

Поверхности второго порядка

План

- 1. Понятие поверхности второго порядка.*
- 2. Цилиндрические поверхности.*
- 3. Эллипсоид.*
- 4. Однополостный гиперболоид.*
- 5. Двуполостный гиперболоид.*
- 6. Эллиптический параболоид.*
- 7. Гиперболический параболоид.*
- 8. Конус второго порядка.*

Понятие поверхности второго порядка

Определение.

Поверхностью второго порядка называется поверхность в прямоугольной системе координат, определяемая алгебраическим уравнением второй степени.

Цилиндрические поверхности

Определение.

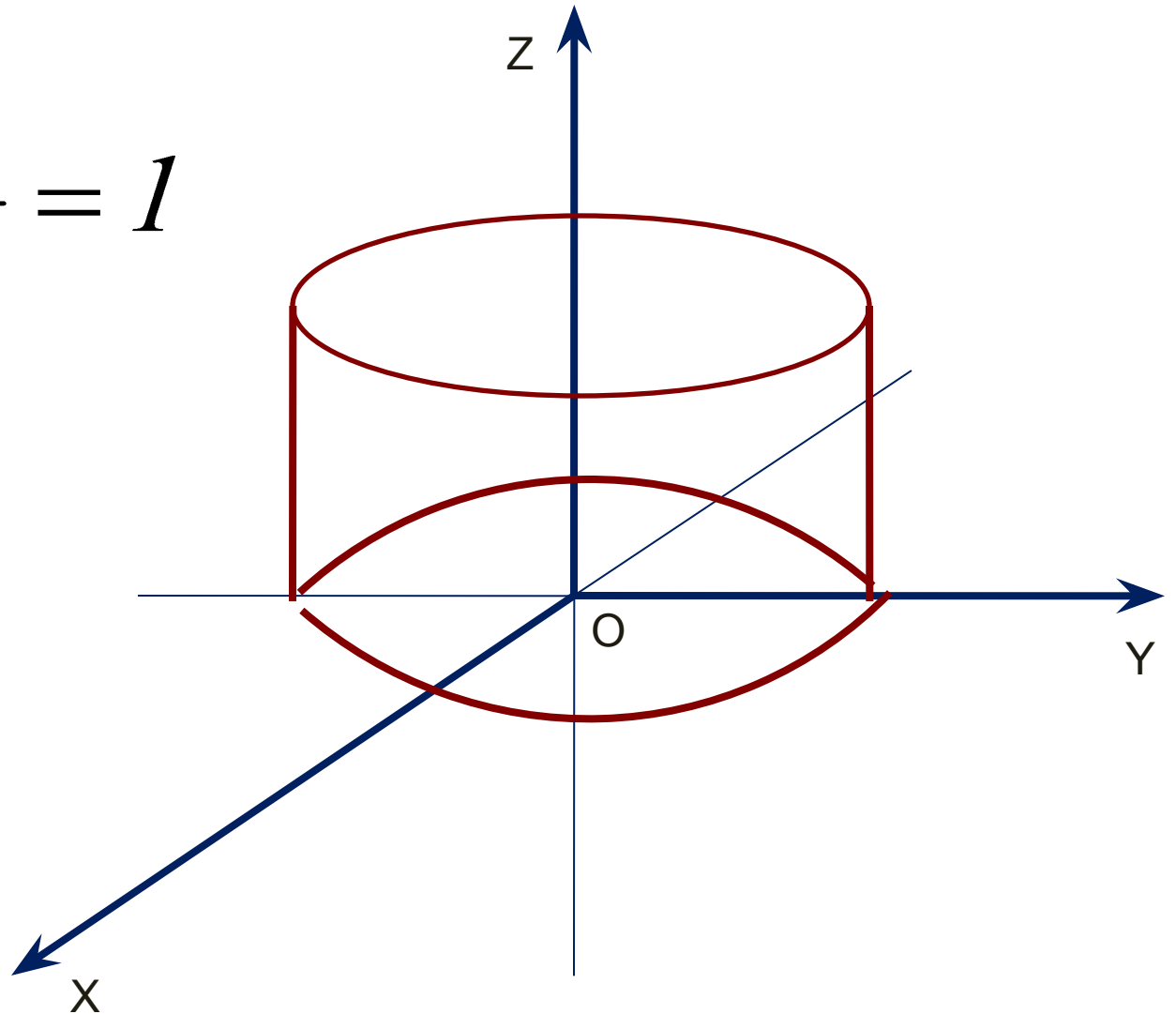
*Цилиндрическими
поверхностями
называются поверхности,
образованные линиями,
параллельными какой - либо
фиксированной прямой.*

Цилиндрические поверхности

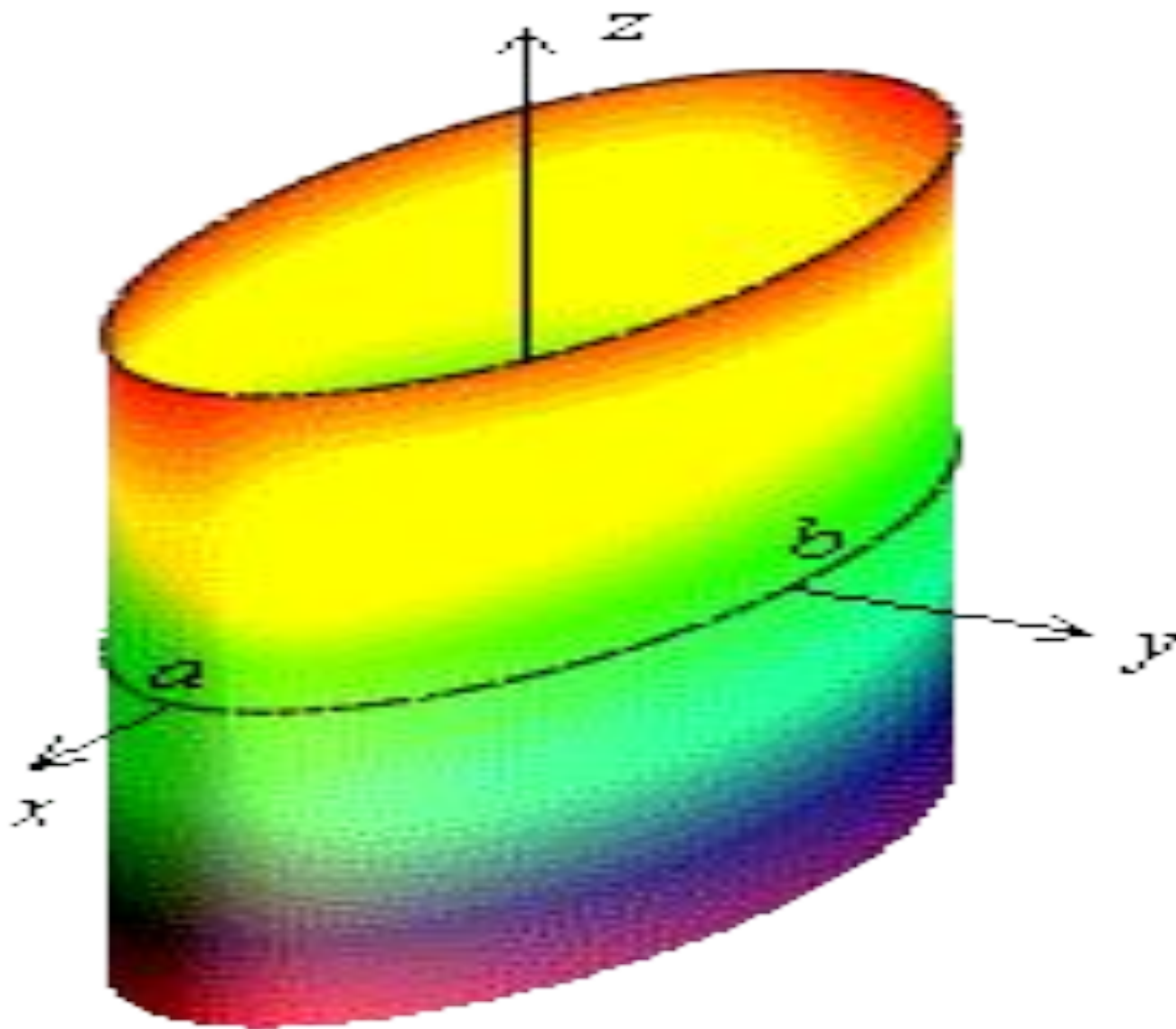
Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z , т.е. направляющие параллельны оси Oz . Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих.

