

Отношения и функции

Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ – упорядоченный набор, состоящий из n элементов

$\langle a, b \rangle$ – упорядоченная пара элементов

Если $a \neq b$, то $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$

Пусть M , Q – некоторые множества;
 D - множество, состоящее из
всевозможных упорядоченных пар $\langle x,$
 $y \rangle$, где x – любой элемент из M , y –
любой элемент из Q .

Множество D называют **декартовым
произведением** множеств M , Q и
обозначают так:

$$D=M \times Q$$

Декартовым произведением

множеств M_1, M_2, \dots, M_N называется множество D_N , состоящее из всевозможных упорядоченных наборов вида $\langle x_1, x_2, \dots, x_N \rangle$,

где $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_N \in M_N$

Обозначение: $D_N = M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots \times M_N$

Бинарным (двухместным)
отношением между элементами
множеств M и Q называется любое
подмножество R множества $D=M \times Q$.

Вместо $\langle x, y \rangle \in R$ можно писать xRy

Если $\langle x, y \rangle \notin R$, то будем говорить, что
соотношение xRy не выполнено

Например, отношение именованя R можно определить так:

M – множество имён,

Q – множество людей,

xRy тогда и только тогда, когда $\langle x, y \rangle \in M \times Q$ и x является именем для y

Если $M=Q$, то R называется бинарным отношением на множестве M .

Например, отношение родства R можно определить так:

M – множество людей,
 xRy выполнено тогда и только тогда,
когда $\langle x, y \rangle \in M \times M$ и человек x состоит
в родстве с человеком y

Допустим, что A – множество всех названий городов, B – множество всех стран, S – бинарное отношение «находиться в».

Из каких элементов будет состоять множество $D=A \times B$?

Как будет соотноситься с множеством D множество, состоящее из всех упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$, где $x \in A$, $y \in B$, xSy ?

Пусть W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 – соответственно множества слов русского, английского, французского, польского, татарского языков.

Построен словарь, ставящий в соответствие каждому слову русского языка один из возможных переводов этого слова на каждый из остальных перечисленных языков.

Как с помощью введённых ранее понятий описать состав этого словаря?

$W = W_1 \times W_2 \times W_3 \times W_4 \times W_5$ – декартово произведение заданных множеств

Построенный словарь – это 5-местное отношение $M \subset W$, состоящее из всех таких наборов $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$, где $x_i \in W_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и каждое из слов x_2 - x_5 является переводом слова x_1 на соответствующий язык

Допустим, что на множестве M задано некоторое бинарное отношение R ,

$$R \subset M \times M$$

Какими свойствами может обладать данное отношение?

Некоторые из возможных свойств отношений:

Рефлексивность, антирефлексивность

Симметричность, асимметричность,
антисимметричность

Транзитивность, антитранзитивность

Рефлексивность

Если для любого $x \in M$ выполняется xRx ,
то отношение R **рефлексивно**

Например, отношения «равно»,
«одновременно» рефлексивны

Антирефлексивность

- Если для любых $x, y \in M$ таких, что выполнено соотношение xRy , следует, что $x \neq y$, то отношение R **антирефлексивно**
- Например, отношения «больше», «меньше» антирефлексивны

Симметричность

Если для любых $x, y \in M$ таких, что выполнено соотношение xRy , следует, что выполнено yRx , то отношение R **симметрично**

Например, отношения «родственник», «равно» симметричны

Антисимметричность

Если для любых $x, y \in M$ таких, что выполнены соотношения $x \neq y$ и xRy , следует, что yRx не выполнено, то отношение R **антисимметрично**

Например, отношения «больше или равно», «меньше или равно» антисимметричны

Асимметричность

Если для любых $x, y \in M$ хотя бы одно из соотношений xRy или yRx не выполнено, то отношение R **асимметрично**

Например, отношения «больше», «меньше» асимметричны.

Асимметричное отношение всегда антирефлексивно.

Транзитивность

Если для любых $x, y \in M$ из соотношений xRy и yRz , всегда следует соотношение xRz , то отношение R **транзитивно**

Например, отношения «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно» транзитивны

Антитранзитивность

Если для любых $x, y \in M$ из соотношений xRy и yRz , всегда следует, что xRz не выполнено, то отношение R **антитранзитивно**

Например, отношение «на единицу больше» антитранзитивно

Если отношение R рефлексивно, симметрично, транзитивно, то оно называется **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ**.

