Лекция 6

Классы интегрируемых функций

1) **Интегрирование рациональных дробей.**

2) **Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.**

1. **<u>Интегрирование рациональных дробей. Общая схема.</u>**

1) Если дробь $\dfrac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}$ неправильная $(n \geq m)$, то её представляют в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби :

$$\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)} = Q_l(x) + \frac{R_p(x)}{\varphi_m(x)}.$$

2) Находят корни знаменателя правильной рациональной дроби и разлагают его на квадратичные и линейные множители с действительными коэффициентами.

3) Записывают разложение полученной правильной дроби на простейшие.

4) Интегрируют каждую простейшую дробь.

Т Правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей четырех типов:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

$$p^2-4q<0.$$

Каждому действительному корню a кратности m знаменателя $\varphi_m(x)$ в разложении соответствует сумма простейших дробей первых двух типов:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}.$$

Каждой комплексно сопряженной паре корней кратности m соответствует сумма простейших дробей третьего и четвёртого типов:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Коэффициенты A_i, M_i, N_i могут быть найдены после приведения суммы простейших дробей к общему знаменателю.

Способы определения коэффициентов:

- Метод неопределённых коэффициентов (приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x).
- Подстановка подходящих чисел в тождество.

Пример.

$$\int \frac{x dx}{\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)} = ?$$

Разлагаем правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)};$$

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x+1)(x-1);$$

$$x = 1:\ 1 = -2A,\ \ A = -\frac{1}{2};$$

$$x = -1:\ -1 = B(-2)(-3),\ \ B = -\frac{1}{6};$$

$$x = 2:\ 2 = C \cdot 1 \cdot 3,\ \ C = \frac{2}{3};$$

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

По свойству линейности:

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln\left|x+1\right| + \frac{2}{3}\ln\left|x-2\right| + C.$$

2. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

$$I.\ \int \cos^n x \cdot \sin^m x\,dx$$

а) n и m – чётные, целые, положительные.

Метод: понижение степени переходом к двойному аргументу с помощью формул тригонометрии:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Пример.

$$\int \cos^4 x dx = ?$$

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

б) хотя бы одно из n и m - нечётное, целое, положительное.

Метод: от нечётной степени отделяется один сомножитель и заносится под знак дифференциала;
оставшаяся подынтегральная функция выражается через функцию, стоящую под знаком дифференциала при помощи формулы

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Пример 1:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = ?$$

Решение.

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int \sin^3 x \cos^4 x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^3 x \cos^4 x d \sin x = \int \sin^3 x \left(1 - \sin^2 x\right)^2 d \sin x =$$

$$= \int \left(\sin^3 x - 2\sin^5 x + \sin^7 x\right) d \sin x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{3}\sin^6 x + \frac{1}{8}\sin^8 x + C.$$

***Пример* 2:**

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx = ?$$

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}\sin x\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}\,d\cos x =$$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^5 x}\,d\cos x = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

$$II.\quad \int \cos\alpha x \cdot \sin\beta x dx$$

$$\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$$

$$\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$$

Метод: переход к сумме функций и сумме интегралов.

При этом используются следующие тригонометрические формулы:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\alpha x\cdot\cos\beta x &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\Big)\\
\cos\alpha x\cdot\cos\beta x &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\Big)\\
\sin\alpha x\cdot\sin\beta x &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\Big)
\end{aligned}}$$

$$\boxed{III.\ \int R(\sin x, \cos x)dx}$$

Здесь $R(\sin x, \cos x) -$ **рациональная функция.**

Метод - ***универсальная тригонометрическая подстановка:***

$$t = tg\frac{x}{2}$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \qquad x = 2arctgt;$$

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Окончательно:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}; & x = 2arctg\ t \end{array}}$$

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}$$

(Интеграл приводится к интегралу от рациональной дроби).

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = ?$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$t = tg\frac{x}{2};$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2dt\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Замечание.

Если подынтегральная функция ***R(sinx,cosx)*** является ***чётной функцией*** аргументов ***sinx и cosx,*** более эффективной будет подстановка

$$\boxed{t = tgx}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \left(a^2 tg^2 x + b^2\right)} =$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2 x+\frac{b^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dtgx}{\left(tg^2 x+\frac{b^2}{a^2}\right)}=$$

$$\boxed{t=tgx}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{b}{a}}arctg\frac{t}{\frac{b}{a}}+C=\frac{1}{ab}arctg\frac{atgx}{b}+C.$$