

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными имеет вид**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменные,

$a_{ij}$  числовые коэффициенты

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Краткая запись:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Коэффициенты при неизвестных  
оставляют  
прямоугольную таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называемую **матрицей**  
**СИСТЕМЫ.**

Первый индекс у коэффициента  $a_{ij}$  означает номер уравнения, второй – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_m$  называются **свободными членами уравнений системы.**

Если свободные члены равны нулю, то система называется **однородной,**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

в противном случае – **неоднородной.**

## Матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называют **расширенной матрицей системы (1.2)**



*Решение системы* (1.1), (1,2)- это упорядоченный набор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  из  $n$  чисел, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы превращается в тождество.

Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной** или **противоречивой**. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Совместные системы подразделяют на *определенные*, обладающие единственным решением, и *неопределенные*, обладающие множеством решений.

Однородная система всегда совместна, так как имеет, по крайней мере, нулевое решение

Если ввести матрицу коэффициентов

Матрицу переменных  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

и матрицу свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

То система линейных уравнений может быть записана  
в матричной форме

$$A \cdot X = B$$



# Методы решения систем линейных уравнений

## *1. Метод Гаусса.*

Метод заключается в последовательном исключении переменных путем некоторых элементарных преобразований, в результате чего система приводится к ступенчатому виду с нулями ниже главной диагонали. Переменные находятся, начиная с последних по номеру переменных.

# Методы решения систем линейных уравнений

## *2. Метод Гаусса-Жордана.*

Представляет собой продолжение метода Гаусса, заключающееся в том, что нули получают также выше главной диагонали. Элементы на главной диагонали приводят к единицам, в результате чего из полученной матрицы выписывается сразу решение системы.

# Методы решения систем линейных уравнений

## 3. Метод Крамера.

Переменные могут быть найдены по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots; x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$
$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

где  $\Delta$  - определитель матрицы коэффициентов перед переменными,

$\Delta_j$  - определитель матрицы, получаемой из матрицы  $A$  заменой  $j$ -го столбца на столбец свободных членов.

# Методы решения систем линейных уравнений

## 4. Метод обратной матрицы.

Из матричного уравнения  $AX=B$  следует, что  $X=A^{-1}B$ .  
Найдя обратную матрицу и умножив ее на матрицу свободных членов, получаем матрицу переменных.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$



# Теорема. (теорема Кронекера - Капелли)

Для того чтобы система линейных уравнений (1.2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был равен рангу её расширенной матрицы.

## Теорема.

Если система линейных уравнений (1.2) совместна, то:

- 1) для того, чтобы эта система была определенной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен числу её переменных;
- 2) для того, чтобы эта система была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был меньше числа её переменных.



**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 42. \end{cases}$$

# Метод Гаусса

$$r(A_p) = r \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 22 \\ 4 & 5 & 3 & 42 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-2) \uparrow (-4) \downarrow \\ \leftarrow \quad \downarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} = r \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \downarrow \\ \leftarrow \end{array} =$$

$$= r \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 2, \quad r(A_p) = r(A) = 2, \quad n = 3 > r(A) = 2$$

**Теорема.** Элементарные преобразования расширенной матрицы данной системы, выполненные лишь над её строками, превращают эту матрицу в расширенную матрицу другой системы, равносильной данной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 - x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + x_3 = 10 - x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases}$$

$x_1, x_2$  – базисные переменные

$x_3$  – свободные переменные

$x_3 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_1 = 4$  – частное решение системы.

## Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 39. \end{cases}$$



# Метод Крамера

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 22 & 3 & 1 \\ 39 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 22 & 1 \\ 5 & 39 & 3 \end{vmatrix} = -15,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 5 & 4 & 39 \end{vmatrix} = -9,$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{-3} = 5, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$



## Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

## Теорема

Чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был меньше числа переменных.

**Следствие.** Если матрица системы однородных уравнений квадратная, то для того, чтобы система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель её матрицы был равен нулю.

Найдем ранг матрицы системы

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ (-1) \uparrow \\ \end{matrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-7) \\ \leftarrow \downarrow \\ \leftarrow \leftarrow \end{matrix} =$$

$$= r \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -17 \\ 0 & 21 & -51 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$r(A) < n, \quad r = 2, \quad n = 3$$

Составим систему однородных уравнений эквивалентную данной

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -6x_3 \\ 7x_2 = 17x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 6x_3 \\ x_2 = \frac{17}{7}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{17}{7}x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = 9, \quad x_2 = 17, \quad x_3 = 7$$