

Лекция 8

Определённый интеграл.

- 1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.**
- 2. Определённый интеграл как предел интегральной суммы.**
- 3. Свойства определённого интеграла.**

1.

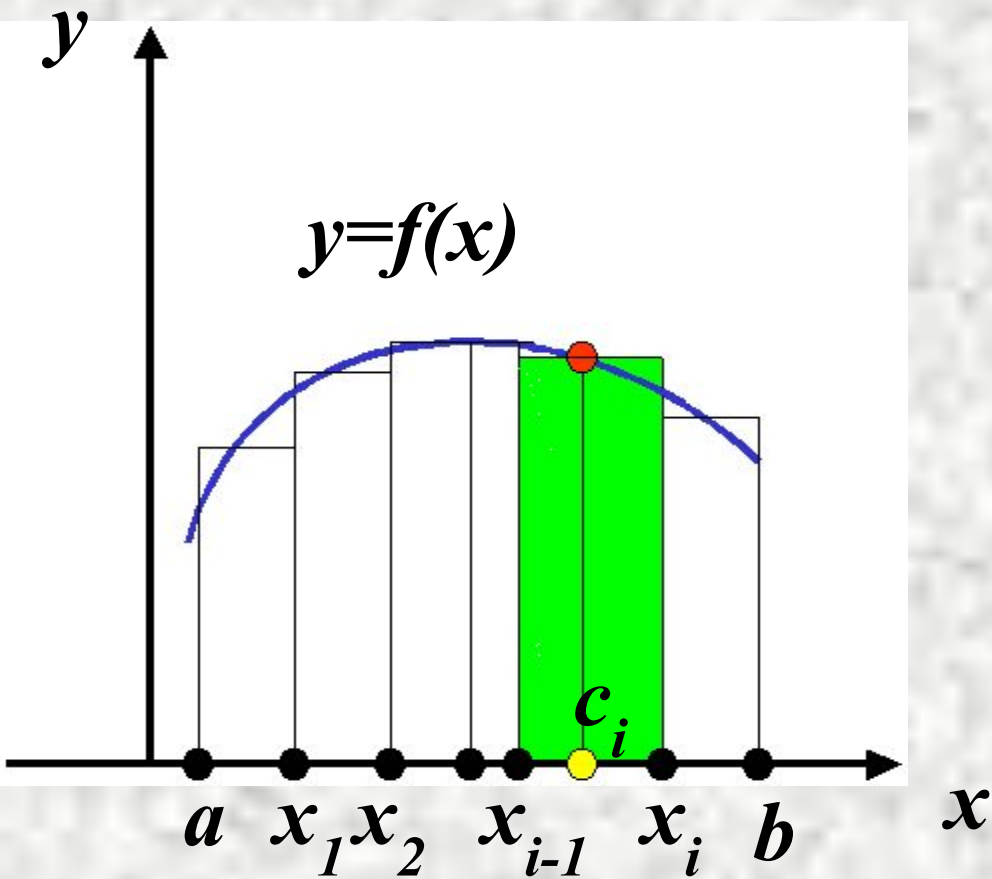
Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

Пусть $f(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция.

Задача — вычислить площадь криволинейной трапеции.

Для её решения разобьём криволинейную трапецию на части точками деления:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



$$\Delta x_1 = x_1 - x_0;$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1;$$

.....

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$S_n = f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \Delta x_n \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Площадь криволинейной трапеции будет равна приближённо сумме площадей прямоугольников:

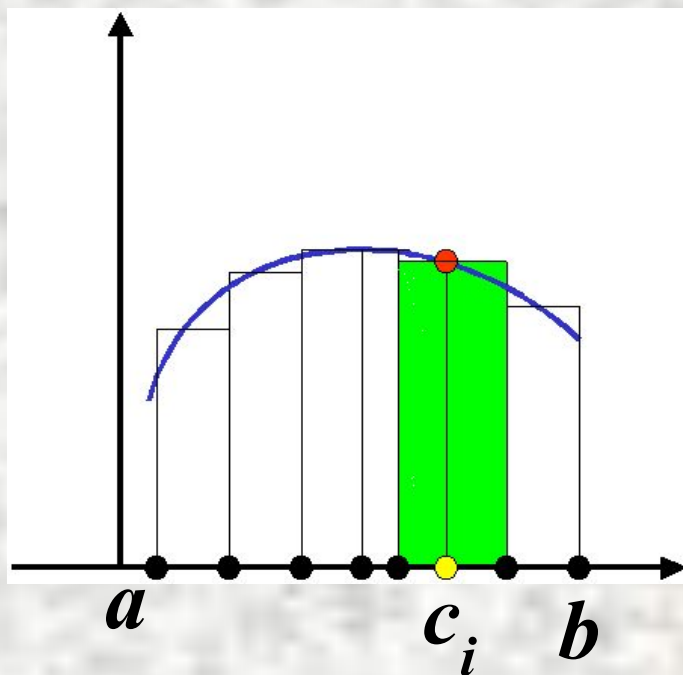
$$S \approx S_n$$

Обозначим $\max \Delta x_i$ - наибольшую из длин отрезков разбиения и рассмотрим такие разбиения отрезка $[a,b]$, при которых $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Тогда

$$S = \lim S_n = \lim \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

- точное значение площади криволинейной трапеции.



2.

