НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основные понятия и определения.

Степанова Наталия Вадимовна,
к.ф.-м. н., доцент кафедры математики ВоГУ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Первый уровень - *простейшие* элементарные функции:

Степенные : $x^r,\ r\in(-\infty\ ;\ \infty)$

$$x^2;\ x^3;\ \frac{1}{x^2}=x^{-2};\ \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}};\ \frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}};\ x^{-3};\ x^{-\frac{3}{4}};\ \sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}\ldots$$

Показательные: $a^x,\ a>0,\ x\in(-\infty\ ;\ \infty)$

$$2^x;\ 3^x;\ e^x=\exp(x);\ \left(\frac{2}{3}\right)^x;\ 10^x;\ (0.5)^x;\ \ldots.$$

Логарифмические: $\log_a x\ \ (a>0,\ a\neq 1\ ,\ x>0);\ \ln x$

Тригонометрические: $\sin x;\ \cos x;\ tgx;\ ctgx$

Обратные тригонометрические: $\arcsin x;\ \arccos x;\ arctgx;\ arcctgx$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Второй уровень – *элементарные функции*, которые получаются из простейших элементарных функций с помощью арифметических операций: сложения, вычитания, умножения, деления, подстановки функции в функцию (сложные функции).

Многочлены: $3x^2-2x+4;\ x^3+27;\ x^4-25;\ x^3+2x^2-4x+3\ldots$

Дробно-рациональные: $\dfrac{2x-3}{x^2+3x-1};\quad \dfrac{3x+1}{2-x};\quad \dfrac{1}{x^2-2x+4}\ldots$

Сложные функции: $\sin^2 x;\ \sqrt{\cos(3x^3-4)};\ e^{tgx};\ \ln(x^2+4);\ \sin(2x-5);$

$$\frac{2x}{arctgx};\quad \frac{\sqrt{\ln(3x^3-4)}}{3^{e^x}+\sqrt{x}};\quad \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x};\quad \sqrt[3]{x^2}\ln\left(x^2+4\right);\quad \sin(\ln(2x-5))$$

ПОВТОРЕНИЕ.

1. ЗАДАЧА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

Определение **(значения производной функции в точке).**

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a\ ;\ b)$. Производной этой функции в точке $x_0 \in (a\ ;\ b)$ называется число $y'(x_0) = f'(x_0)$, которое находится по формуле $y'(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(если этот конечный предел существует).

Определение **(производной функции от данной функции).**

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a\ ;\ b)$.

Производной функцией $y'(x) = f'(x)$ от данной функции $y = f(x)$ называется новая функция, которая для любого $x \in (a\ ;\ b)$ находится по формуле $y'(x) = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

(если этот конечный предел существует).

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

<u>*Определение*</u> **(дифференциал функции).**

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на дифференциал независимой переменной *x*.

$$dy(x) = df(x) = f'(x) \cdot dx$$

$$d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x\, dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

$$d\left(\frac{x}{5} - 27\right) = \left(\frac{x}{5} - 27\right)' dx = \left(\frac{1}{5}x - 27\right)' dx = \frac{1}{5} dx$$

$$d(e^x) = (e^x)' dx = e^x dx$$

$$d(\arcsin x) = (\arcsin x)' dx = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1) $(C)' = 0$

2) $(x^r)' = r\,x^{r-1}$

2.1) $(x)' = 1$

2.2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2.3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$

3) $(\sin x)' = \cos x$

4) $(\cos x)' = -\sin x$

5) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

6) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

10) $(arcctg\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

11) $(a^x)' = a^x \ln a$

12) $(e^x)' = e^x$

13) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

14) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1) $(C\,f(x))' = C\,f'(x)$

2) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

5) Сложная функция (*иначе* функция от функции) $y(x) = f(g(x))$

$$y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Конец повторения

2. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ. ЕЁ СВОЙСТВА.

Дана функция $y = f(x)$, определена и непрерывна на $(a; b)$. Считаем её производной функцией некоторой другой функции $F(x)$, т.е. $f(x) = F'(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

<u>Определение.</u>

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a; b)$.

***<u>Замечание.</u>* Правильность вычисления первообразной функции проверяется дифференцированием.**

<u>Пример 1.</u> Доказать, что функции $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + x$ и $F_2(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$ обе являются первообразными для функции $f(x) = x + 1$

Решение.

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)' = \frac{2x}{2} + 1 = x + 1$$

$$F_2'(x) = \left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)' = \frac{2(x+1)}{2} = x + 1$$

Два свойства первообразных функций для одной и той же функции.

Свойство 1. Если какая-то конкретная функция $F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$, то любая функция вида $F(x)+C$, где $C\in(-\infty\ ;\ +\infty)$ также является первообразной для функции $y=f(x)$.

Свойство 2. Пусть найдены две первообразных функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для одной и той же функции $y=f(x)$. Какими бы разными по виду они ни были, их можно преобразовать так, что они будут отличаться только на конкретную константу C^*, т.е. $F_1(x)\equiv F_2(x)+C^*$.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Чтобы найти все первообразные функции $F(x)$ для функции $y = f(x)$, нужно найти какую-нибудь одну первообразную $F(x)$ и прибавить к ней произвольную константу . Полученное бесконечное множество первообразных функций $F(x)+C$ и называется неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$.

