

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

12.09 (2 часа)

1. Подробно изучить теорию в данной презентации, разобраться с решением задач-примеров и **решить задачи для закрепления материала.**

2. Выполнить задания из учебника:
18.11, 18.12, 18.13

План занятия

- Перестановки (определение).
- Формула числа перестановок из n элементов.
- Факториал.
- Решение задач.

Определение

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки*.

Пример.

Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами a , b и c . Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу a , то возможны такие расположения книг: abc , acb .

Если первой поставить книгу b , то возможными являются такие расположения: bac , bca .

И наконец, если первой поставить книгу c , то получим такие расположения: cab , cba .

Каждое из этих расположений называют перестановкой из трёх элементов.

Определение

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом

P_n (читается «Р из n»).

Пусть мы имеем n элементов.

- На первое место можно поставить любой из них.
- Для каждого выбора первого элемента на второе место можно поставить один из оставшихся $n-1$ элементов.
- Для каждого выбора первых двух элементов на третье место можно поставить один из оставшихся $n-2$ элементов и т.д.
- В результате получим, что

$$P_n = n (n - 1) (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(читается « n факториал»).

Например, $2! = 2 \cdot 1 = 2$; $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

По определению считают, что $1! = 1$.

Таким образом, число
всевозможных перестановок из
 n элементов вычисляется по
формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Пример 1.

Сколькими способами могут быть расставлены 8 участников финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение.

- Число способов равно числу перестановок из 8 элементов.
- По формуле числа перестановок находим, что
$$P_8=8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=40\,320.$$
- Значит, существует 40 320 способов расстановки участников забега на восьми беговых дорожках.

Пример 2.

Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Решение.

Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3 . Значит, искомое число четырёхзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

Пример3.

Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники.

Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение.

Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4$.
Получаем:

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = = 17\,280.$$

Задачи на закрепление пройденного материала.

- Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу: 3 человека; 2) 5 человек? 1)
- Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола: 1) 6 гостей на 6 стульях; 2) 7 гостей на 7 стульях?
- Сколькими способами можно с помощью букв K, L, M и N обозначить вершины четырехугольника?
- Сколько различных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7 и 8?
- Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, среди которых 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?
- В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Вычислить:

$$\frac{13!}{11!}$$

$$\frac{6! \cdot 14}{8!}$$