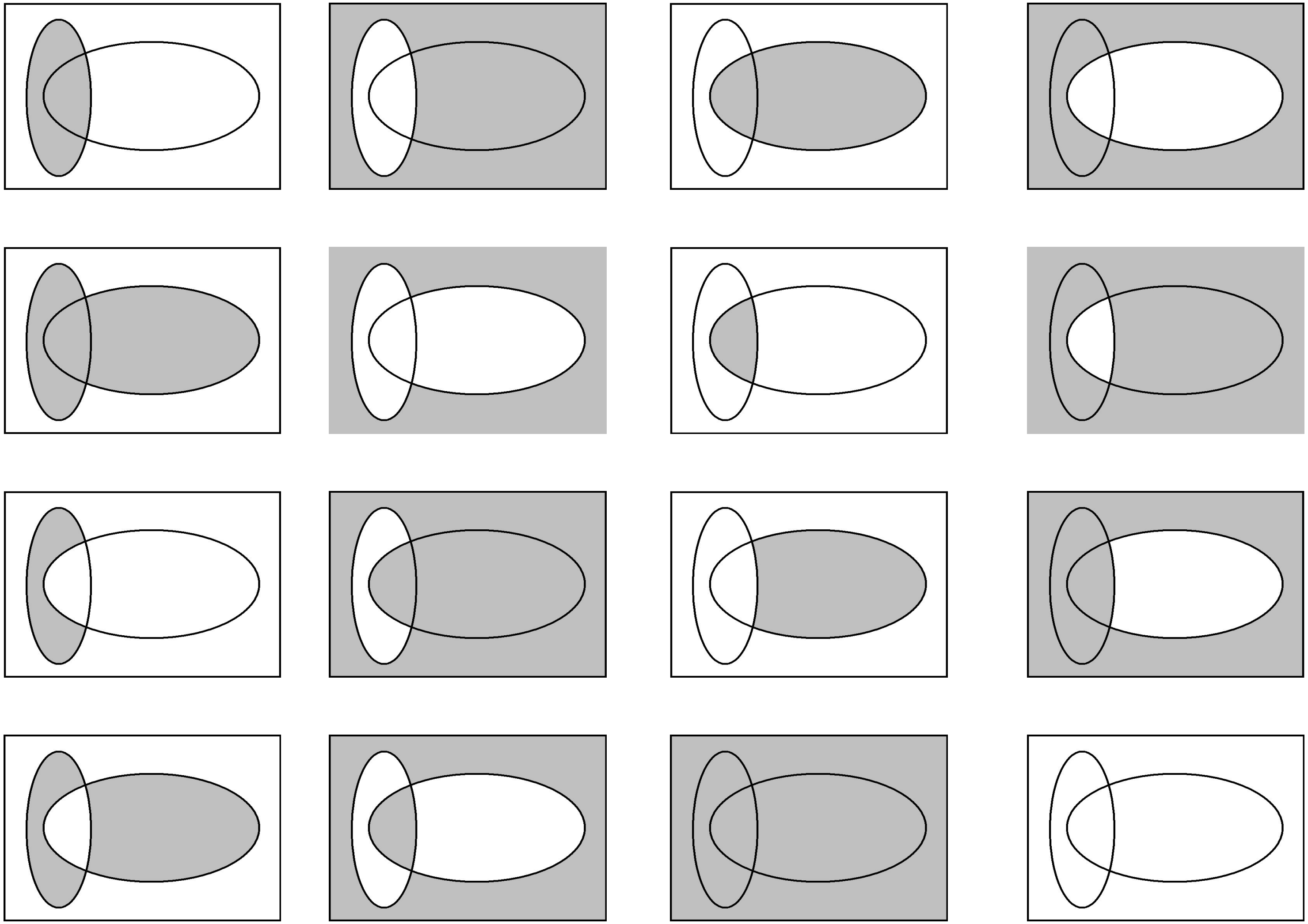
Алгебра теории множеств

«Математический энциклопедический словарь» (Москва, Советская энциклопедия, 1988, с. 380.)

- Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

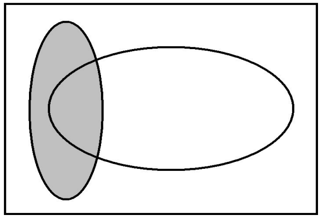
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Все эти операции над множествами описываются тремя операциями:

- Операцией объединения;
- Операцией пересечения;
- Операцией отрицания.

