

# Математика

## Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

# Лекция 12

## ДУ высших порядков.

### **1.** Задача Коши для уравнения порядка n.

Требуется найти решение ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

**Теорема Коши** (теорема существования и единственности решения ДУ)

**Т** *Если в уравнении*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  и её частные

производные по аргументам  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$

непрерывны в области, содержащей точку

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

**то** существует единственное решение  $y = y(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Частное решение ДУ (решение задачи Коши) может быть найдено из общего решения по заданным начальным условиям, из которых получают систему уравнений для определения постоянных  $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0, c_1^0, \dots, c_n^0) = y_0, \\ y'(x_0, c_1^0, \dots, c_n^0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0, c_1^0, \dots, c_n^0) = y_0^{(n-1)} \end{array} \right.$$

Решение задачи Коши ДУ n-го порядка имеет вид:

$$y = \varphi(x, c_1^0, \dots, c_n^0).$$

**2.**

## Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

I.  $y^{(n)} = f(x)$ . (правая часть зависит только от  $x$ )

Общее решение получается путем  $n$ -кратного интегрирования:

$$y^{(n)} = \left( y^{(n-1)} \right)',$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x) dx) dx + c_1 x + c_2, \dots,$$

$$y = \int \dots \int f(x) dx \dots dx + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_n.$$

*Пример.*

Найти частное решение ДУ  $y''' = e^{2x}$ ,

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

*Решение.*

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1,$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2,$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

Из начальных условий определяем постоянные

$c_1, c_2, c_3$  :



$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{8} + c_3, \\ -1 = \frac{1}{4} + c_2, \\ 0 = \frac{1}{2} + c_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2}, \\ c_2 = -\frac{5}{4}, \\ c_3 = \frac{7}{8} \end{cases}$$

Частное решение

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}.$$

$$\text{II. } F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

(нет  $y$  и её производных до  $(k-1)$ -го порядка)

Подстановка  $y^{(k)} = P(x)$  понижает порядок уравнения на  $k$  :

$$1) F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$$

если  $P = P(x, C_1, \dots, C_{n-k})$  - общее решение 1),

то  $2) y^{(k)} = P(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$

- ДУ типа I.

## *Пример .*

Найти общее решение ДУ  $xy''' + y'' - x - 1 = 0$ .

### *Решение.*

Уравнение не содержит  $y, y'$ .

Подстановка  $y'' = P(x) \Rightarrow y''' = \frac{dP}{dx}$ .

$P' + \frac{P}{x} = \frac{1}{x} + 1$  - линейное для функции  $P(x)$

Подстановка  $P(x) = u(x)v(x) \Rightarrow$

$$P = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}, \quad y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x},$$

$$y' = \int \left( \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x} \right) dx + c_2 = \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln |x| + c_2,$$

$$y = \int \left( \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln |x| + c_2 \right) dx + c_3,$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x (\ln x - 1) + c_2 x + c_3.$$

III.  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . (Уравнение не содержит  $x$ ).

Подстановка  $y' = P(y)$

$$y'' = \frac{dP(y)}{dx} = \frac{dP}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} P$$

$$y'' = P'(y) \cdot P, \quad y''' = \dots$$

*понижает порядок уравнения на 1.*

**Пример .**

Найти общее решение ДУ  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ .

**Решение.**

Уравнение явно не содержит  $x$ .

Подстановка  $y' = P(y) \rightarrow y'' = \frac{dP}{dy} P$ .

$$P^2 + 2yP'P = 0 \rightarrow P + 2yP' = 0$$

Возможна потеря решения

$$P(y) = \frac{dy}{dx} = 0, y = \text{const}.$$

$$2yP' = -P, \quad \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{2y},$$

$$\ln |P| = -\frac{1}{2} \ln |y| + \ln c_1, \quad P = c_1 y^{-\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{y} dy = c_1 dx,$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1 x + c_2.$$

$$\text{IV. } \frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

(Левая часть уравнения представлена в виде полной производной по  $x$  от некоторой функции.)

Интегрирование *понижает порядок* уравнения на единицу.

*Пример.*

$$xy''' + y'' - x - 1 = 0, \quad y - ?$$

*Решение.*

$$(xy''')' = \left( \frac{x^2}{2} + x \right)' \rightarrow xy'' = \frac{x^2}{2} + x + c_1,$$



$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x} - \text{ДУ типа I.}$$

$$y' = \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln|x| + c_2,$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x (\ln x - 1) + c_2 x + c_3.$$

### **3. Линейные дифференциальные уравнения.**

**Линейным** называется ДУ, содержащее функцию  $y$  и её производные в первой степени.

Линейное дифференциальное уравнение называется неоднородным (**НЛДУ**) если оно имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

где  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $f(x) \neq 0$  – непрерывные функции от  $x$  или постоянные.

Линейное ДУ называется однородным (**ОЛДУ**), если  $f(x) = 0$  .

Рассмотрим ОЛДУ второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Пусть  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$  - частные решения ДУ.

Два решения ДУ  $y_1, y_2$  называются **линейно независимыми**, если их линейная комбинация  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$  лишь в случае когда  $c_1 = c_2 = 0$ .

**( $y_1, y_2$  - линейно зависимы  $\Leftrightarrow y_2 = c y_1$ .)**

*Пример.*

$y_1 = e^x$ ,  $y_2 = 3e^x$  – линейно зависимы,

$y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{-x}$  – линейно независимы.

Для функций  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется **определителем Вронского.**

**T.**

Если функции  $y_1, y_2$  линейно зависимы на  $[a, b]$ , то  $W(y_1, y_2) \equiv 0, x \in [a, b]$ .

*Доказательство:*

$$y_2 = \lambda y_1 \Rightarrow y_2' = \lambda y_1',$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

**Т.** || Если функции  $y_1, y_2$  линейно независимы на  $[a, b]$ , то  $W(y_1, y_2) \neq 0, x \in [a, b]$ .

*Доказательство:*

Допустим  $W(y_1, y_2) = 0, \Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$

Для  $y_1 \neq 0$ :  $\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \Rightarrow \left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = 0 \Rightarrow$

$\frac{y_2}{y_1} = \text{const.}$  Противоречие.  $\Rightarrow W \neq 0.$

**Т.**

Если  $y_1, y_2$  - линейно независимые частные решения ОЛДУ второго порядка

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ , то общее решение этого уравнения равно их линейной комбинации:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

$c_1, c_2$  - произвольные постоянные.

*Доказательство:*

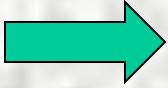
$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Подставим  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  в исходное уравнение:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$



$$c_1 \left( y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 \right) + c_2 \left( y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 \right) = 0,$$

  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  – решение ОЛДУ.

Докажем, что при любых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

можно подобрать  $c_1, c_2$  так, чтобы решение удовлетворяло этим начальным условиям.

Пусть

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20},$$
$$y_1'(x_0) = y'_{10}, \quad y_2'(x_0) = y'_{20}.$$

Подставим начальные условия в  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  :

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_{10} + c_2 y_{20} \\ y_0' = c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' \end{cases} \quad W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0,$$

Т.к.  $y_1, y_2$  - линейно независимы. 

Система уравнений имеет единственное решение

$$c_1, c_2 \cdot$$

Любые два линейно независимых частных решения  $y_1$  и  $y_2$  ОЛДУ второго порядка называются **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Общее решение является линейной комбинацией фундаментальной системы решений:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$



Если известно одно частное решение ОЛДУ второго порядка  $y_1$ , то второе частное решение, линейно независимое с первым, определяется по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx.$$