

О распределении простых чисел

Простые числа!

- Простое число – не имеет делителей, кроме себя и 1, и не равно 1:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

Простые числа!

- Простое число – не имеет делителей, кроме себя и 1, и не равно 1:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

- **Основная теорема арифметики:** каждое натуральное число единственным образом раскладывается в произведение простых.

Простых чисел бесконечно много

Евклид: предположим, что это не так, и что всего есть n простых чисел p_1, \dots, p_n .

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Простых чисел бесконечно много

Евклид: предположим, что это не так, и что всего есть n простых чисел p_1, \dots, p_n .

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Нет делимости ни на одно из чисел p_1, \dots, p_n , т.к. в остатке получается 1.

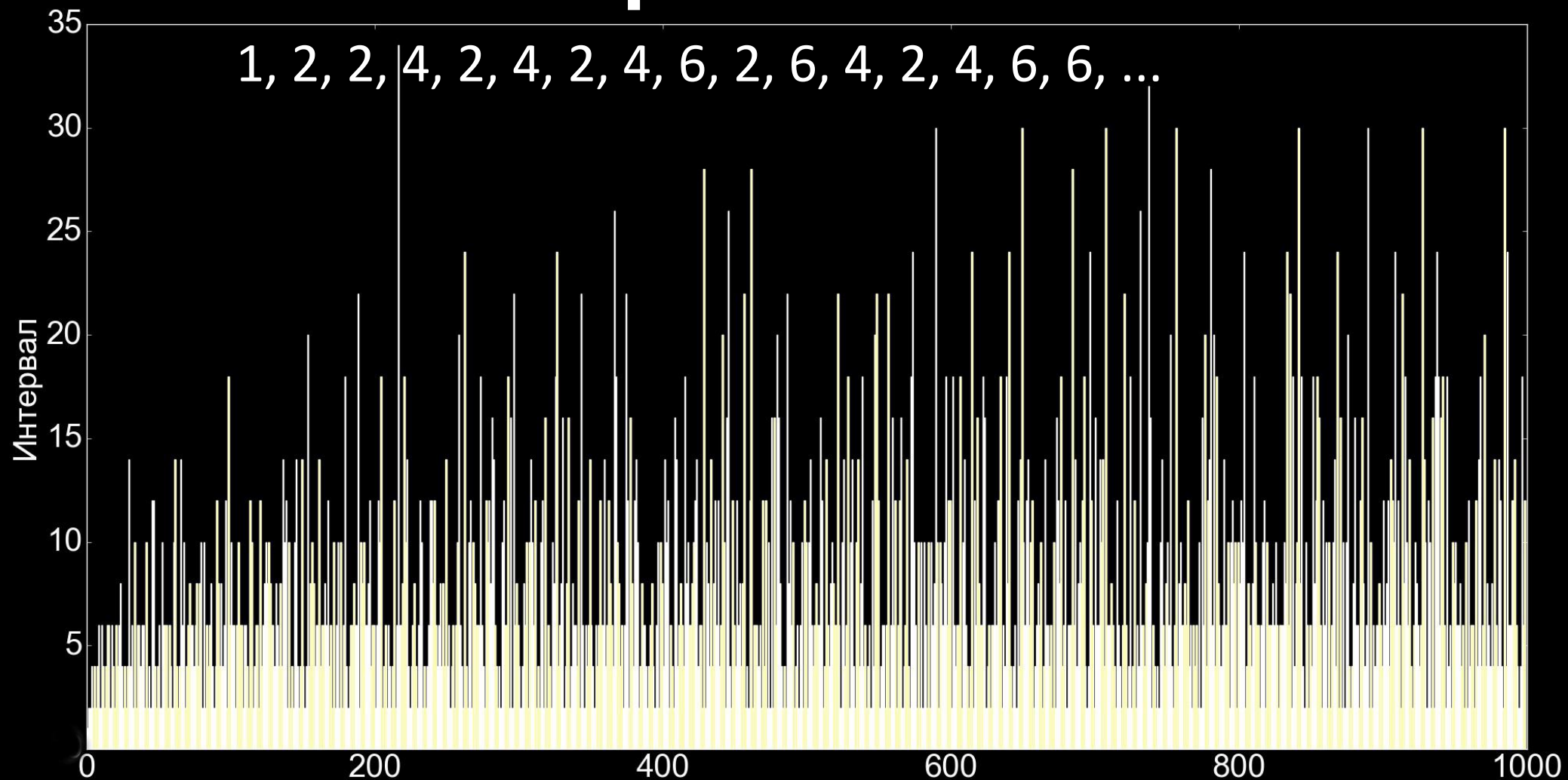
Вывод: есть еще какие-то простые числа, кроме этих n .

Противоречие.

Промежутки между соседними простыми

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, ...

Промежутки между соседними простыми



Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2:
3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, ..., 41 и 43, ..., 1'000'000'007 и 1'000'000'009...