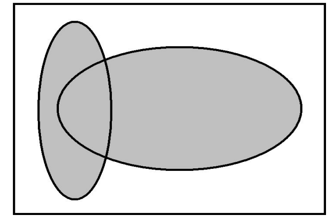
Операции над множествами:



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

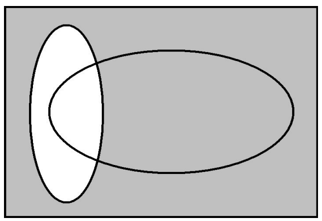
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

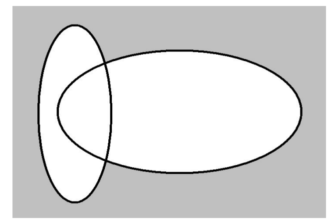
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

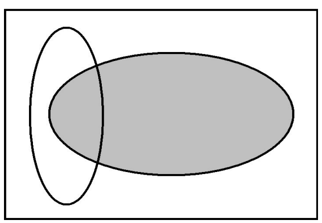
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

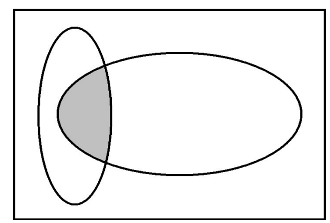
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математическ понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющи данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книг данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

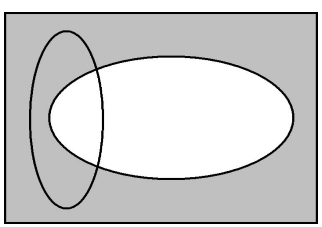
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще н



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

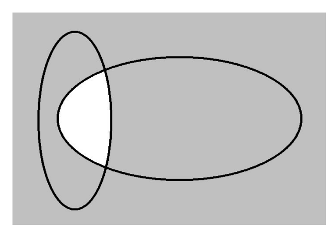
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

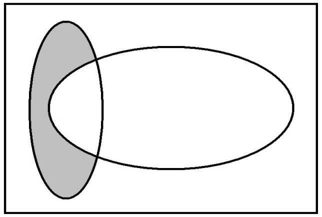


Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

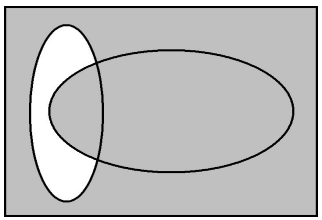
Операции над множествами:



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

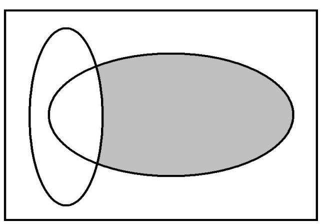
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

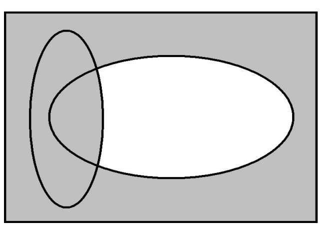
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

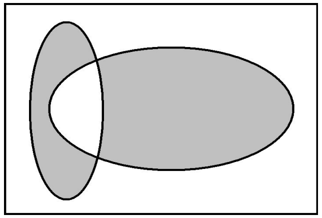


Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

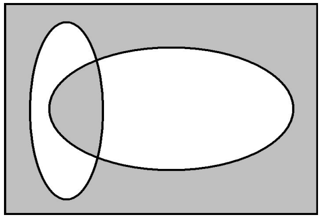
Операции над множествами:



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

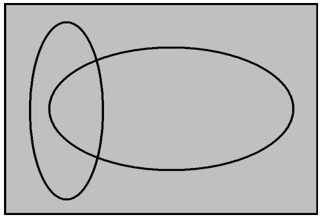
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

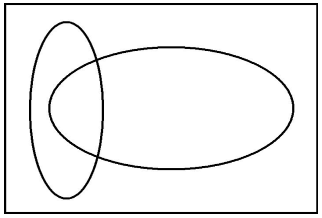
«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»



Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

Все операции над множествами описываются тремя операциями:

•Операцией объединения;

•Операцией пересечения;

•Операцией отрицания.

Но поскольку операцию объединения можно выразить через операции:

•Операцией пересечения;

•Операцией отрицания:

Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

То и все операции над множествами описываются двумя операциями:

•Операцией пересечения;

•Операцией отрицания.

