

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кривые 2-го порядка.
Канонические уравнения
окружности, эллипса, гиперболы, параболы



Кривые второго порядка делятся на **вырожденные** и **невырожденные**.

Вырожденные кривые второго порядка это прямые, которые задаются уравнением второй степени.

Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола.

Кривая второго порядка на плоскости определяется уравнением второй степени с двумя переменными, причем единственным образом:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где A, B, C, D, E, F – числа, но A, B и C одновременно не равны нулю ?



Впервые кривые второго порядка изучались одним из учеников Платона. Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится конусная поверхность. Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получают различные геометрические фигуры, а именно эллипс, окружность, парабола, гипербола и несколько вырожденных фигур.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII веке, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, а по достижении второй космической скорости тело по параболе покинет поле притяжения Земли.



ЭЛЛИПС

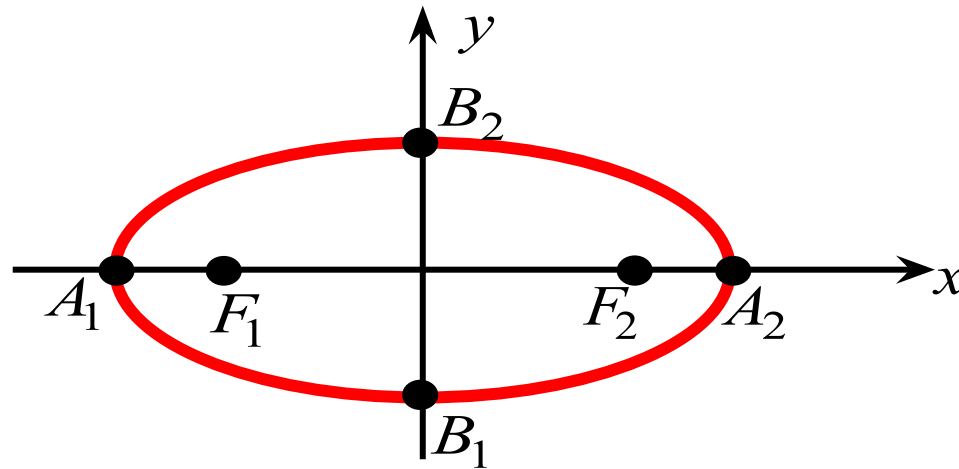
Это множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости F_1 и F_2 (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Числа a , b и c связаны между собой равенством:

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ или } b^2 - a^2 = c^2.$$

Выберем систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O : $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.



Точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 – вершины эллипса. Отрезок A_1A_2 называется **большой (фокальной) осью**, его длина $2a$; отрезок B_1B_2 – **малой осью**, его длина $2b$. Величины a и b называются **большой и малой полуосью** соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется **фокусным расстоянием**.

Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1 , r_2 называются **фокальными радиусами точки M** .



СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

- 1) Эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.
- 2) Эллипс имеет **центр симметрии** (начало координат) и две **оси симметрии** (оси Ox и Oy).

Величина ε , равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, называется **эксцентриситетом** эллипса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Величина ε характеризует форму эллипса:

$\varepsilon \approx 1$ – эллипс сильно вытянут

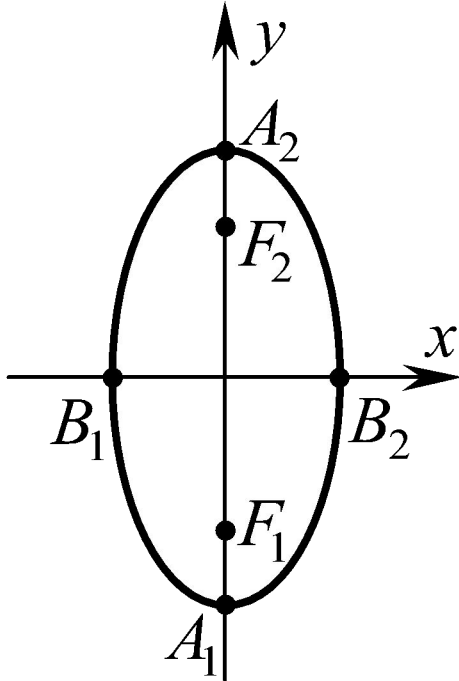
$\varepsilon \approx 0$ – эллипс имеет более округлую форму

$\varepsilon = 0$ – эллипс вырождается в окружность $x^2 + y^2 = r^2$.



Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Для этого эллипса большая ось – ось Oy , малая ось – ось Ox , фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, где

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$$

Оба случая расположения эллипса относительно осей координат можно представить в таблице 1.