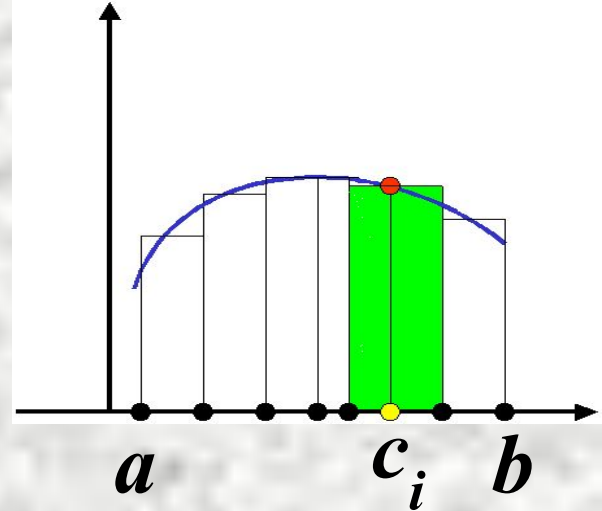
Определённый интеграл как предел интегральной суммы.

Построенные выше суммы вида

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

называются интегральными суммами для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

S_n зависит от способа разбиения $[a, b]$ на части и от выбора точек c_i на элементарном отрезке.



Выбирая разные способы разбиения и разные точки c_i , получаем последовательность интегральных сумм $\{S_n\}$.

Обозначив $\max \Delta x_i$ - наибольшую из длин отрезков разбиения, можно вычислить предел последовательности интегральных сумм при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число, равное пределу последовательности её интегральных сумм

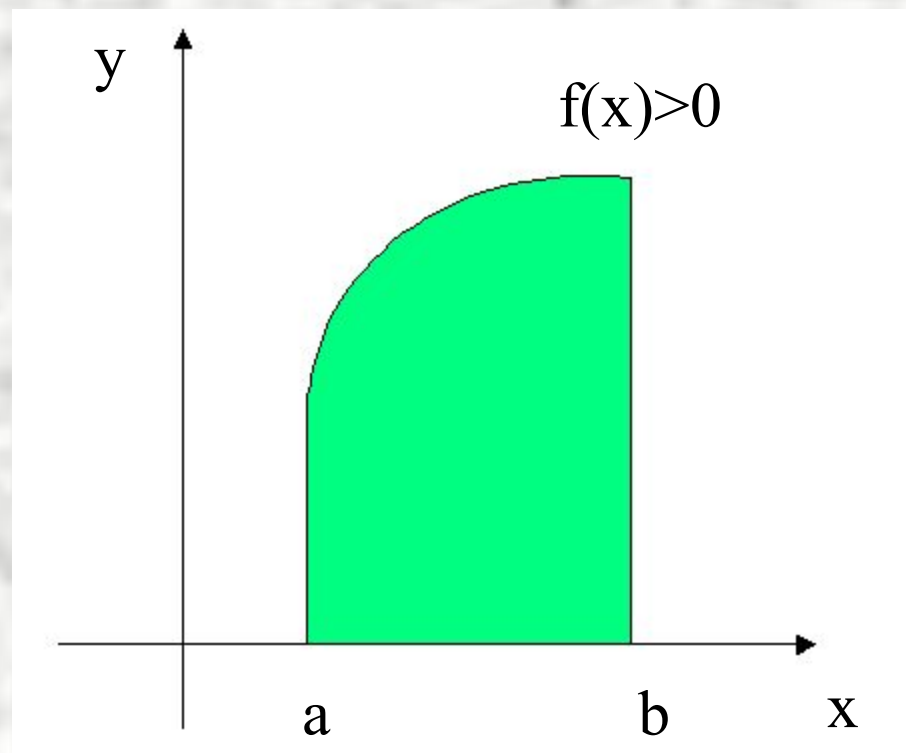
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

a - нижний предел,

b - верхний предел интегрирования.

Если существует $\int_a^b f(x)dx$ то функция $f(x)$
называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$

Геометрический смысл определенного интеграла.



$$\int_a^b f(x) dx = S$$

Теорема существования :



Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

то $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Замечания.

$$1. \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2. \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Свойства определенного интеграла.

1. Независимость величины интеграла от обозначения переменной интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2. Линейность.

$$\int_a^b [Af_1(x) + Bf_2(x)]dx = A \int_a^b f_1(x)dx + B \int_a^b f_2(x)dx$$

3. **Аддитивность** (разбиение на сумму интегралов по частям отрезка).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(между ***a*** и ***b*** можно вставить любое число ***c***)

4. Сохранение знака интеграла .

Т

Если

1) $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$,

2) $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$,

то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

5. Интегрирование неравенств.

Т

Если

1) $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$,

2) $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$,

то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

6. Теорема об оценке интеграла.

Т

Если

1) $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$,

2) m, M - наименьшее и наибольшее значения функции на $[a, b]$,

то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

7. Теорема о среднем.

Т

Если

$f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

то $\exists c \in [a, b]$ такое что

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c)$$

Доказательство: Из теоремы об оценке

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = A, \quad m \leq A \leq M$$

$f(x)$ непрерывна $\Rightarrow$ принимает все промежуточные значения между m и M .

Следовательно, на отрезке $[a, b]$ существует точка c в которой $f(c) = A$:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c).$$

Замечание.

Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число, определяемое по формуле:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b - a)}$$