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

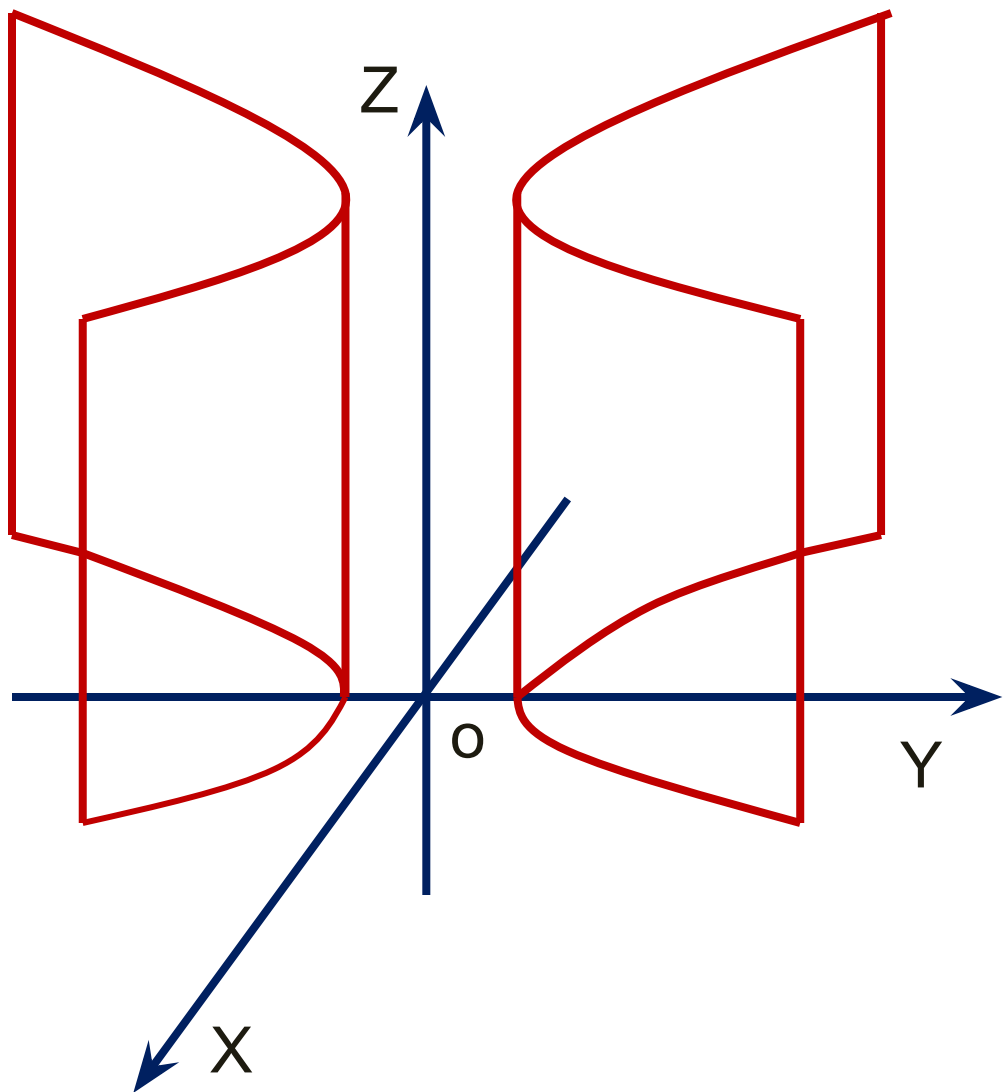


Эллиптический цилиндр

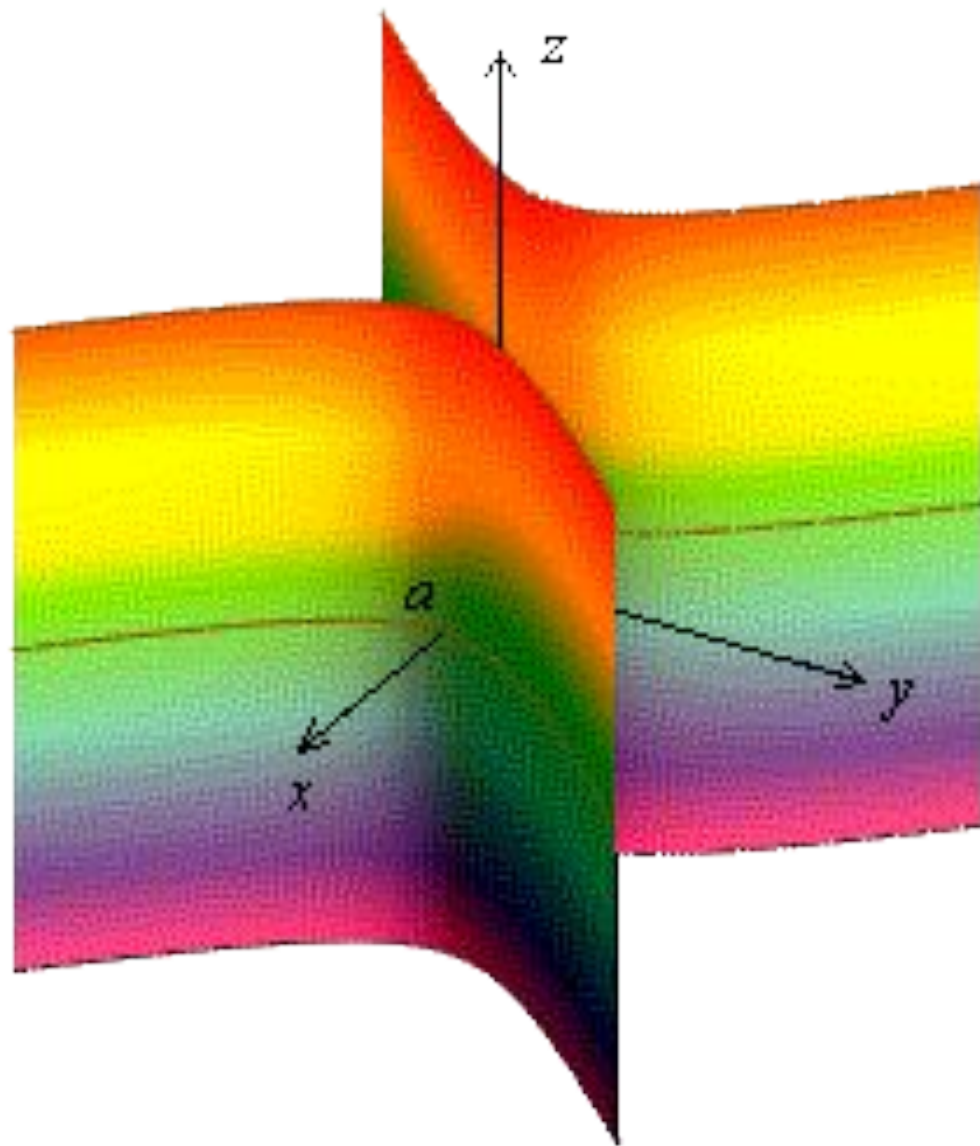


Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

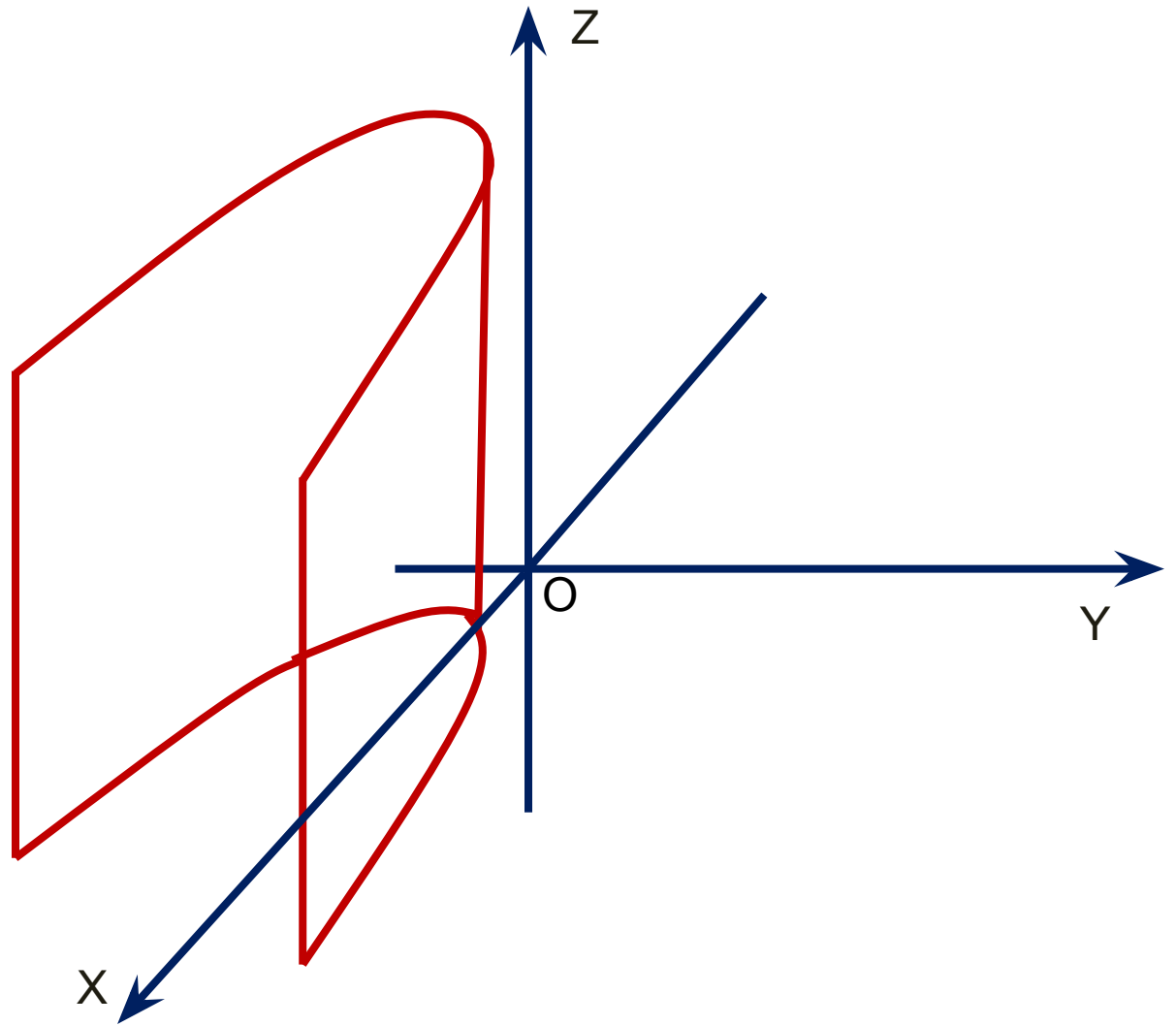


Гиперболический цилиндр

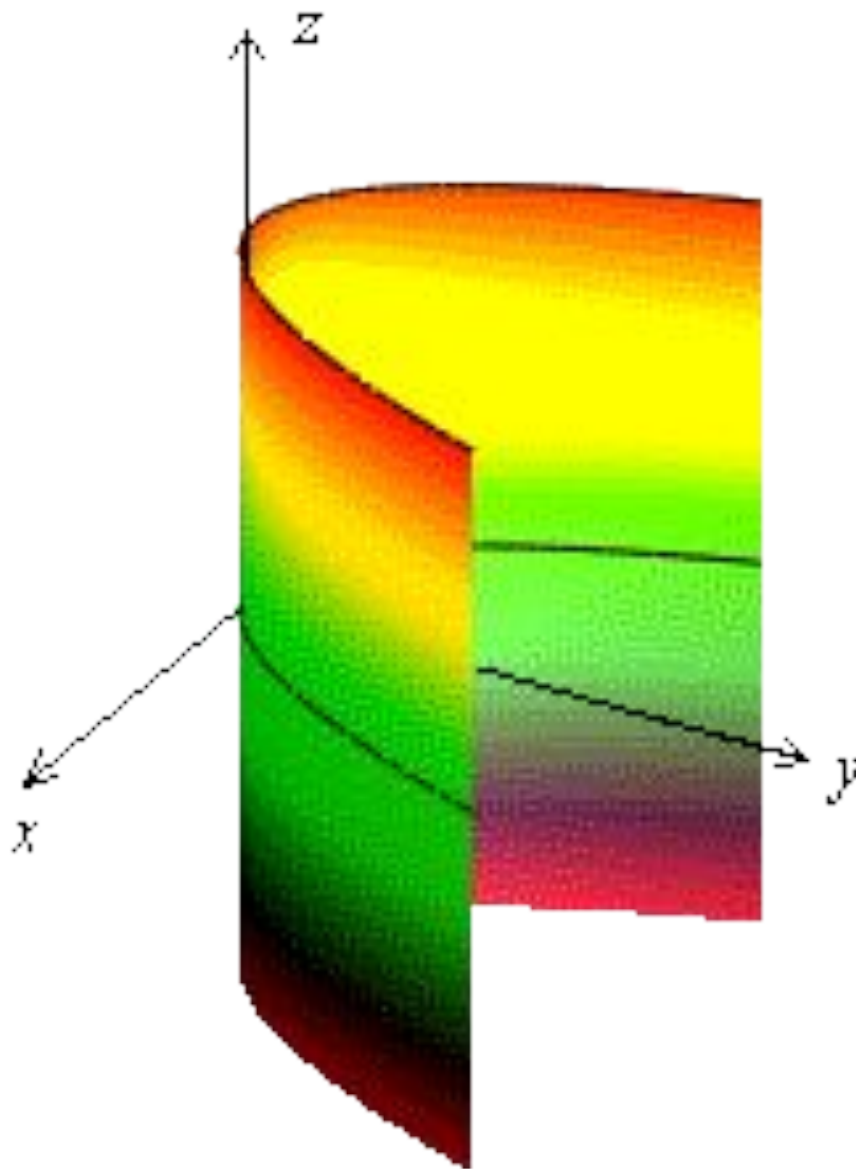


Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$



Параболический цилиндр



Поверхности вращения

Определение.

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d , называется поверхностью вращения с осью вращения d .

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность вращения с осью вращения Oz .

Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy ,

