Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 4

Комплексные функции и многочлены.

1. Комплексная функция действительного аргумента.

2. Многочлены в комплексной области.

1. Комплексная функция действительного аргумента.

Если каждому действительному числу t ставится в соответствие комплексное число z, то $z = z(t)$ называется ***комплексной функцией действительного аргумента.***

В алгебраической форме ***z(t)*** выглядит так:

$$\boxed{z(t) = x(t) + iy(t)}$$

Числу $z(t)$ ***соответствует вектор с координатами***

$x(t), y(t)$, ***следовательно, задание функции*** $z(t)$

равносильно заданию векторной функции скалярного аргумента.

Отсюда, в частности, следует правило дифференцирования комплексной функции:

$$\boxed{z'(t) = x'(t) + iy'(t)}$$

Пример: $z = e^{i\varphi}$ - комплексная функция действительного аргумента φ.

$$z' - ?$$

Решение.

$$\boxed{z' = ie^{i\varphi}}$$

действительно, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi;$

$$z' = -\sin\varphi + i\cos\varphi =$$

$$= i(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

2. Многочлены в комплексной области.

Рассмотрим многочлен порядка n:

$$f_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n .$$

Здесь

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные комплексные числа,

z - комплексная переменная.

Другой многочлен

$$\varphi_m(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m .$$

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$\frac{f_n(z)}{\varphi_m(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m}.$$

При $n < m$ дробь называется **правильной**,
при $n \geq m$ - **неправильной**.

Пусть $m \le n.$

Как и в элементарной алгебре справедливо ***основное свойство деления:***

$$\boxed{\frac{f_n(z)}{\varphi_m(z)} = Q_l(z) + \frac{R_p(z)}{\varphi_m(z)}}$$

Здесь:

$Q_l(z)$ - частное (целая часть дроби),

$R_p(z)$ - остаток,

$Q_l(z), R_p(z)$ - многочлены,

$$\boxed{\begin{array}{l} l + m = n \\ p < m \end{array}}$$

Если $R_p(z) \equiv 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{f_n(z)}{\varphi_m(z)} = Q_l(z)}$$

или

$$\boxed{f_n(z) = Q_l(z) \cdot \varphi_m(z)}$$

(деление без остатка)

Корни многочлена

Корнем многочлена $f_n(z)$ называется число z_0 , удовлетворяющее уравнению

$$f_n(z) = 0$$

В развернутом виде:

$$\boxed{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0}$$

Такое уравнение называется ***алгебраическим уравнением n-ой степени.***

Теорема Безу.

Т Остаток, получаемый при делении $f_n(z)$ на (z-*a*), равен $f_n(a)$

$$\boxed{\frac{f_n(z)}{z-a} = Q_l(z) + \frac{f_n(a)}{z-a}.}$$

$$\boxed{\frac{f_n(z)}{\varphi_m(z)} = Q_l(z) + \frac{R_p(z)}{\varphi_m(z)}.}$$

Доказательство.

По условию:

$$\varphi_m(z) = (z - a);$$

По основному свойству деления:

$$Q_l(z) = Q_{n-1}(z);$$

$$R_p(z) = R_0(z) = R_0;$$

$$\boxed{f_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - a) + R_0}$$

Пложим $\boldsymbol{z = a}$, тогда

$$\boxed{f_n(a) = R_0}$$

Следствие.

Для того чтобы многочлен $f_n(z)$ делился на $(z-a)$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число ***z=a*** было его корнем .

Итак, если ***z = z₀ - корень*** многочлена $f_n(z)$,

$$\boxed{f_n(z)=(z-z_0)\cdot Q_{n-1}(z)}$$

Другие корни $f_n(z)$ следует искать из уравнения

$$\boxed{Q_{n-1}(z)=0}$$

и т.д.

Если $$f_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q_{n-k}(z),$$

где $$Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

то z_0 называется ***корнем кратности k*** многочлена $f_n(z)$.

Основная теорема алгебры

Т

Многочлен ***n***-ой степени имеет ***ровно n корней***, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Т1

Если коэффициенты уравнения ***n***-ой степени ***действительные числа*** и $z_0 = x_0 + iy_0$ – корень этого уравнения, то сопряжённое число

$$z_0^* = x_0 - iy_0$$

- также корень этого уравнения.

Таким образом:

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами ***являются сопряженными парами корней*** **.**

Из теоремы Безу и основной теоремы алгебры следует, что ***всякий многочлен степени n*** можно разложить на множители:

$$\boxed{f_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}}$$

Здесь

z_1 - корень кратности k_1,

z_2 - корень кратности k_2,

....

$$\boxed{k_1 + k_2 + ... + k_m = n}$$

Если коэффициенты $f_n(z)$ - ***действительные числа***, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно-сопряжённым корням, можно представить этот многочлен в виде произведения ***множителей двух типов:***

1. **Линейные множители** $\boxed{(z - z_i)^{k_i}}$

- соответствуют действительным корням z_i кратности k_i,

2. **Квадратичные множители** $\boxed{(z^2 + pz + q)^{k_j}}$

где p,q - действительные числа, $D = p^2 - 4q < 0$

- соответствуют парам комплексно-сопряжённых корней кратности k_j

Для доказательства последнего рассмотрим:

$$(z - z_j)\cdot(z - z_j^*) =$$

$$= \left[z - \left(x_j + iy_j \right) \right] \cdot \left[z - \left(x_j - iy_j \right) \right] =$$

$$= z^2 - 2x_j z + \left(x_j^2 + y_j^2 \right) =$$

$$= z^2 + pz + q \;;$$

Здесь: $p = -2x_j; q = \left(x_j^2 + y_j^2 \right)$;

$$D = p^2 - 4q = 4x_j^2 - 4\left(x_j^2 + y_j^2 \right) < 0$$

Таким образом, многочлен с действительными коэффициентами имеет разложение:

$$\boxed{\begin{aligned} & f_n(z) = a_0 (z - z_1)^{s_1} (z - z_2)^{s_2} \ldots (z - z_l)^{s_l} \cdot \\ & \cdot (z^2 + p_1 z + q_1)^{k_1} \ldots . (z^2 + p_j z + q_j)^{k_j}, \end{aligned}}$$

где

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_l + 2k_1 + \ldots + 2k_j = n$$

Пример:

Разложить на множители $f_4(z) = z^4 + 1.$

Решение.

Действительных корней нет. Комплексные корни:

$$z^4 = -1 + 0i = e^{i\pi}, \qquad \sqrt[4]{-1+0i} = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}},$$

$$k = 0; 1; 2; 3.$$

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = e^{\frac{i3\pi}{4}}, = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = e^{\frac{i5\pi}{4}}, = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = z_2^*$$

$$z_4 = e^{\frac{i7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = z_1^*$$

Пары z_1, z_4; z_2, z_3 − сопряжённые

$$z^4+1=(z-z_1)(z-z_4)(z-z_2)(z-z_3)=$$

$$=\left(z^2-z(z_1+z_4)+z_1z_4\right)\left(z^2-z(z_2+z_3)+z_2z_3\right).$$

$z_1 z_4 = 1$ $\qquad$ $z_1+z_4=\sqrt{2}$

Точно также,

$$z_2 + z_3 = -\sqrt{2}, \qquad z_2 z_3 = 1$$

Окончательно

$$z^4 + 1 = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right).$$