Эта идея реализована во всех компьютерах, в центральных процессорах которых аппаратно реализованы лишь две логические операции: отрицания и конъюнкции.

Что такое алгебра?

- Алгебра в современном понимании может быть определена как наука о системах объектов той или иной природы, в которых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции называются алгебраическими операциями.
- Для современной алгебры характерно то, что в центре внимания оказываются свойства операций, а не объектов, над которыми проводятся эти операции.

Ассоциативность

- Ассоциативность (от позднелат. Assotiatio – соединение) сочетательность, сочетательный закон, – свойство сложения или умножения чисел:
  $(a + b) + c = a + (b + c)$,
  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- В общем смысле операция * называется ассоциативной, если
  $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- Свойством ассоциативности обладает умножение матриц, подстановок, преобразование; векторное умножение не ассоциативно.

Дистрибутивность

- Дистрибутивность (от лат. Distributivus – распределительный), распределительность, распределительный закон, - свойство, связывающее сложение и умножение чисел и выражающееся тождествами:

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$ (Д1)

  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$ (Д2)

- Если «+» и «·» - произвольные бинарные алгебраические операции, то при выполнении обоих тождеств (Д1) и (Д2) операция «·» называется дистрибутивной относительно операции «+».

Коммутативность

- Коммутативность (от позднелатинского Commutativus – меняющий(ся)), переместительность, переместительный закон, - свойство сложения и умножения чисел, выражаемое тождествами:

  $a + b = b + a$,

  $a \cdot b = b \cdot a$.

- В общем случае бинарная операция * называется коммутативной, если

  $a * b = b * a$.

- Свойством коммутативности обладают, например, сложение и умножение многочленов; векторное умножение и умножение матриц не являются коммутативными.

Классическая теория вероятностей

По материалам учебника
Гнеденко Б.В. «Курс теории вероятностей»,
7-е издание, 2001

Задача о студенте и двух его бабушках.

«Теория вероятностей занимается изучением не любых событий, которые в житейской практике называются случайными, а только тех из них, которые обладают определёнными свойствами».

«Теория вероятностей занимается лишь теми событиями, которые обладают так называемой *статистической устойчивостью* или, иначе, устойчивостью частот».

«Проверка статистической устойчивости представляет собой довольно сложную задачу».

Примеры статистической неустойчивости:

а) число ДТП в 1991 году (результат антиалкогольной компании);

б) прогноз Д.И. Менделеева о 500 миллионах жителей в России к концу 20-го века;

в) колебания рождаемости в России за последние 20 лет;

г) устойчивость статистических параметров речевого сигнала (современные высказывания по Г.С. Рамишвили статистически устойчивы в течение не более получаса).

Если «… испытания производятся в одинаковых условиях, и результаты одних испытаний не оказывают влияния на результаты других…», то говорят, что эти испытания независимы.

«Детерминистические закономерности можно рассматривать как частный случай стохастических, для которых вероятность *p* равна 0 или 1. Таким образом, стохастические закономерности являются более широкими, чем детерминистические, и позволяют точные, количественные методы применять и в тех случаях, когда о классическом детерминизме не может быть и речи».

«Вероятность того,
что при осуществлении определённого комплекса условий
произойдёт событие A,
равна p.»
Будем записывать:
p(A)

«Пусть при каждом испытании единственно возможны n *несовместимых и равновозможных* исходов $E_1, E_2, \dots E_n$. Каждый такой исход будем называть *элементарным событием»*.

Теория множеств - «учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров».

«Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии. Книги данной библиотеки, точки данной линии являются элементами соответствующего множества».

«Чтобы определить множество, достаточно указать характеристическое свойство элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывается так $x \in M$: (читают: x принадлежит множеству M)»

«Событие называется достоверным, если оно с необходимостью должно произойти (при каждой реализации определённого комплекса условий).
Например, при бросании двух игральных костей достоверно то, что сумма очков будет не меньше двух… Все достоверные события равносильны между собой. Все невозможные события тоже равносильны между собой».

«Два события A и B называются несовместимыми, если их совместное появление невозможно»

Бросаем 2 кубика.
Какова вероятность выпадения одинаковых значений?
Чётной суммы?
Суммы, равной 7.
Суммы больше 7, но меньше 9? …

Какова вероятность угадать слово в игре «Миллионер»?
А после удаления двух неверных версий?

Игра в угадывание задуманного числа от 1 до N.
Игра в угадывание любого слова из русского языка

Игра в морской бой. Какова вероятность с первого хода:
- «ранить»;
- «убить»;
- «промазать»?
Рассмотреть ветвление этих событий на втором ходе.