$F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox .

Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двуполостный гиперболоид вращения

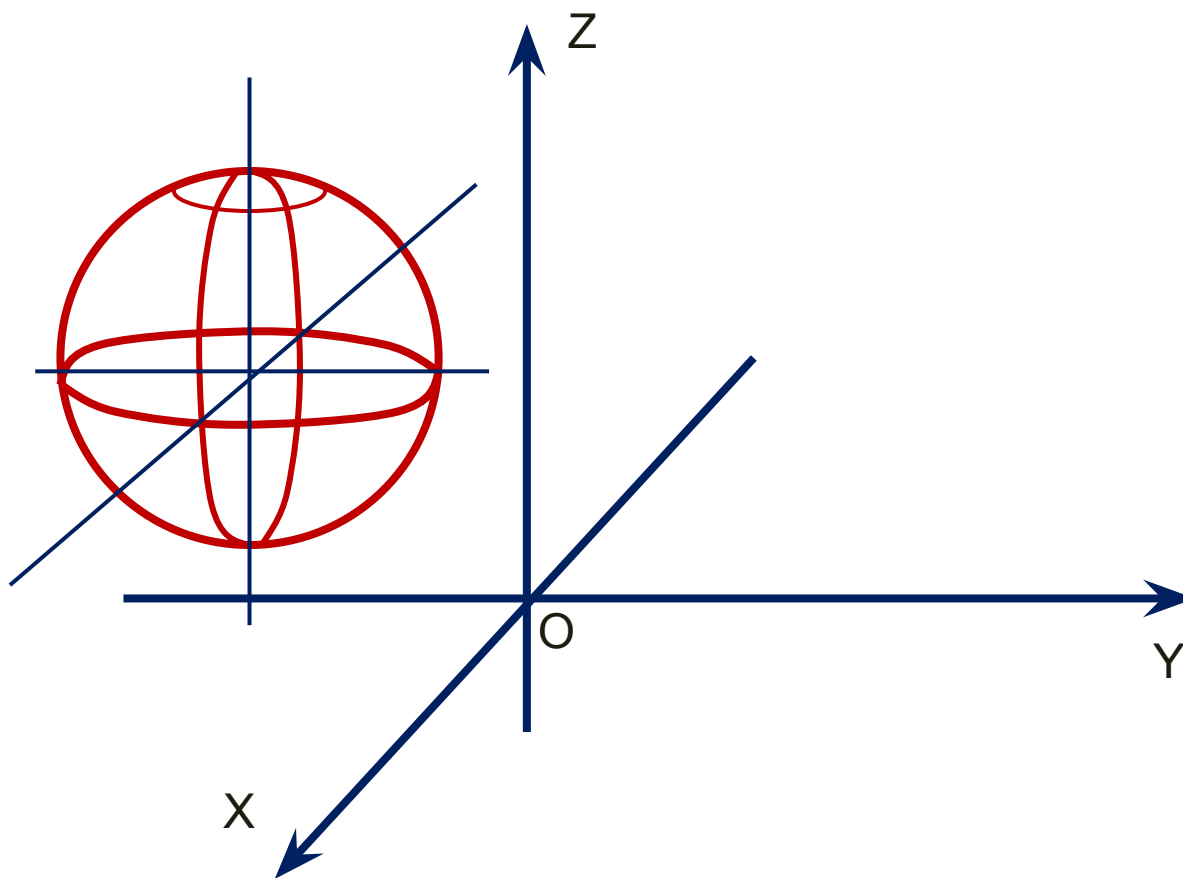
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Параболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

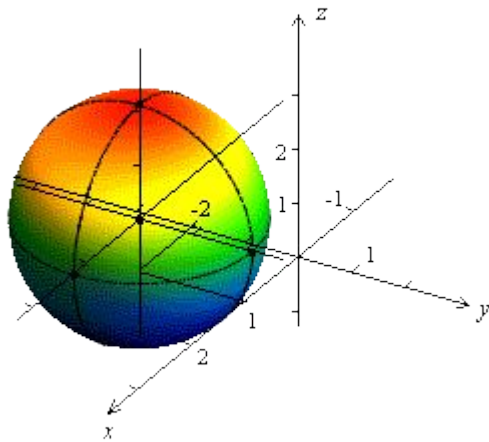
Сфера

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$



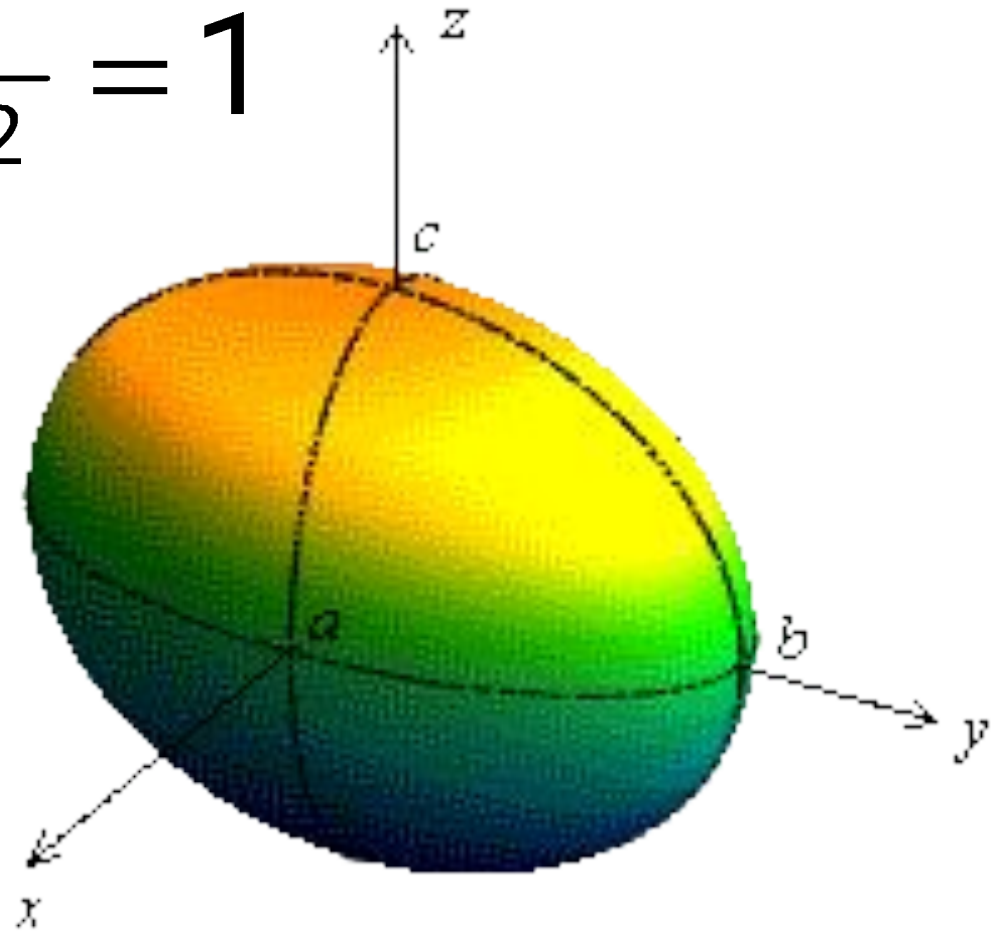
Сфера

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$



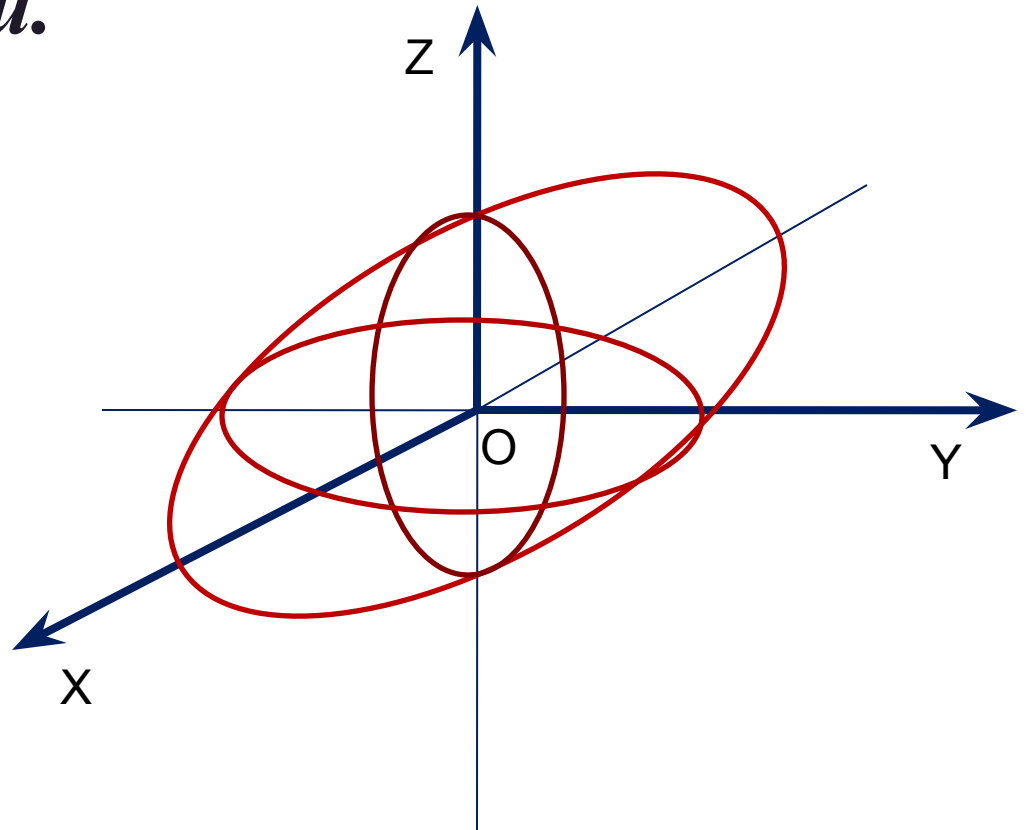
Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Эллипсоид

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.