Бесконечно ли много таких пар?

Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, ..., 41 и 43, ..., 1'000'000'007 и 1'000'000'009...

Бесконечно ли много таких пар?

Апрель 2013: пар, отличающихся не более чем на 70'000'000, бесконечно много.

Апрель 2014: пар, отличающихся не более чем на 246, бесконечно много.

Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, ..., 41 и 43, ..., 1'000'000'007 и 1'000'000'009...

Бесконечно ли много таких пар? – нерешенная проблема.

Апрель 2013: пар, отличающихся не более чем на 70'000'000, бесконечно много.

Апрель 2014: пар, отличающихся не более чем на 246, бесконечно много.

Насколько большими бывают

промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$100! + 2$

$100! + 3$

$100! + 4$

...

$100! + 100$

99 подряд идущих непростых чисел.

Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$100! + 2$

$100! + 3$

$100! + 4$

...

$100! + 100$

99 подряд идущих непростых чисел.

Вместо 100 можно было взять 1000000, 10000000000...

Постулат Бертрана



На отрезке $[n; 2n]$ всегда есть простое число.

Постулат Бертрана



На отрезке $[n; 2n]$ всегда есть простое число.

Первое доказательство: П.Л. Чебышёв, 1850 г.

Самое простое доказательство:
П. Эрдёш, 1932 г. (несколько страниц)

Постулат Бертрана

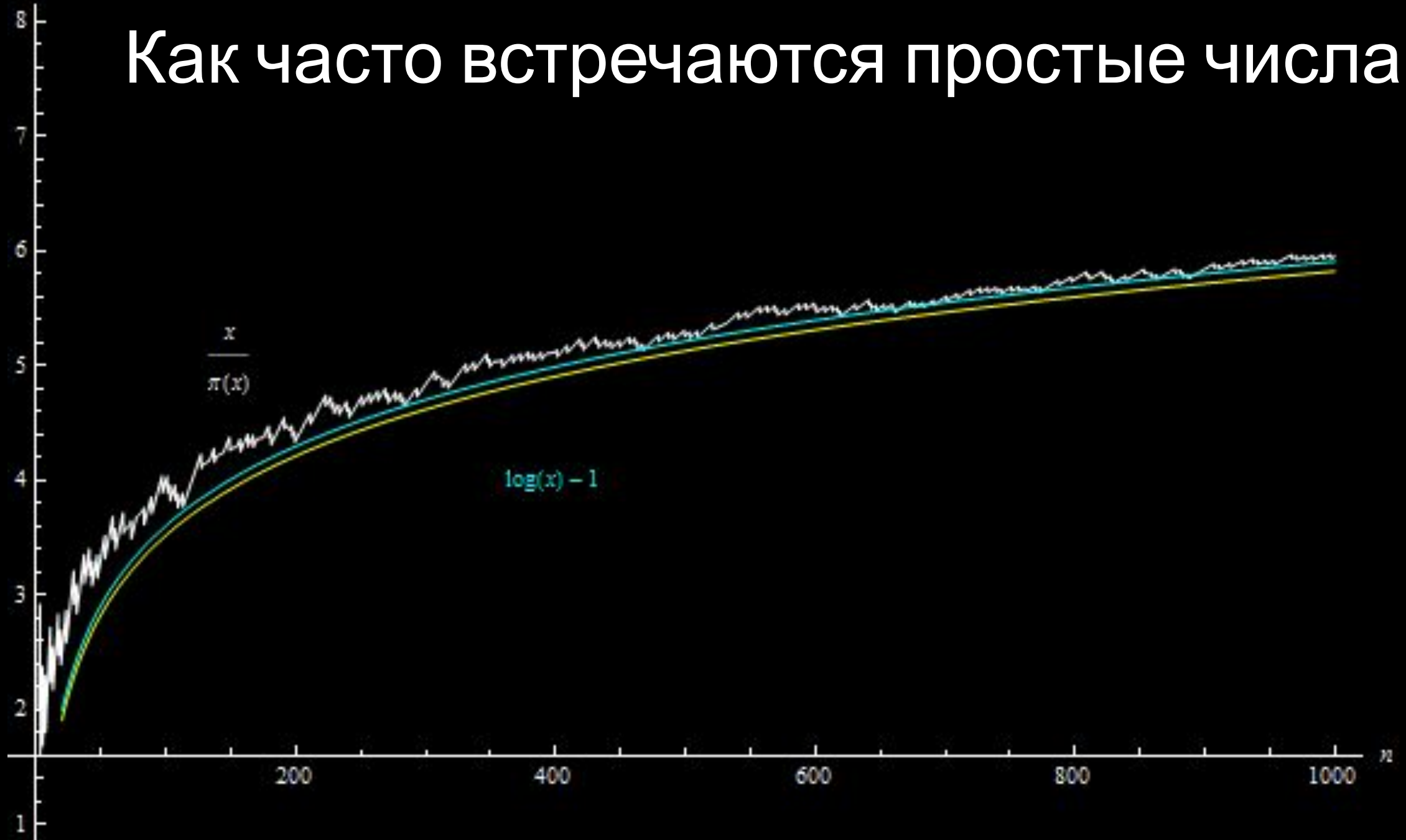
На отрезке $[n; 2n]$ всегда есть простое число.