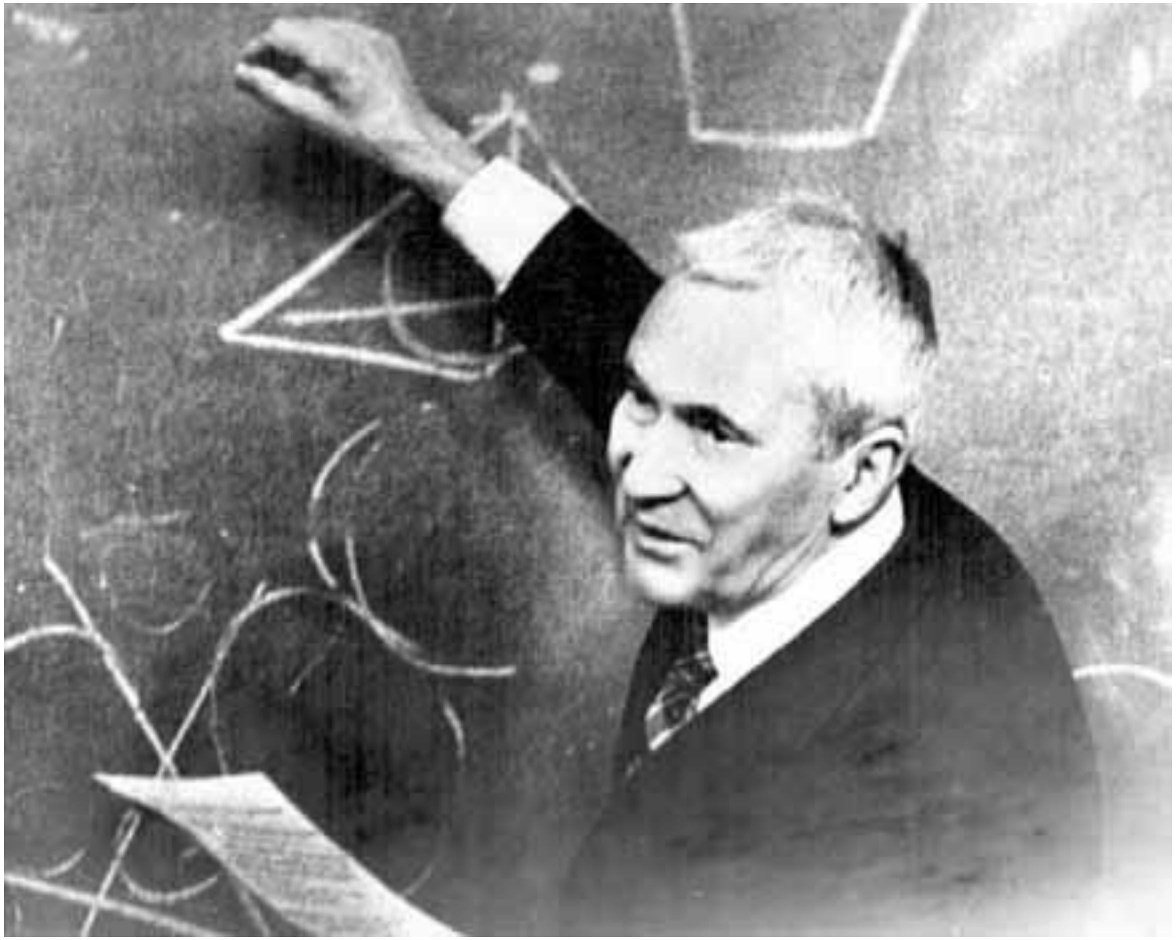
Какую букву надо называть первой в игре «Поле чудес»?
А второй?

Пример с бросанием 3- кубиков и выпадением сумм 11 и 12 рассмотреть самостоятельно по учебнику Гнеденко.