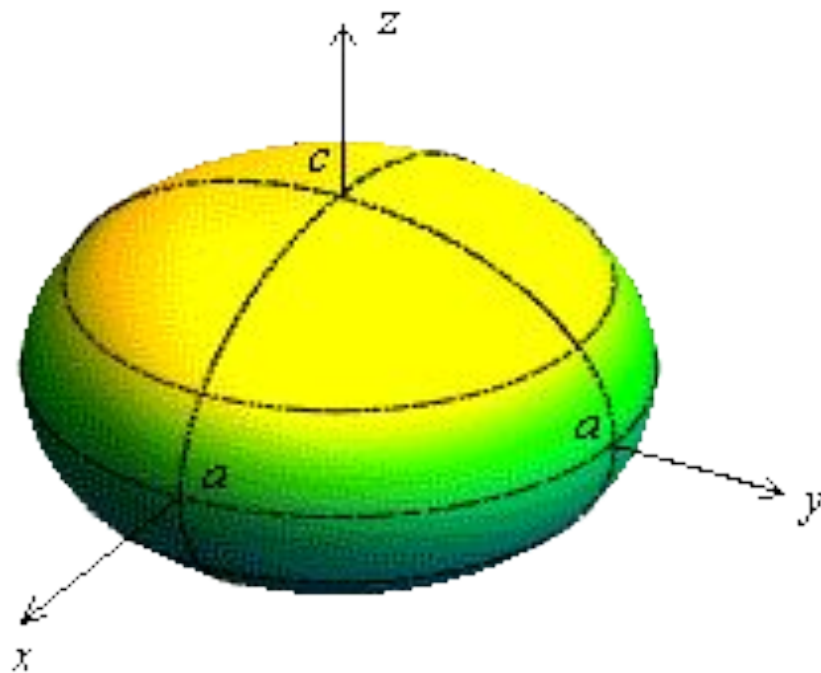


*Если две полуоси равны друг другу ($a = b$),
то эллипсоид называется эллипсоидом вращения.
Эллипсоид вращения может быть получен
вращением эллипса вокруг одной из осей.*

Сам эллипсоид может быть получен из эллипса

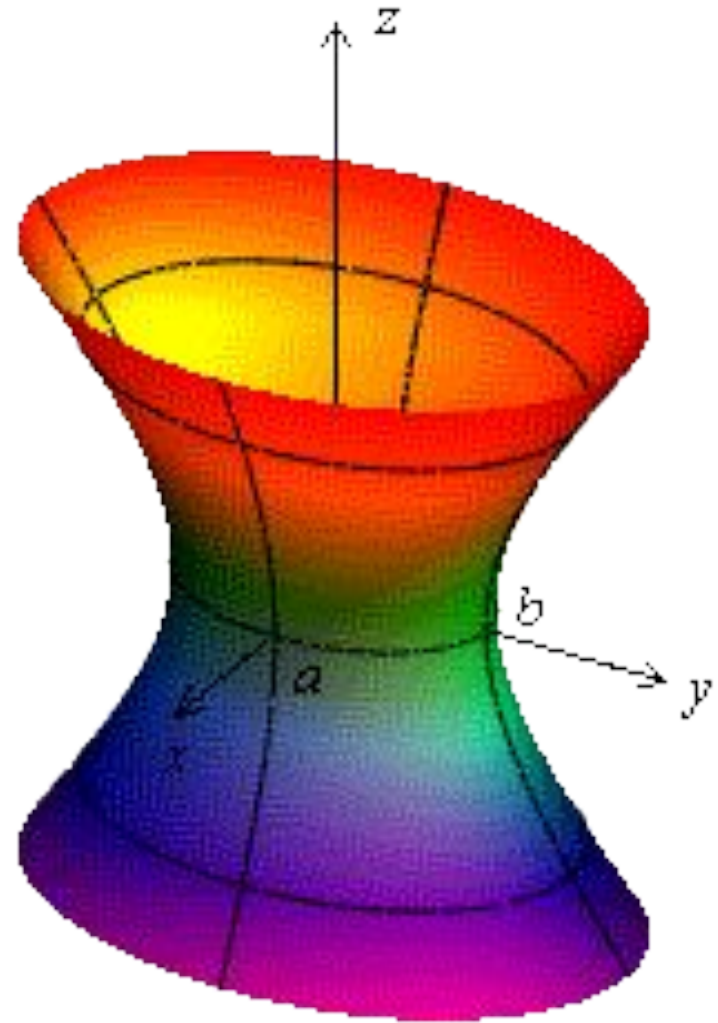
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{лежащего в плоскости, при}$$

вращении его вокруг оси



Однополостный гиперболоид

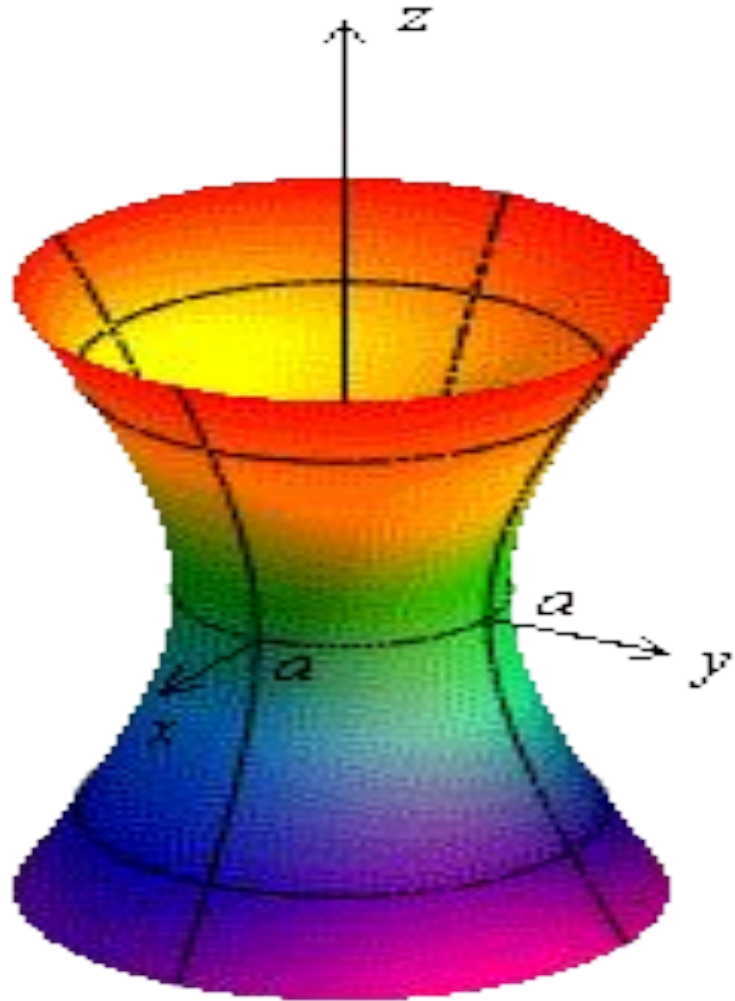
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Однополостный гиперболоид

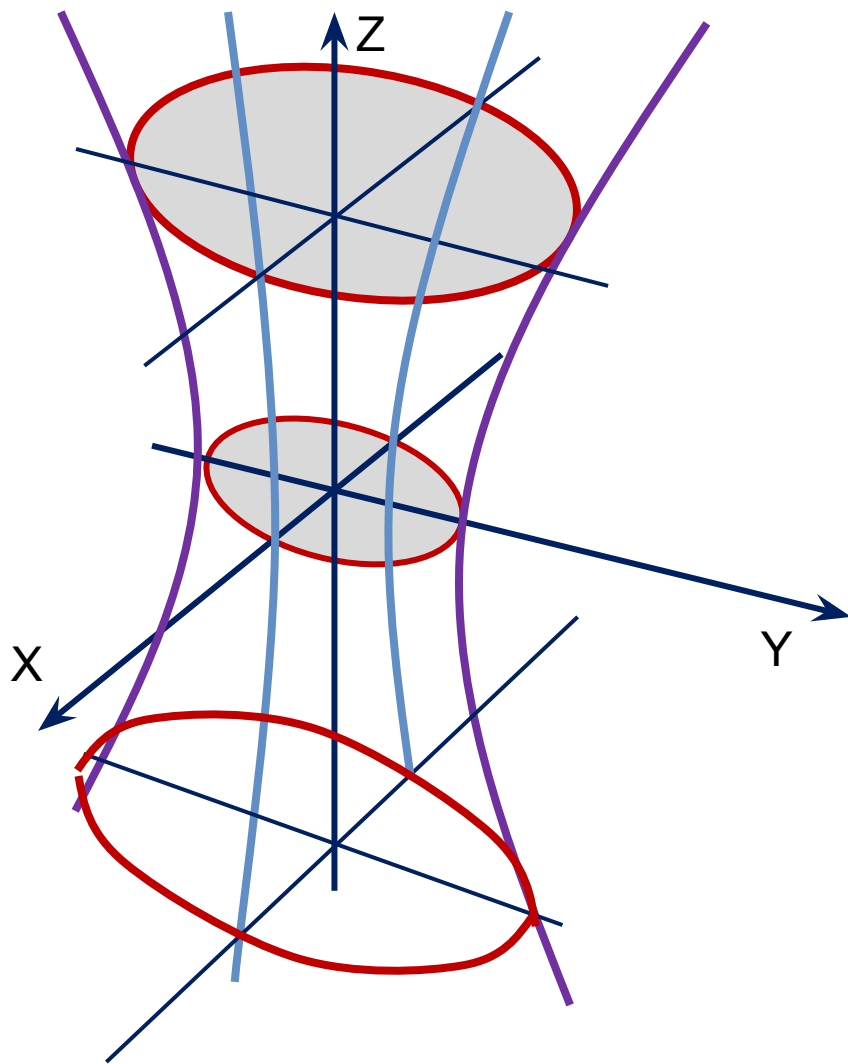
$$a = b$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