Вопрос: Насколько малым можно взять $f(n)$, чтобы на отрезке $[n; n + n \cdot f(n)]$ всегда было простое число?

Наилучший результат на сегодня: $f(n) = n^{-19/40}$.

Как часто встречаются простые числа?

Как часто встречаются простые числа?



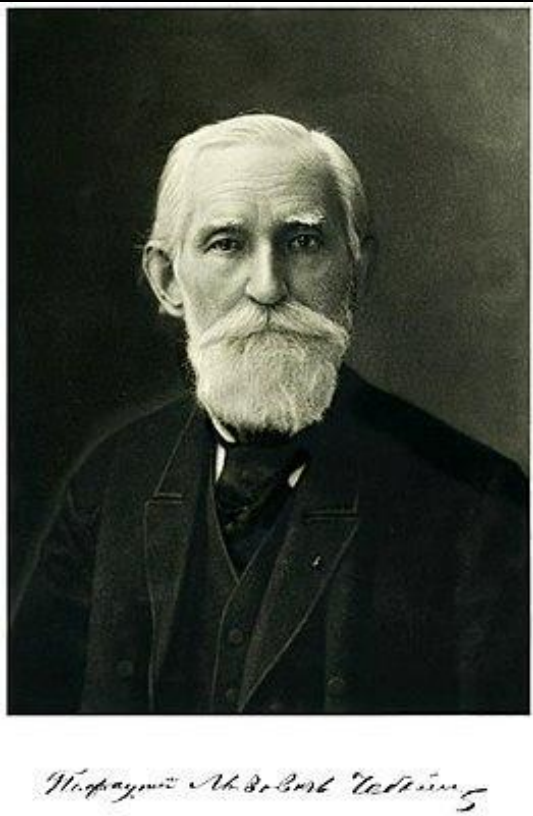
Как часто встречаются простые числа?

$\ln x$ – натуральный логарифм: степень, в которую нужно возвести число e , чтобы получить x

$$\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x$$

$$e \approx 2,718281828459045\dots$$

Как часто встречаются простые числа?

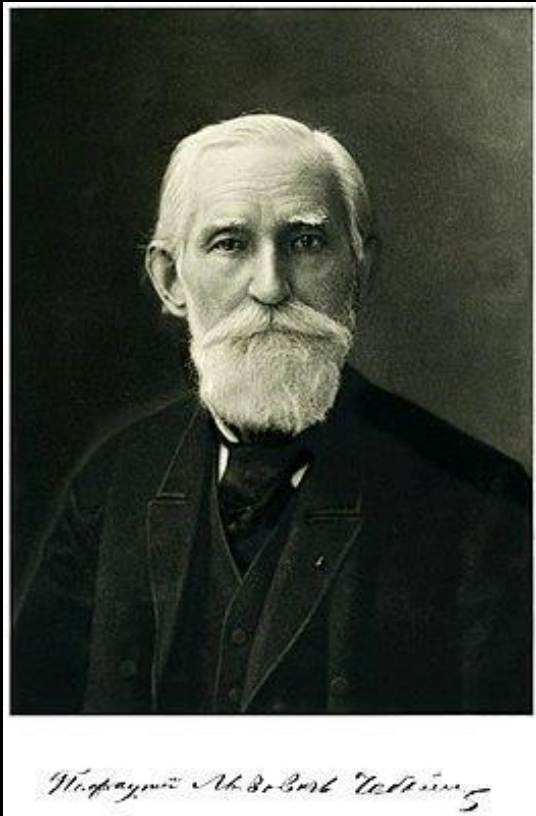


П.Л.Чебышёв, 1850 г.:

Количество простых чисел на отрезке $[1; n]$ растёт **примерно** (с точностью до умножения на константу) как

$$\frac{n}{\ln n}$$

Как часто встречаются простые числа?



П.Л.Чебышёв, 1850 г.:

Количество простых чисел на отрезке $[1; n]$ растёт примерно (с точностью до умножения на константу) как

$$\frac{n}{\ln n}$$

Адамар, Валле-Пуссен, 1896 г.:

Константа равна 1.

Как часто встречаются простые числа?

Пример: сколько простых чисел есть среди первых 10^{100} чисел?

$$\frac{10^{100}}{\ln 10^{100}} = \frac{10^{100}}{100 \ln 10} \approx \frac{10^{100}}{230}$$