ГИПЕРБОЛА

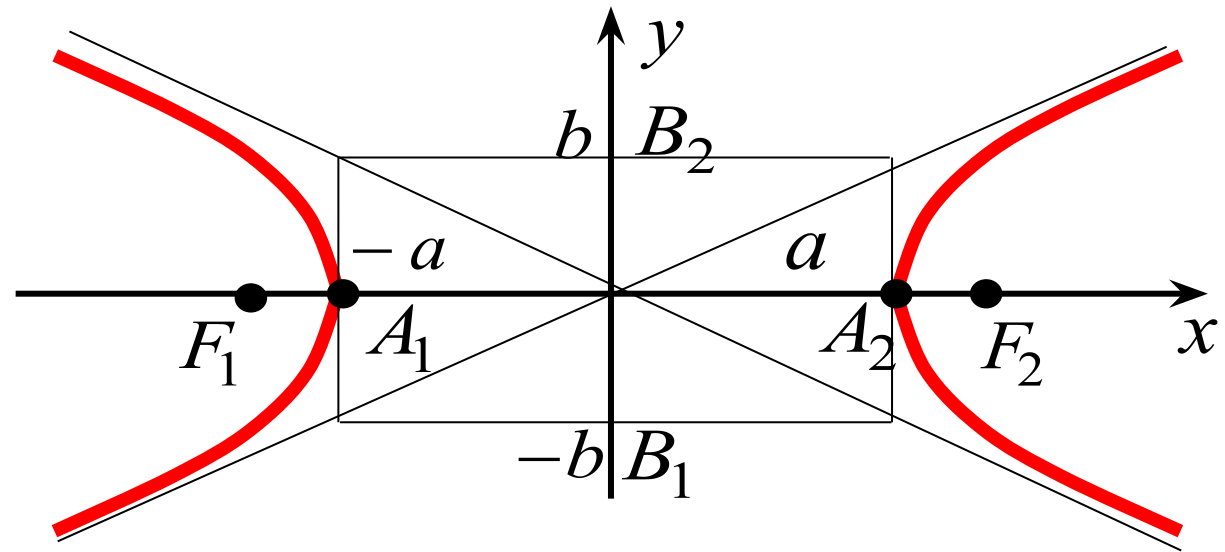
Это множество точек на плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости F_1 и F_2 (называемых фокусами) есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Числа a , b и c связаны между собой равенством:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ или } b^2 + a^2 = c^2.$$

Выберем систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O : $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.



Точки A_1, A_2 – вершины гиперболы. Отрезок A_1A_2 называется **действительной осью**, его длина $2a$; отрезок B_1B_2 – **мнимой осью**, его длина $2b$. Величины a и b называются **действительной** и **мнимой полуосью** соответственно. Длина отрезка F_1F_2 , равная $2c$, называется **фокусным расстоянием**.

Если M – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются **фокальными радиусами** точки M .



СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛЫ

- 1) В полосе, ограниченной прямыми $x=\pm a$, точек гиперболы нет.
- 2) Гипербола имеет **центр симметрии** (начало координат) и две **оси симметрии** (оси Ox и Oy).

Центр симметрии гиперболы называют **центром гиперболы**. Ось симметрии гиперболы, проходящую **через фокусы** (ось Ox) называют **действительной** (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Oy) – **мнимой** осью.

Эксцентриситет гиперболы есть отношение фокусного расстояния к его действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$.



Прямые, заданные уравнениями $y = \pm \frac{a}{b} x$ называются **асимптотами** гиперболы.

Если в уравнении гиперболы $a=b$, то гипербола называется **равнобочной** и ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптоты равнобочной гиперболы $y = \pm x$ являются биссектрисами координатных углов.

Для равносторонней гиперболы $c^2 = a^2 + a^2$, т.е. $c = a\sqrt{2}$ и ее эксцентриситет будет в этом случае равен $\sqrt{2} \approx 1,41$.