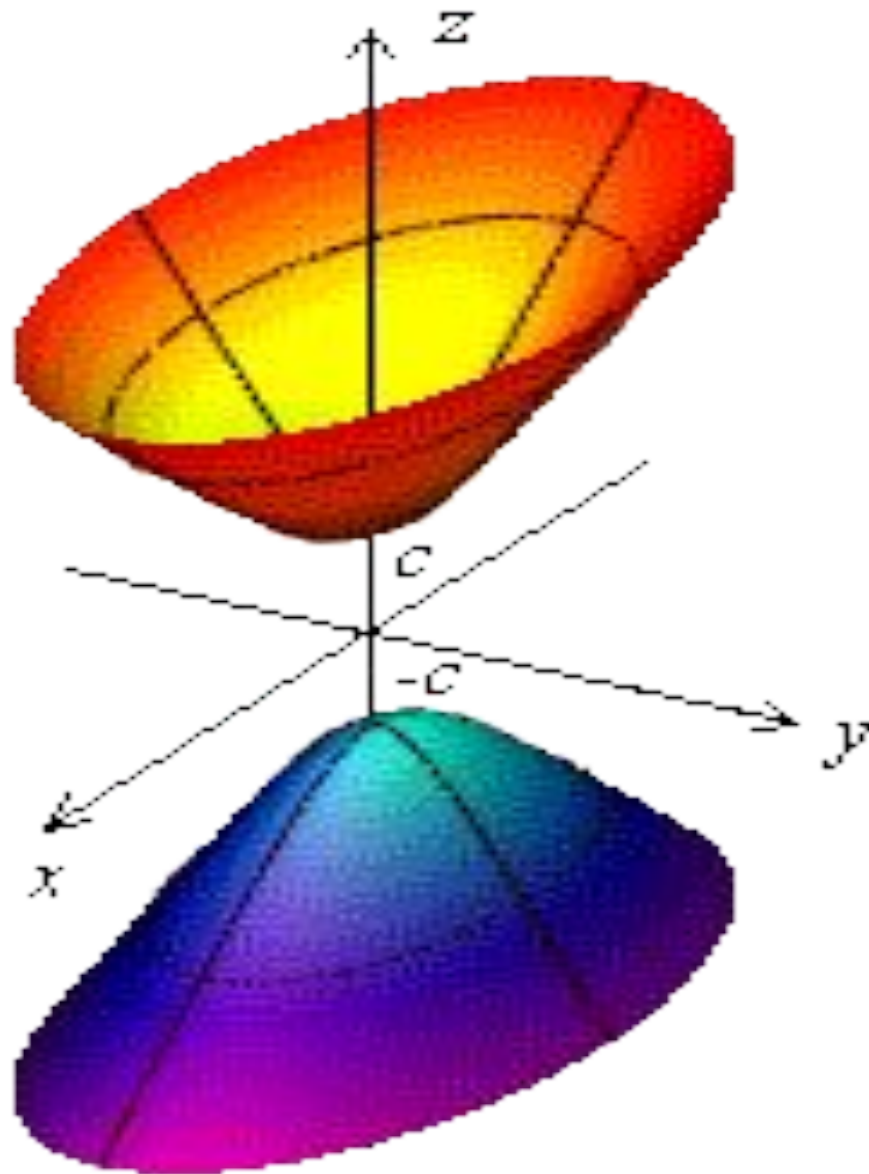
Однополостный гиперболоид

В сечении однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями и гиперболы.



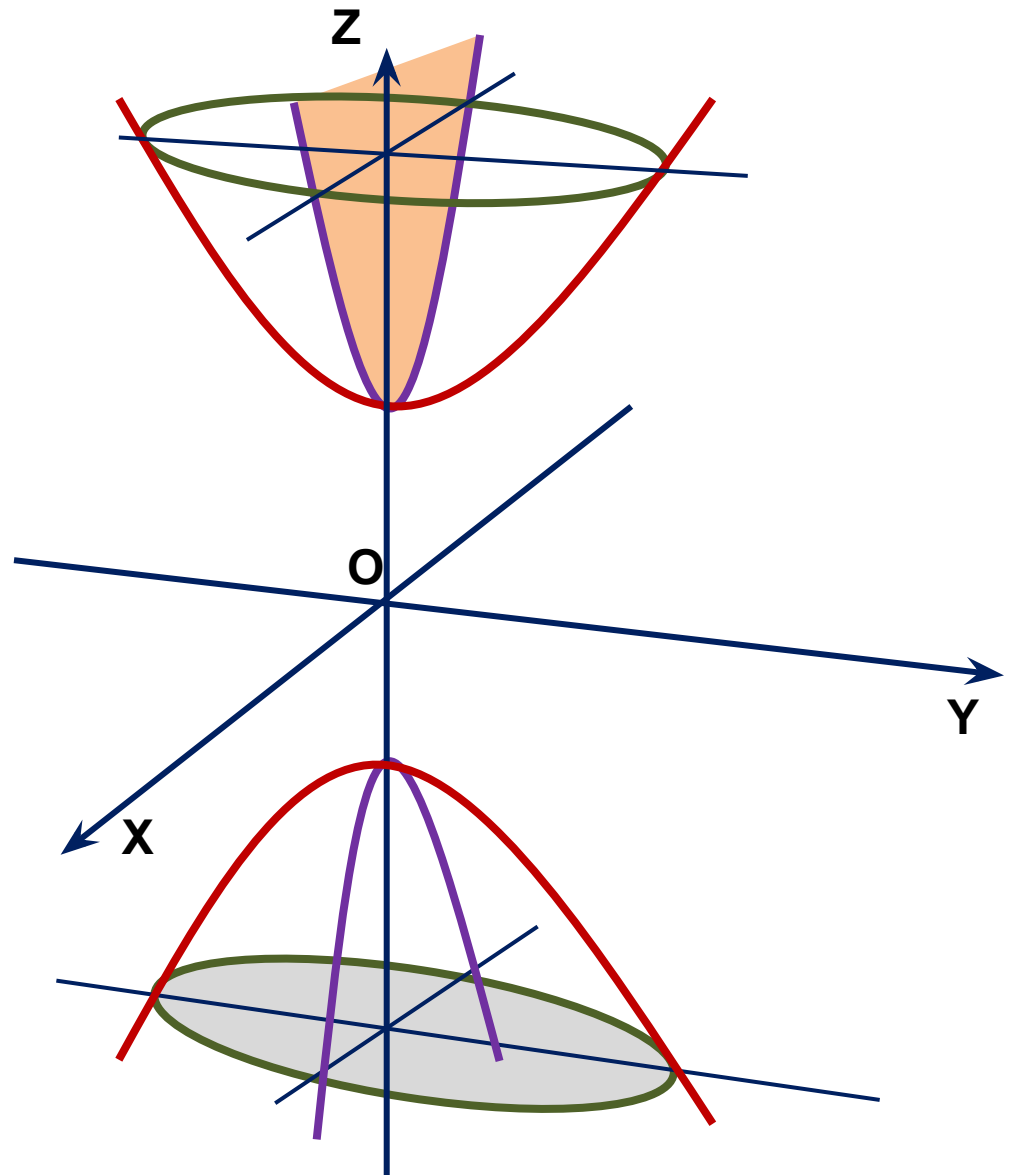
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

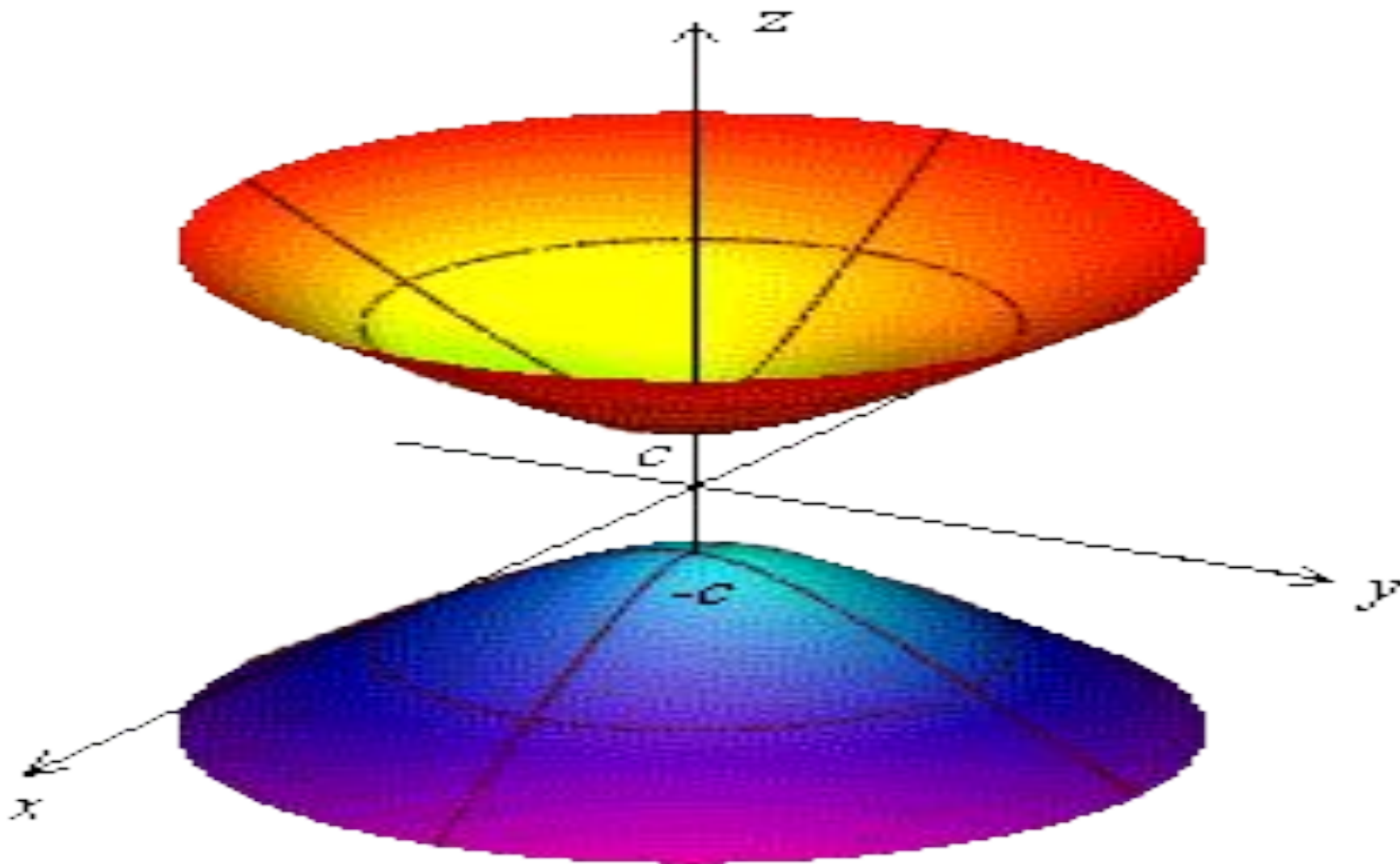


Двуполостный гиперболоид

В сечении двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями и гиперболы.



