

# Математика

## Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

# Лекция 7

## Классы интегрируемых функций.

1.

### Интегрирование иррациональных выражений.

#### I. Линейные иррациональности.

$$\int R \left( x, (ax + b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax + b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax + b)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx$$

$(ax + b)^{\frac{m_k}{n_k}}$  - линейная иррациональность,

$R(x, y, z, \dots)$  - дробно-рациональная функция своих аргументов.

## Метод.

Если  $S$  – общий знаменатель дробей

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k},$$

то используется подстановка:

$$t^S = ax + b$$

В результате интеграл сводится к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента  $t$ .

*Пример.*

$$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3 + 1}} dx = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \quad S=4 \right] \boxed{t^4 = 2x-1}$$
$$\left[ 4t^3 dt = 2dx \right] \boxed{dx = 2t^3 dt}$$

$$= \int \frac{t^2 \cdot 2t^3}{t^3 + 1} dt = 2 \int \frac{t^2 (t^3 + 1 - 1)}{t^3 + 1} dt =$$

$$= 2 \int t^2 dt - 2 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{3} \int \frac{d(t^3 + 1)}{t^3 + 1} =$$

$$= \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{3} \ln |t^3 + 1| + C =$$

$$= \frac{2}{3} (2x - 1)^{3/4} - \frac{2}{3} \ln |(2x - 1)^{3/4} + 1| + C;$$

## II. Дробно-линейные иррациональности.

$$\int R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx$$

$\left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}}$  - дробно-линейная иррациональность.

Пусть  $S$  – общий знаменатель дробей

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k};$$

После подстановки

$$t^s = \frac{ax + b}{cx + d}$$

указанный интеграл сводится к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента  $t$  (корни исчезают).

**III. Квадратичные иррациональности.**  
**Тригонометрические подстановки.**

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$  - квадратичная иррациональность,

$R(x, y)$  - дробно-рациональная функция двух аргументов.



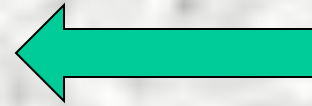
## Метод.

После выделения полного квадрата в квадратном трёхчлене  $ax^2 + bx + c$  и замены

$$u = x + \frac{b}{2a}$$

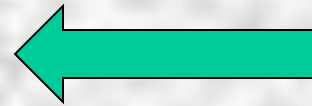
интеграл сводится к одному из трёх типов:

$$I. \int R\left(u, \sqrt{l^2 - u^2}\right) du$$



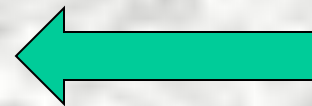
$$u = l \cdot \sin t$$

$$II. \int R\left(u, \sqrt{l^2 + u^2}\right) du$$



$$u = l \cdot \operatorname{tg} t$$

$$III. \int R\left(u, \sqrt{u^2 - l^2}\right) du$$



$$u = \frac{l}{\cos t}$$

После такой замены интеграл сводится к интегралу от тригонометрических функций:

$$\int R(\sin t, \cos t) dt$$

*Пример.*

$$\int \sqrt{5 + 2x - x^2} dx = \int \sqrt{5 - (x^2 - 2x)} dx =$$

$$= \int \sqrt{5 - (x - 1)^2 + 1} dx = \int \sqrt{6 - (x - 1)^2} dx =$$

$$\begin{array}{l} x - 1 = u \\ dx = du \end{array}$$

$$= \int \sqrt{6 - u^2} du =$$

$$u = \sqrt{6} \sin t$$

$$du = \sqrt{6} \cos t dt$$

$$t = \arcsin \frac{u}{\sqrt{6}}$$

$$= \int \sqrt{6 - 6 \sin^2 t} \sqrt{6} \cos t dt = 6 \int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{6}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = 3t + \frac{6}{4} \sin 2t + C =$$

$$= 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} \sin \left( 2 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} \right) + C =$$

$$= 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} \sin 2\alpha + C =$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} +$$

$$+ 3 \sin \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}}} + C =$$

$$= 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + 3 \frac{x-1}{\sqrt{6}} \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{6}} + C$$

## Частные случаи квадратичных иррациональностей.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Выделением полного квадрата в знаменателе интеграл сводится к табличному.

*Пример.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 + 4}} =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 2^2}} = \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C$$

$$2. \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

В числителе выделяется производная квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе.

*Пример.*

$$\int \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x + 8) - 13}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx =$$

$$= \frac{5}{4} \int \frac{(4x+8)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} =$$

$$= \frac{5}{4} \int \frac{d(2x^2+8x+1)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}+4-4}} =$$

$$= \frac{5}{4} 2\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2 - \frac{7}{2}}} =$$



$$= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 1} -$$
$$- \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + \frac{1}{2}} \right| + C$$

$$3. \int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad k \leq 2$$

Подстановкой  $x - \alpha = \frac{1}{t}$

интеграл сводится к предыдущему.

*Пример.*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right\}$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| + C =$$
$$= -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right| + C$$