Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 7

Классы интегрируемых функций.

1. **Интегрирование иррациональных выражений.**

I. Линейные иррациональности.

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

$(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}$ - линейная иррациональность,

$R(x, y, z, ...)$ - дробно-рациональная функция своих аргументов.

<u>Метод.</u>

Если S – общий знаменатель дробей

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, ..., \frac{m_k}{n_k},$$

то используется подстановка:

$$\boxed{t^{s} = ax + b}$$

В результате интеграл сводится к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента t.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}+1}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \quad S=4 \quad \boxed{t^4 = 2x-1} \\ 4t^3dt = 2dx \quad \boxed{dx = 2t^3dt} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{t^2 \cdot 2t^3}{t^3+1}dt = 2\int \frac{t^2(t^3+1-1)}{t^3+1}dt =$$

$$= 2\int t^2 dt - 2\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3}\int \frac{d\left(t^3+1\right)}{t^3+1} =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\left(2x-1\right)^{3/4} - \frac{2}{3}\ln\left|\left(2x-1\right)^{3/4}+1\right| + C;$$

II. Дробно-линейные иррациональности.

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}$ - дробно-линейная иррациональность.

Пусть S – общий знаменатель дробей

$$\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},\ldots,\frac{m_k}{n_k};$$

После подстановки

$$\boxed{t^s = \frac{ax+b}{cx+d}}$$

указанный интеграл сводится к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента t (корни исчезают).

III. Квадратичные иррациональности. Тригонометрические подстановки.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ - квадратичная иррациональность,

$R(x, y)$ -дробно-рациональная функция двух аргументов.

Метод.

После выделения полного квадрата в квадратном трёхчлене ax^2+bx+c и замены

$$\boxed{u=x+\frac{b}{2a}}$$

интеграл сводится к одному из трёх типов:

$$I.\int R\left(u,\sqrt{l^2-u^2}\right)du \Leftarrow \boxed{u=l\cdot\sin t}$$

$$II.\int R\left(u,\sqrt{l^2+u^2}\right)du \Leftarrow \boxed{u=l\cdot tgt}$$

$$III.\int R\left(u,\sqrt{u^2-l^2}\right)du \Leftarrow \boxed{u=\frac{l}{\cos t}}$$

После такой замены интеграл сводится к интегралу от тригонометрических функций:

$$\boxed{\int R(\sin t,\cos t)dt}$$

Пример.

$$\int\sqrt{5+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{5-\left(x^2-2x\right)}\,dx=$$

$$=\int\sqrt{5-(x-1)^2+1}\,dx=\int\sqrt{6-(x-1)^2}\,dx=$$

$$\left|\begin{array}{l} x-1=u \\ dx=du \end{array}\right| =\int\sqrt{6-u^2}\,du= \left|\begin{array}{l} u=\sqrt{6}\sin t \\ du=\sqrt{6}\cos t\,dt \\ t=\arcsin\dfrac{u}{\sqrt{6}} \end{array}\right|$$

$$= \int \sqrt{6-6\sin^2 t}\,\sqrt{6}\cos t\,dt \quad = 6\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{6}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = 3t + \frac{6}{4}\sin 2t + C =$$

$$= 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} \right) + C =$$

$$= 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2}\sin 2\alpha + C =$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} +$$

$$+3\sin\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}} + C =$$

$$= 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + 3\frac{x-1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{6}} + C$$

Частные случаи квадратичных иррациональностей.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Выделением полного квадрата в знаменателе интеграл сводится к табличному.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+4}} =$$

$$=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

$$2.\ \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

В числителе выделяется производная квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе.

Пример.

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{(4x+8)}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-13\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{d\left(2x^2+8x+1\right)}{\sqrt{2x^2+8x+1}}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}+4-4}}=$$

$$=\frac{5}{4}2\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}}=$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} -$$

$$-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C$$

3. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad k \le 2$$

Подстановкой $\quad x-\alpha = \dfrac{1}{t}$

интеграл сводится к предыдущему.

Пример.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left| \quad x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt \quad \right|$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C$$