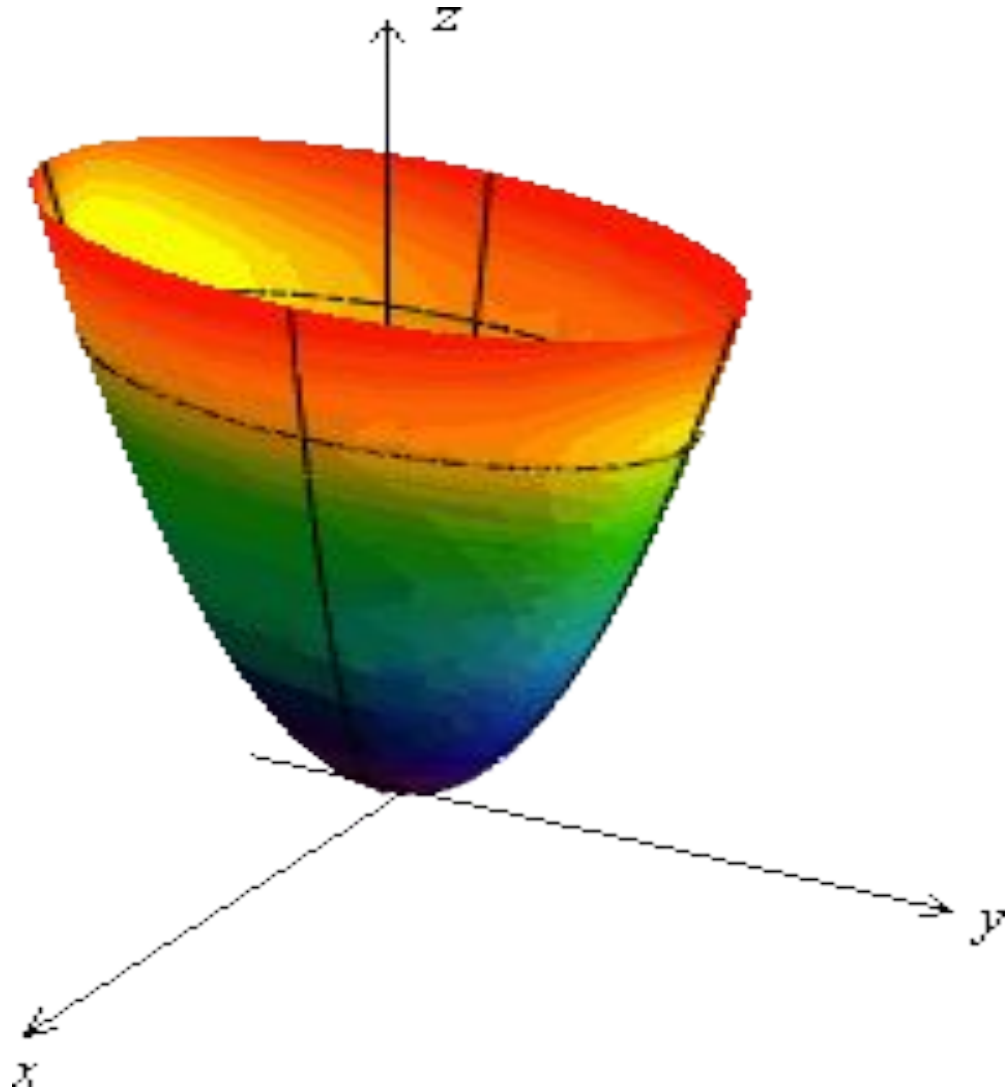
Двуполостный гиперболоид



Эллиптический параболоид

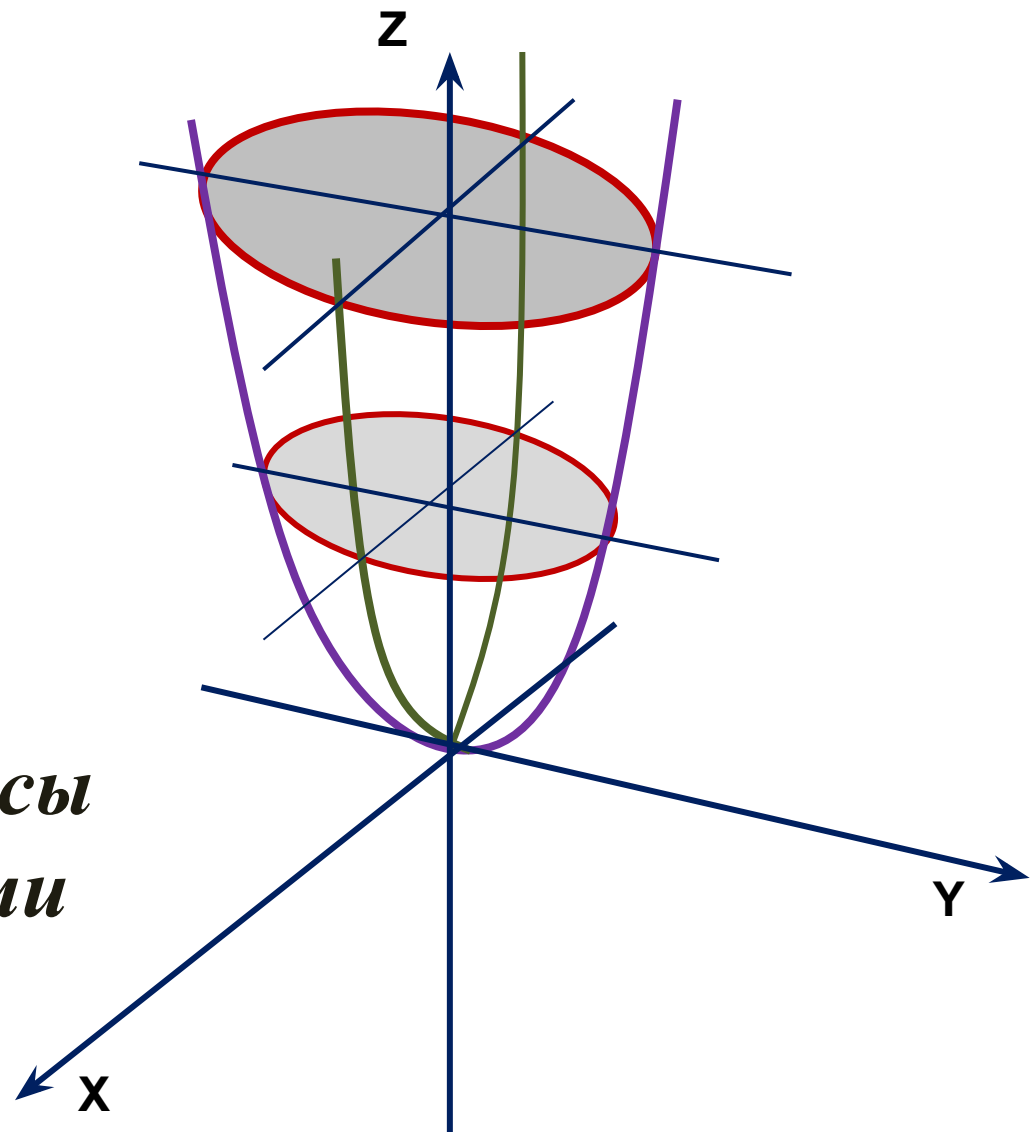
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