Аксиоматическая теория вероятностей

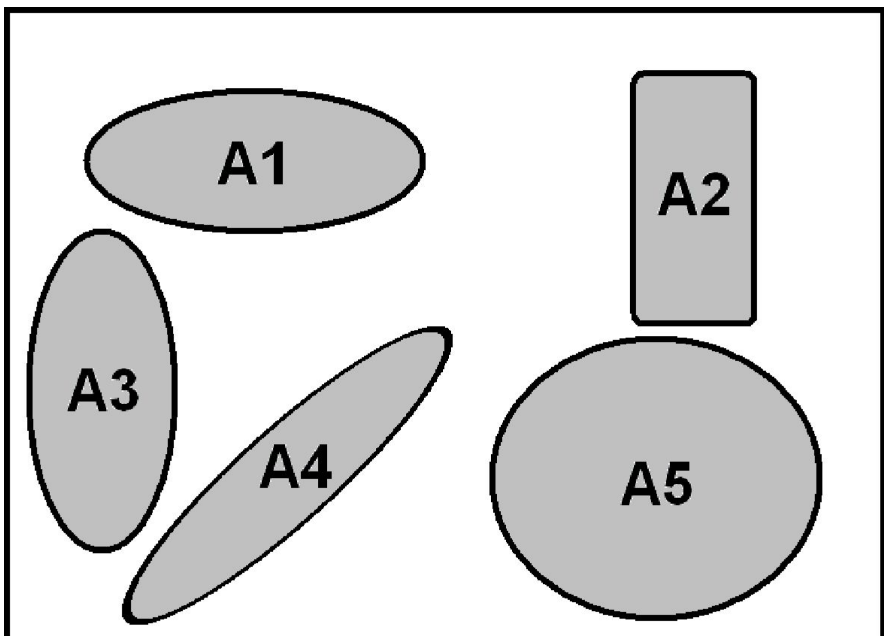
В реальных исследованиях нельзя найти разумный способ выделения «равновозможных случаев» (например, для нахождения вероятности рождения мальчиков).

Аксиоматическое построение теории вероятности предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым (25 апреля 1903 – 20 октября 1987)



Аксиоматическое построение теории вероятности предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым

- Предположим, есть некоторое полное множество всех возможных элементарных событий - Е. Это множество состоит из ряда несовместимых событий: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$



Аксиоматическое построение теории вероятности предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым:

- Аксиома 1. Каждому случайному событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.
- Аксиома 2. $P(E) = 1$.
- Аксиома 3. (аксиома сложения). Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ попарно несовместимы, то $P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n) =$ $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$.

Элементарные следствия аксиом:

1. Вероятность невозможного события равна нулю.

Из очевидного равенства $E = \varnothing + E$

и аксиомы 3 следует, что $P(E) = P(\varnothing) + P(E)$

Элементарные следствия аксиом:

2. Для любого события А

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Элементарные следствия аксиом:

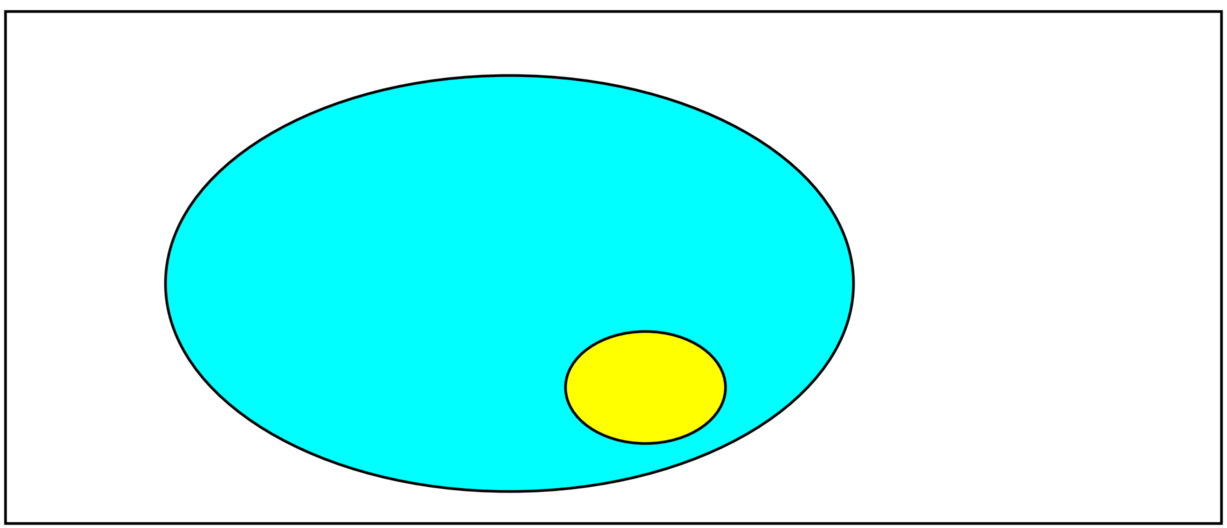
3. Каково бы ни было случайное событие А,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Элементарные следствия аксиом:

4. Если событие A влечет за собой событие B, то

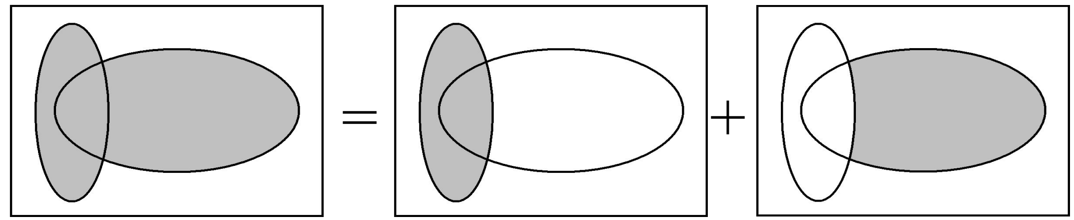
$$P(A) \leq P(B)$$



Элементарные следствия аксиом:

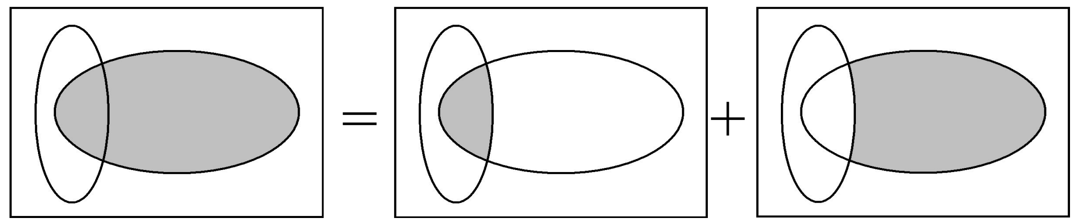
5. Пусть А и В – это два произвольных события. Поскольку в суммах

$$A + B = A + (B - AB)$$



и

$$B = AB + (B - AB)$$



слагаемые являются несовместимыми событиями, то по аксиоме 3 имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B - AB)$$

$$P(B) = P(AB) + P(B - AB)$$

Отсюда следует теорема сложения для произвольных событий А и В:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Условная вероятность и простейшие основные формулы

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Если $P(A) \cdot P(B) > 0,$ то справедлива ***теорема умножения***:

вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Независимость случайных событий

Говорят, что событие А *независимо* от события В, если имеет место равенство:

$$P(A \mid B) = P(A),$$

то есть, если наступление события В не изменяет вероятности события А.

Из предыдущей теоремы умножения:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

следует, что $$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Для независимых событий теорема умножения

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

принимает особенно простой вид, а именно,
если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Формула полной вероятности

Предположим, что событие ***B*** может осуществиться с одним и только с одним и ***n*** несовместимых событий $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n}$. Иными словами положим, что

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$$

События BA_i и BA_j с разными индексами i и j несовместимы. По теореме сложения вероятностей имеем:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Использовав теорему умножения, находим, что

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Пример. Имеется 5 урн:

- 2 урны состава $\boldsymbol{A_1}$ – 2 белых и 1 черный шар;
- 1 урна состава $\boldsymbol{A_2}$ – 10 черных шаров;
- 2 урны состава $\boldsymbol{A_3}$ – 3 белых и 1 черный шар.

Наудачу выбирается урна и из неё наудачу вынимается шар. Чему равна вероятность, что вынутый шар белый (событие ***B***)?

Решение:

$$B = A_1B + A_2B + A_3B$$

По формуле полной вероятности находим, что

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B\mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B\mid A_2) + P(A_3)\cdot P(B\mid A_3)$$

$$P(B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{0}{10} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{17}{30}$$

Формула Байеса

Пусть по-прежнему $B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$. Найти $P(A_i \mid B)$.

По теореме умножения имеем:

$$P(A_i B) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) = P(B) \cdot P(A_i \mid B)$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

Используя формулу полной вероятности, находим, что

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}.$$

Пример. Имеется 5 урн следующего состава:

- 2 урны состава A_1 – 2 белых и 3 черных шара;
- 2 урна состава A_2 – 1 белый и 4 черных шара;
- 1 урны состава A_3 – 4 белых и 1 черный шар.

Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым (событие B). Чему равна апостериорная вероятность того, что шар вынут из урны состава A_3?

Решение: По формуле Байеса имеем

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$