Символьное обозначение

$$\int f(x)\, dx$$

Запомните термины:

$f(x)$-- подынтегральная функция,

$f(x)dx$ -- подынтегральное выражение,

x -- переменная интегрирования.

Определение

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ -- какая - то одна первообразная для функции $y = f(x)$, а $C \in (-\infty\ ;\ +\infty)$

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \boldsymbol{F(x) + C}$$

все бесконечное семейство первообразных

$\boldsymbol{F(x) + C}$

одна конкретная первообразная

Нахождение конкретной первообразной

Задача: найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$, удовлетворяющую условию $F(x_0)=y_0$. Равенство $F(x_0)=y_0$ называется начальными данными.

Интегральная кривая – это график первообразной функции $F(x)$.

Задача: найти первообразную функцию $F(x)$, интегральная кривая (график) которой проходит через точку $M_0(x_0 ; y_0)$.

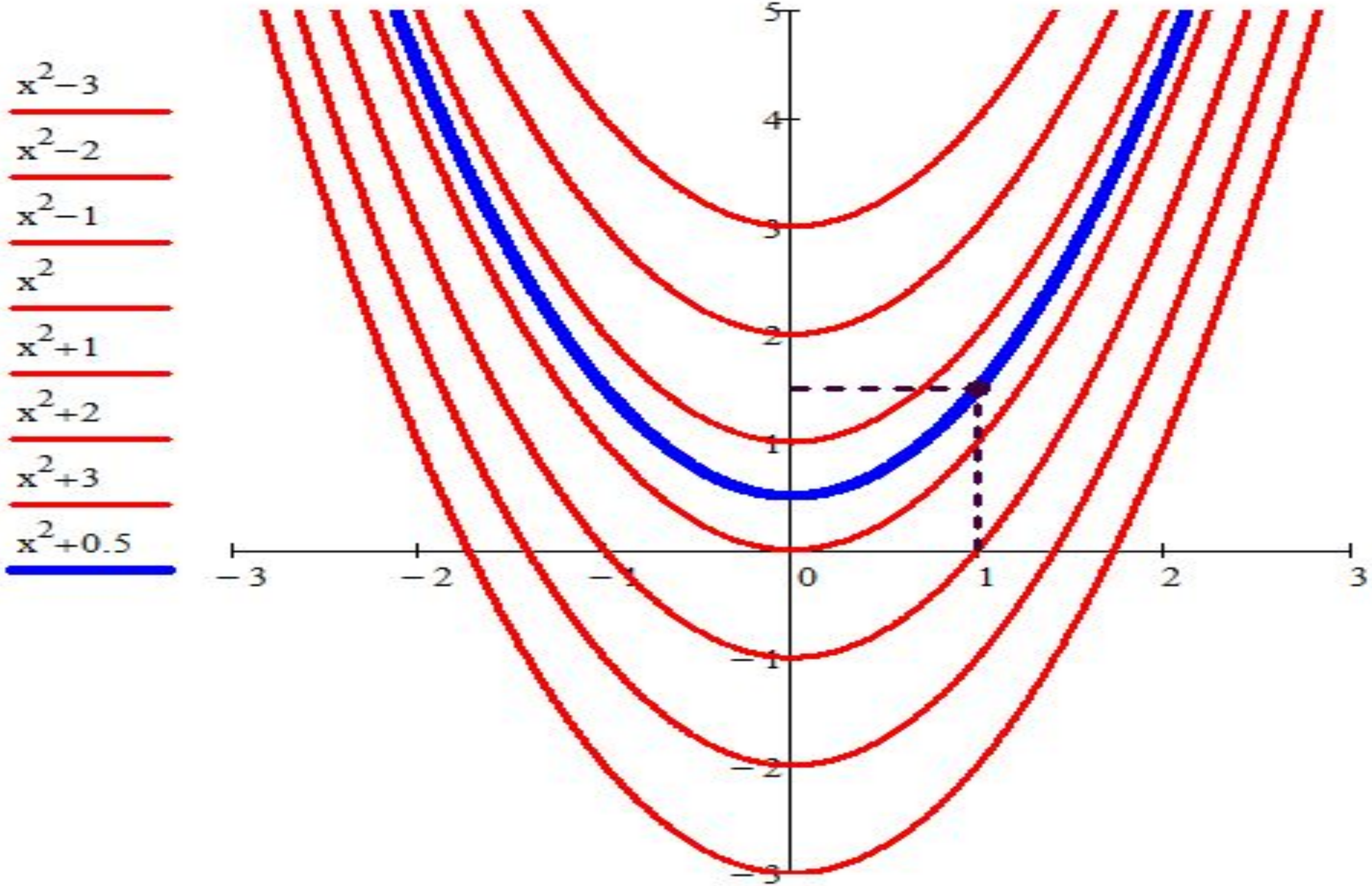
Пример. Известно, что первообразная функция $F(x)$ для функции $f(x) = 2x$ удовлетворяет условию $F(1) = 1.5$. Найти значение этой первообразной в точке $x = -2$.