где $p > 0, q > 0$

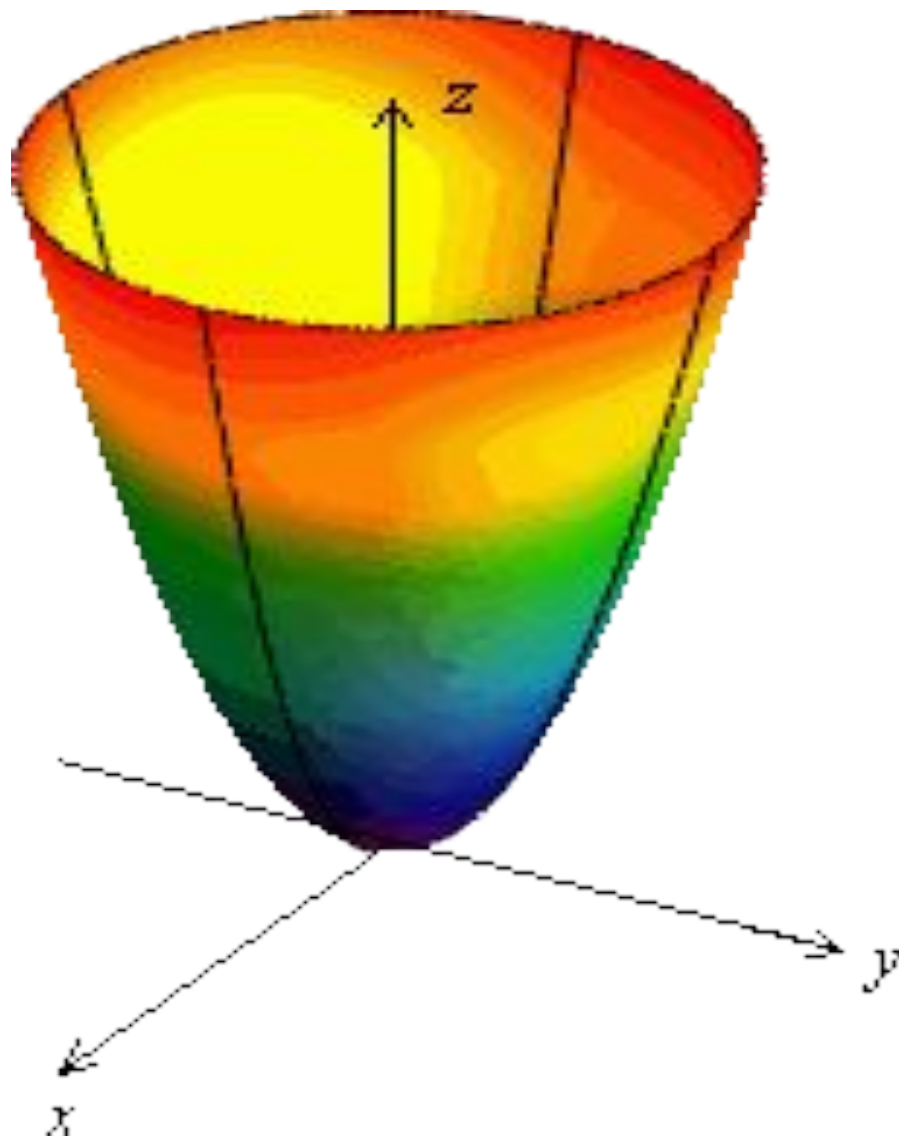


Эллиптический параболоид

В сечении эллиптического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями и параболы.

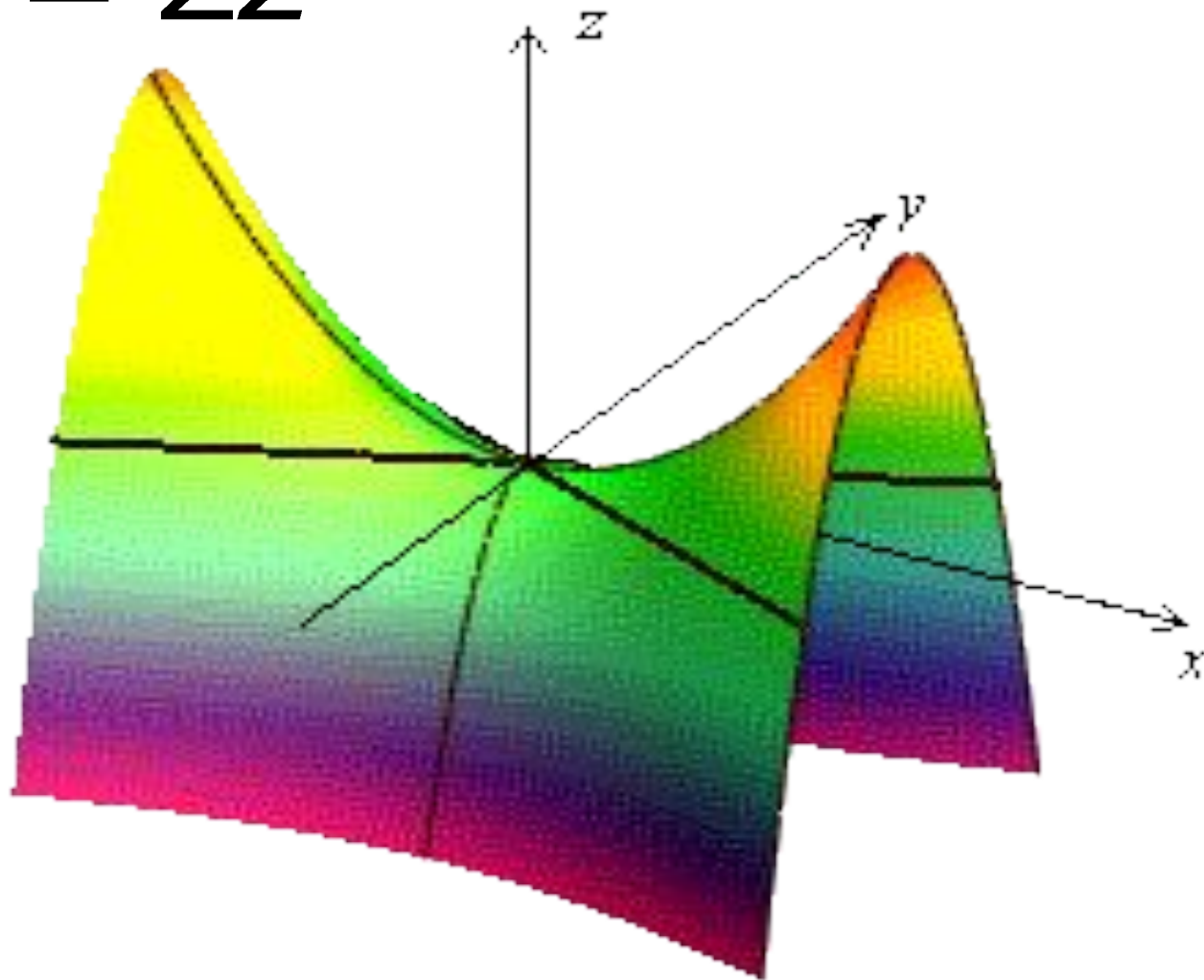


Эллиптический параболоид



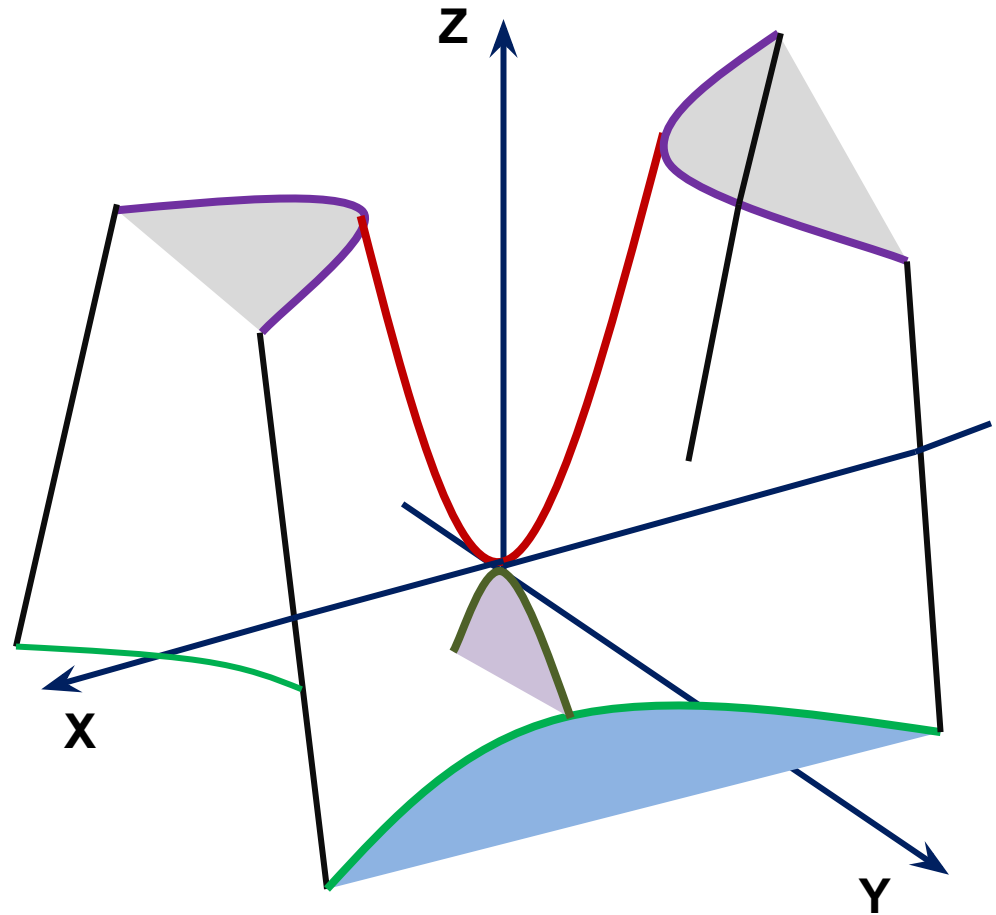
Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$



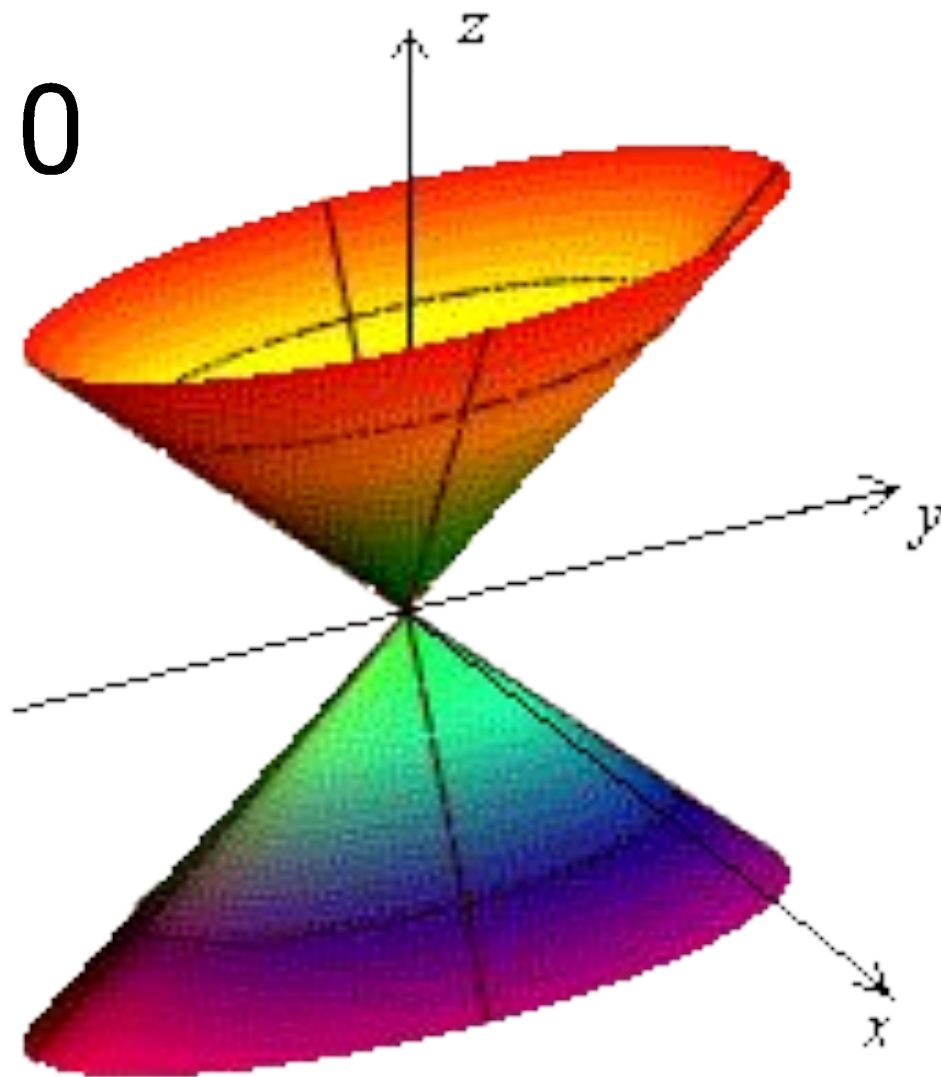
Гиперболический параболоид

В сечении гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются параболы, ветви которых направлены вверх и вниз, вправо и влево, и гиперболы.



