

Лекция 2. Формулы алгебры высказываний.

Простые высказывания:

A2: «Уфа находится на берегу Волги»

A3: «Все люди смертны»

A7: «А.С.Пушкин – великий русский математик»

Конструируем **составное высказывание**:

«Если Уфа находится на берегу Волги и все люди смертны, то А.С. Пушкин – великий русский математик».

$$(A_2 \wedge A_3) \rightarrow A_7$$

$$\lambda(A_2) = 0, \lambda(A_3) = 1, \lambda(A_7) = 0$$

по соотношениям (1.4), (1.2) и определениям 1.7, 1.3

$$\begin{aligned} \lambda((A_2 \wedge A_3) \rightarrow A_7) &= \lambda(A_2 \wedge A_3) \rightarrow \lambda(A_7) = (\lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3)) \rightarrow \lambda(A_7) = \\ &= (0 \wedge 1) \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1 \end{aligned}$$

$$(X \wedge Y) \rightarrow Z$$

A_1 : «Москва – столица России»

A_3 : «Все люди смертны»

A_6 : « $7 < 4$ »

$$\lambda((A_1 \wedge A_3) \rightarrow A_6)$$

$$\begin{aligned} \lambda((A_1 \wedge A_3) \rightarrow A_6) &= \lambda(A_1 \wedge A_3) \rightarrow \lambda(A_6) = (\lambda(A_1) \wedge \lambda(A_3)) \rightarrow \lambda(A_6) = \\ &= (1 \wedge 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

$$(X \wedge Y) \rightarrow Z$$

- Формула конструирования сложного высказывания

Формула АВ

P, Q, R, S, X, Y, Z – пропозициональные переменные. Принимают значения из множества всех высказываний.

Формула АВ или п.п.ф. (правильно построенная формула):

Опр. 2.1

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула АВ.
2. Если F_1 и F_2 - формулы АВ, то выражения
 $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами АВ.
3. Никаких других формул АВ, кроме получающихся согласно п.1 и п.2, нет.

Примеры формул

P, Q, R, X, Y, Z - формулы по п.1

по п.2 можно построить:

$\neg P, \neg Q, \neg X, \neg Y, \neg Z, (P \vee R), (X \wedge Y), (X \rightarrow Z), (Q \leftrightarrow R)$

из построенных снова по п.2 строим дальше:

$(\neg P \wedge \neg Q), (P \wedge \neg P), ((X \wedge Y) \rightarrow Z), ((X \rightarrow Z) \wedge (Q \vee R))$

Выражения, не являющиеся формулами

$$((XY) \rightarrow Z)$$

$$((P \neg Q) \wedge (P \rightarrow \neg R)),$$

$$(P \wedge Q \vee R),$$

$$((X \rightarrow) \wedge Z),$$

$$(X \vee \neg Y) \rightarrow (\neg X \wedge \neg Y)$$

Внешние скобки можно опускать, но если формула входит в более сложную, то внешние скобки обязательны!

Логическое значение составного высказывания

$F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - формула АВ

$X_1, X_2, \dots, X_n$ - пропозициональные переменные

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - конкретные высказывания

$F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ - конкретизация формулы $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ на наборе высказываний $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Теорема 2.2. Логическое значение составного высказывания $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ равно значению формулы $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ на наборе $\lambda(A_1), \lambda(A_2), \dots, \lambda(A_n)$ логических значений составляющих высказываний $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е.

$$\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \dots, \lambda(A_n)).$$

БИ. Пусть в формуле $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 0 логических операций, $k=0$

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv F(X_1)$$

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1)$$

Если $k=1$, то $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ имеет вид

$$\neg X_1, (X_1 \wedge X_2), (X_1 \vee X_2), (X_1 \rightarrow X_2), (X_1 \leftrightarrow X_2)$$

тогда утверждение теоремы – равенство (1.1)-(1.5)

ПИ. Предположим, что $\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \dots, \lambda(A_n))$ для всех формул, содержащих не более $\underline{k}$ логических операций.

ШИ. Пусть $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ содержит $k+1$ символов операций. Тогда (п.2) оно имеет вид

$\neg F_1, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$, где F_1, F_2 содержат не более k операций
для случая $F = (F_1 \wedge F_2)$:

$$\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = \lambda(F_1(A_1, A_2, \dots, A_n) \wedge F_2(A_1, A_2, \dots, A_n)) = (\text{опр.1.3})$$

$$= \lambda(F_1(A_1, A_2, \dots, A_n)) \wedge \lambda(F_2(A_1, A_2, \dots, A_n)) = \text{по ПИ}$$

$$= F_1(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \dots, \lambda(A_n)) \wedge F_2(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \dots, \lambda(A_n)) = \text{т.к. } F = (F_1 \wedge F_2)$$

$$= F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), \dots, \lambda(A_n))$$

ч.т.д.

Доказать для остальных случаев (1 балл за случай)

Составление таблиц ИСТИННОСТИ

Пример 2.3

$$F(X, Y) = (X \rightarrow Y) \vee (Y \rightarrow X)$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(X \rightarrow Y)$	$\lambda(Y \rightarrow X)$	$\lambda((X \rightarrow Y) \vee (Y \rightarrow X))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример 2.4 $F(P, Q, R) = (P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg R)$

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(R)$	$\lambda(P \wedge Q)$	$\lambda(\neg R)$	$\lambda(P \leftrightarrow \neg R)$	$\lambda(F)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Классификация формул АВ

Формула $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется **выполнимой**, если некоторая её конкретизация является истинным высказыванием, т.е. сущес $A_1, A_2, \dots, A_n$ такие, что $\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = 1$.

Формула $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется **тавтологией** или **тождественно истинной**, если любая её конкретизация является истинным высказыванием, т.е. $\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = 1$

для любых $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Формула $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется **опровержимой**, если некоторая конкретизация является ложным высказыванием, т.е. существуют $A_1, A_2, \dots, A_n$ такие, что $\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = 0$.

Формула $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется **тождественно ложной** или **противоречием**, если любая её конкретизация является ложным высказыванием, т.е. для любых $A_1, A_2, \dots, A_n$ $\lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = 0$.