Решение. Имеем $\int 2x dx = x^2 + C$.

Знаем, что $F(1) = x^2 + C \Big|_{x=1} = (1)^2 + C = 1.5$, откуда $C = 0.5$.

Следовательно, формула искомой первообразной функции имеет вид $F(x) = x^2 + 0.5$. Теперь найдем значение этой первообразной при $x = -2$: $F(-2) = (-2)^2 + 0.5 = 4.5$.

Ответ: $F(-2) = 4.5$.



x^2-3
x^2-2
x^2-1
x^2
x^2+1
x^2+2
x^2+3
$x^2+0.5$
−3
−2
−1
0
1
2
3
5
4
3
2
1
−1
−2
−3

4. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1) $(C)' = 0$ «Какая функция имеет производную 0?» $\int 0\,dx = C$

2) $(x^r)' = r\,x^{r-1}$

$$\int x^r dx = \int \frac{r+1}{r+1} x^r dx = \int \frac{1}{r+1}(r+1)x^r dx = \frac{1}{r+1}\int (r+1)x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (\, r \neq -1 \,)$$

14) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ «Какая функция имеет производную $\dfrac{1}{x}$?» $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ **?**

$y = \dfrac{1}{x}$ $ОДЗ: x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$y = \ln x$ $ОДЗ: x \in (0; +\infty)$

$y = \ln|x|$ $ОДЗ: x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1) $\int 0\,dx = C$

2) $\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, если $r \neq -1$

2.1) $\int dx = x + C$

2.2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2.3) $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

12) $\int \dfrac{1}{a^2-x^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

(высокий логарифм)

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|\, x + \sqrt{x^2+k}\,\right| + C$

(длинный логарифм)

14) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

15) $\int e^x dx = e^x + C$

Два свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный сомножитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int C f(x)dx = C\int f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов от этих функций.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

К сожалению, нет единых правил интегрирования произведения и частного функций. Также нет единого правила интегрирования сложной функции. Интегрирование функций – это более сложная операция, чем дифференцирование.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int(2x+\sin x)dx$

Решение. $\int(2x+\sin x)dx=\int 2x\,dx+\int \sin x\,dx = x^2+C_1+(-\cos x)+C_2 =$

$$= x^2-\cos x+C_1+C_2 = x^2-\cos x+C$$

$$C_1+C_2 \leftrightarrow C$$

Сколько писать констант? Две или одну?

Одну!!!

Куда девается dx ?

Две трактовки символа $\int f(x)\,dx$

1. «Указатель переменной интегрирования»

Символы $\int$ и dx рассматриваются как открывающая и закрывающая скобки.

$$\int f(x)\,dx \qquad \big(\, f(x) \,\big)$$

Символ dx не считается сомножителем! Знака умножения нет!!!

$$\cancel{\int f(x)\cdot dx}$$

В данной трактовке символ dx определяет переменную интегрирования. Тип подынтегральной функции, а значит и нужный табличный интеграл, определяется тем, какие операции делаются в функции над переменной интегрирования .
Как только тип подынтегральной функции определен и выбран нужный табличный интеграл, символ dx свое дело сделал и тихо удалился.

Пример 3.

$$\int x^y dx = \left| \begin{array}{l} y = const \quad y \neq -1 \\ \int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C \end{array} \right| = \frac{x^{y+1}}{y+1} + C$$

$$\int x^y dy = \left| \begin{array}{l} x = const \quad x > 0;\ x \neq 1 \\ \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \end{array} \right| = \frac{x^y}{\ln x} + C$$

Пример 4.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin x\, d(\sin x) = \left| \ \sin x = t \ \right| = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$$

2. «ДИФФЕРЕНЦИАЛ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ ФУНКЦИИ»

Символ dx рассматривается как дифференциал переменной x и он является сомножителем (есть операция умножения).

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\bullet dx = \int h(g(x))\,g'(x)\bullet dx = \int h(g(x))\,\boxed{dg(x)} = H(g(x)) + C$$

$$f'(x)\cdot dx = df(x)$$

__Пример 5.__

$$\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x (\sin x)'\,dx = \int \sin x\; d(\sin x) = \left|\; \sin x = t \;\right| =$$

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$$

Способ 2.

$$\int \sin x \cos x\,dx = \int \cos x\; \sin x\,dx = \int \cos x\,(-\cos x)'\,dx =$$

$$= -\int \cos x\; d(\cos x) = \left|\; \cos x = t \;\right| = -\int t\,dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{(\cos x)^2}{2} + C$$

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1) $\int 0\, dx = C$

2) $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, если $r \neq -1$

2.1) $\int dx = x + C$

2.2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2.3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

12) $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(высокий логарифм)

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$

(длинный логарифм)

14) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

15) $\int e^x dx = e^x + C$