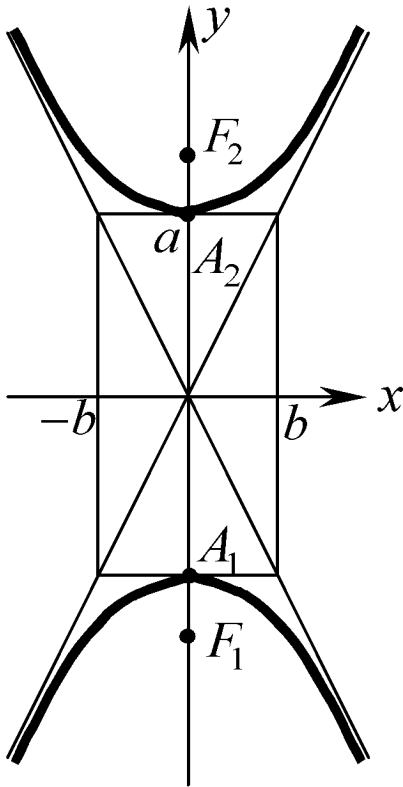
Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Для этой гиперболы действительная ось – ось Oy , мнимая ось – ось Ox и координаты фокусов $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ (где $c = \sqrt{b^2 + a^2}$)

$$\varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$$

Оба случая расположения гиперболы относительно осей координат представим в таблице 2.





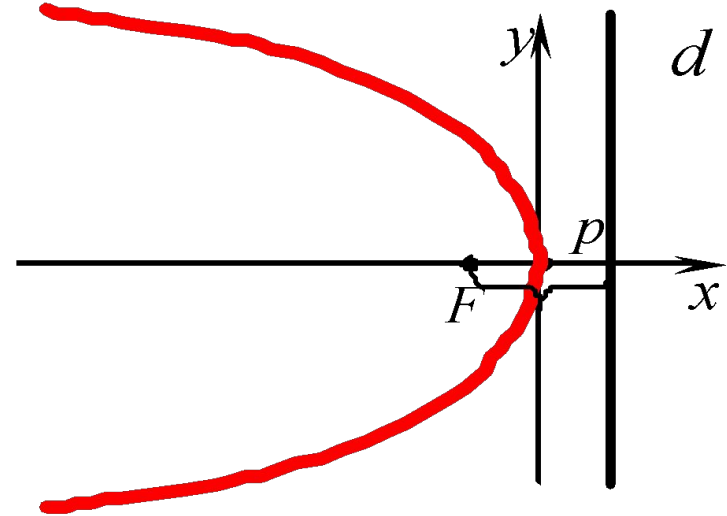
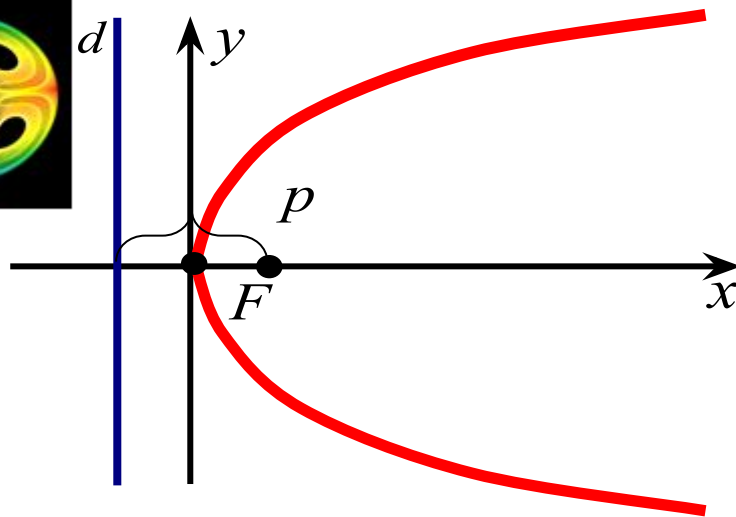
ПАРАБОЛА

Это множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой фокусом) и данной прямой d , называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы d принято обозначать p ($p > 0$).

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = \pm 2px$

Выберем систему координат так, чтобы директриса параболы d была перпендикулярна оси Ox и фокус F лежал на положительной части Ox . В этом случае $F(\pm 0,5p; 0)$ и уравнение директрисы $d: x = \pm 0,5p$.



Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется **вершиной параболы**,

Число p называется **параметром параболы**.

Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются **фокальным радиусом** r точки M .

СВОЙСТВА ПАРАБОЛЫ

- 1) Парабола лежит в полуплоскости $x \geq 0$ ($x \leq 0$).
- 2) Парабола имеет ось симметрии (ось Ox). Ось симметрии параболы называют **осью параболы**.



Если выбрать систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна Oy , фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy , то парабола будет располагаться в полуплоскости $y \geq 0$ ($y \leq 0$).

В этом случае парабола будет задаваться уравнениями $x^2 = \pm 2py$, а для директрисы и фокуса получим: $F(0; \pm 0,5p)$ и $d: y = \pm 0,5p$.