Эквивалентность есть отношение одинаковости объектов (с определённой точки зрения)

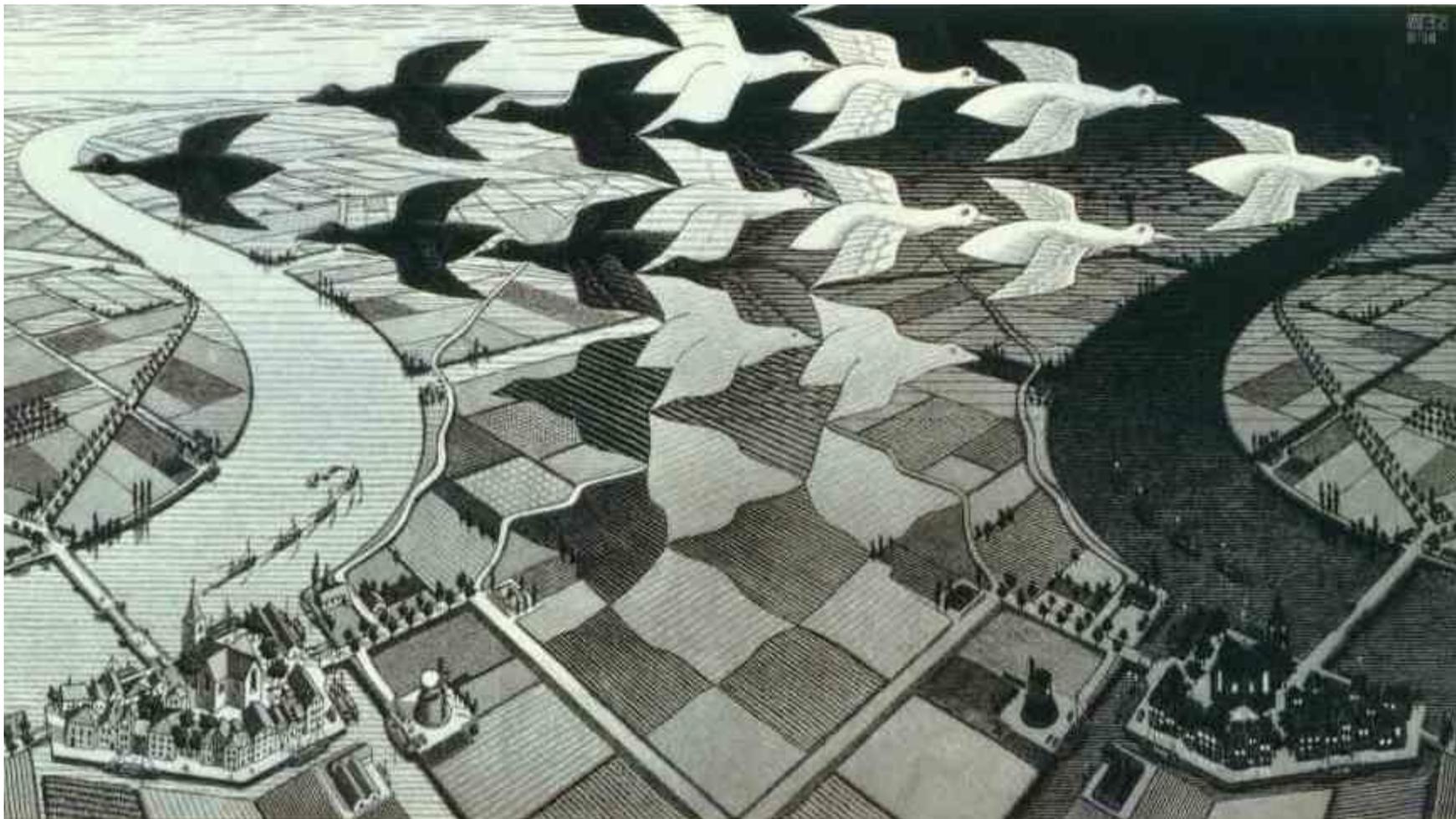
Система муниципальных корон

	Базовая система	Статусные добавления		
		Административный центр субъекта РФ и муниципал.района	Административный центр субъекта РФ	Административный центр муниципал. района
Городской округ				
Муниципальн. район		—	—	—
Городское поселение				
Сельское поселение				
Внутри-городская территория города федерального значения				

Принята Геральдическим Советом при Президенте РФ в 2005 г.