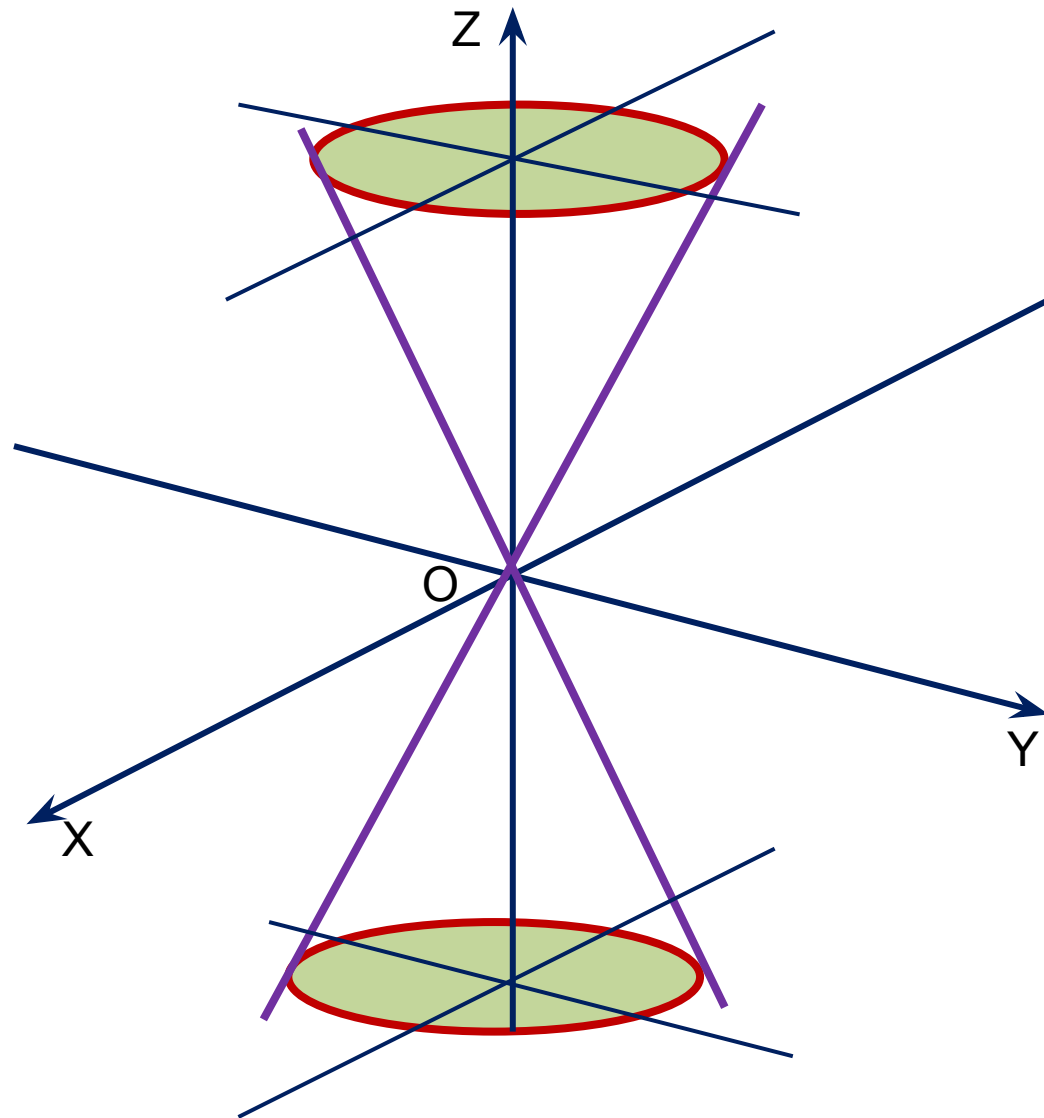
Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Конус второго порядка

В сечении конуса второго порядка плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями и пары пересекающихся прямых.



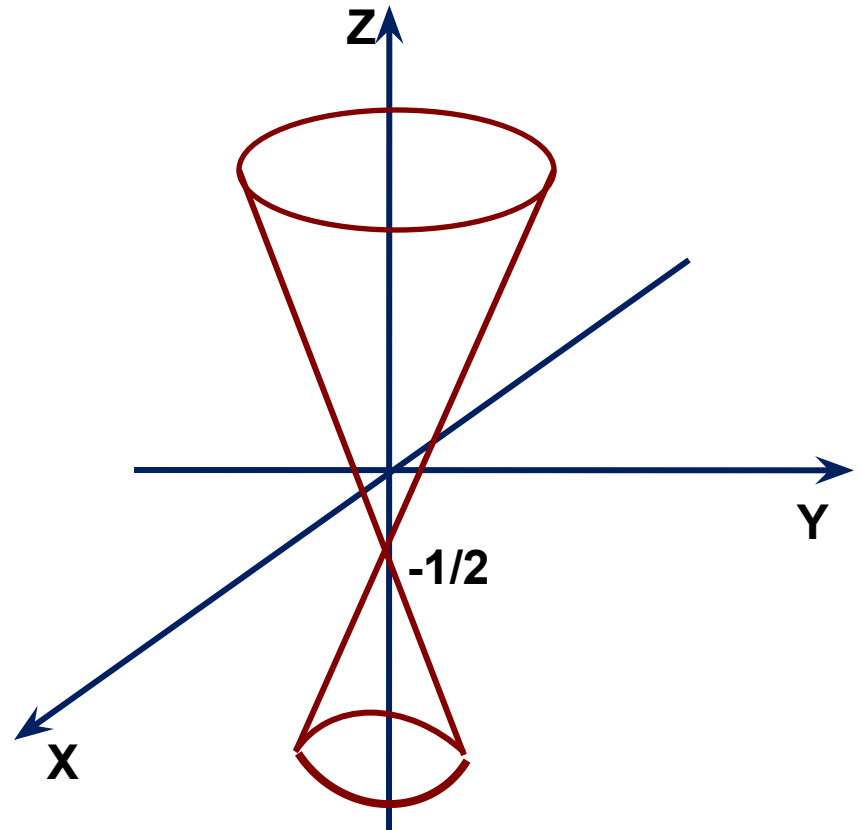
Пример. В плоскости Oyz дано уравнение линии $y - 2z + 1 = 0$. Составить уравнение поверхности, образованной при вращении этой линии вокруг оси Oz . Построить схематический чертеж.

Решение.

$$y = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - 2z + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - (2z + 1)^2 = 0$$



Пример. В плоскости Oyz дано уравнение линии $y - z^2 - 2 = 0$. Составить уравнение поверхности, образованной вращением этой линии вокруг оси Oy . Построить схематический чертеж.

Решение.

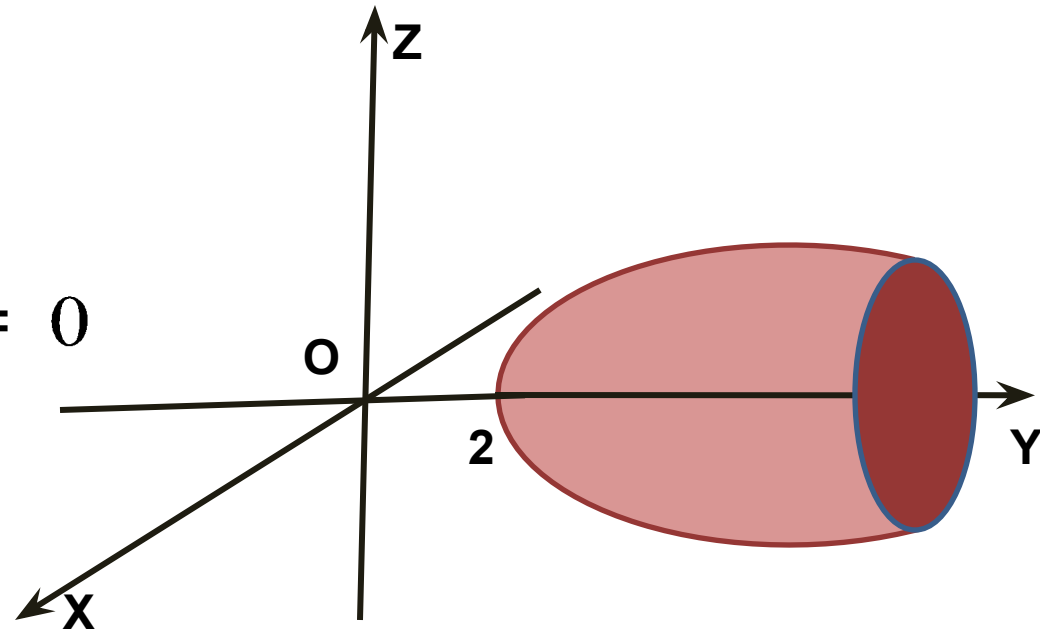
$$z = \pm \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$y - \left(\pm \sqrt{x^2 + z^2} \right)^2 - 2 = 0$$

$$y - x^2 - z^2 - 2 = 0$$

$$x^2 + z^2 = y - 2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} y - 1$$



**Спасибо
за внимание!!!**