Отношение R называется **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично

Толерантность есть отношение сходства или смежности объектов (с определённой точки зрения)



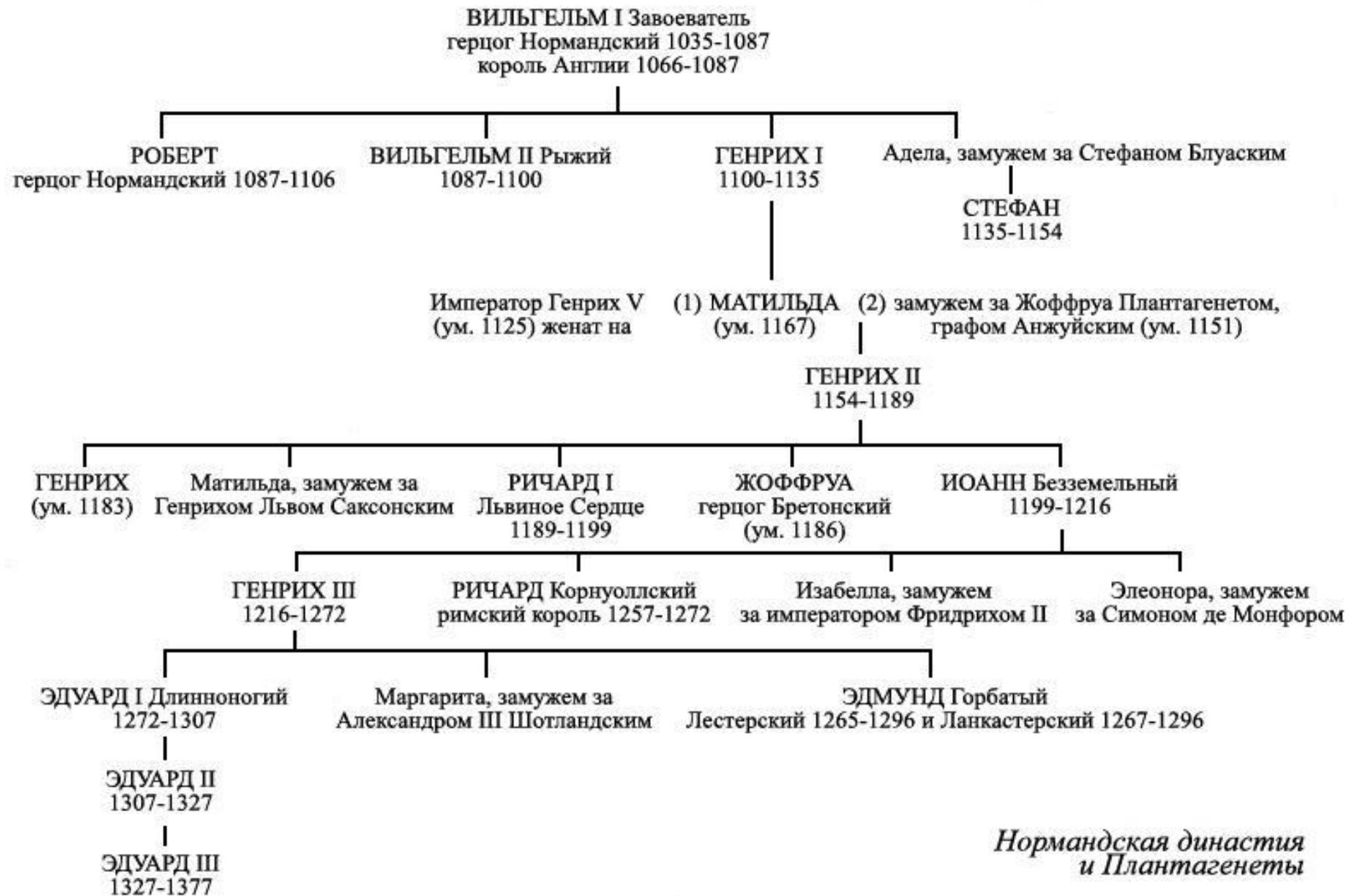
Морис Корнелиус Эшер, *День и ночь*

Отношение R называется
отношением строгого порядка,
если оно асимметрично,
антирефлексивно и транзитивно.

Например, отношения «больше»,
«меньше»

Отношение R называется **отношением нестрогого порядка**, если оно антисимметрично, рефлексивно и транзитивно.

Например, отношения «больше или равно», «меньше или равно»



Генеалогическое древо английских королей

Пусть R – некоторое бинарное отношение.

S - **обратное отношение**, если xRy выполнено тогда и только тогда, когда выполнено ySx .

Пример: конверсия

Отношение «читать» является обратным к отношению «быть читаемым»