

Векторы

План.

1. Векторное n – мерное пространство.
2. Пространство R^2 и R^3 .
3. Скалярное произведение векторов. Длина вектора. Угол между векторами.
4. Плоскость в трехмерном пространстве.
5. Прямая линия в трехмерном пространстве.
6. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис пространства R^n .

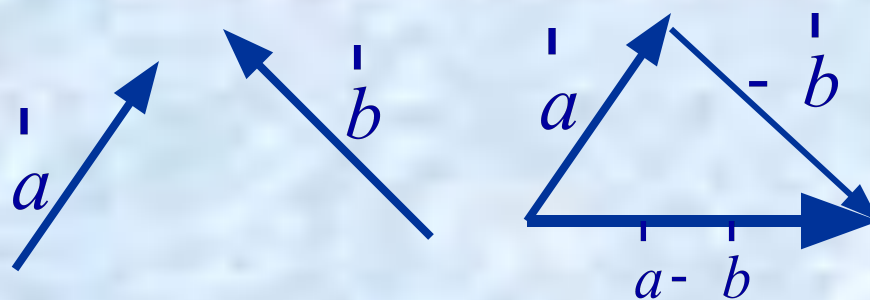
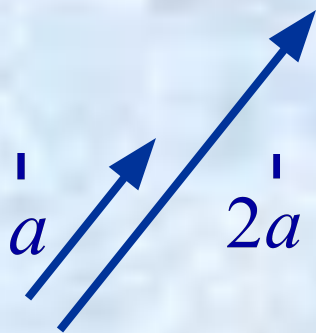
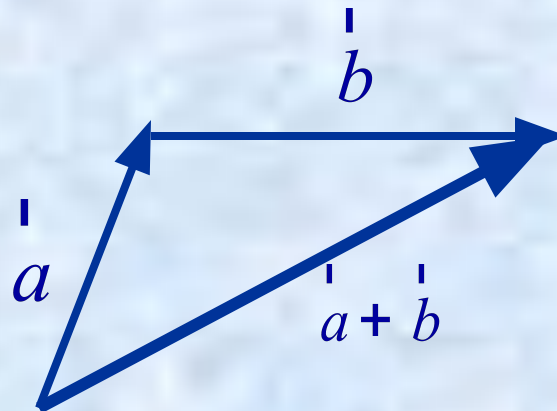
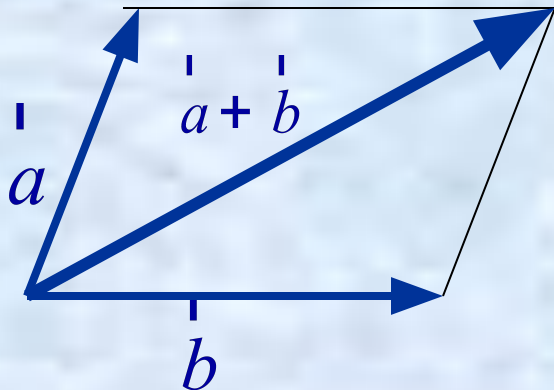
Векторное n – мерное пространство.

- *Определение. Пусть n – любое натуральное число. Упорядоченная совокупность n чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется n – мерным вектором.*

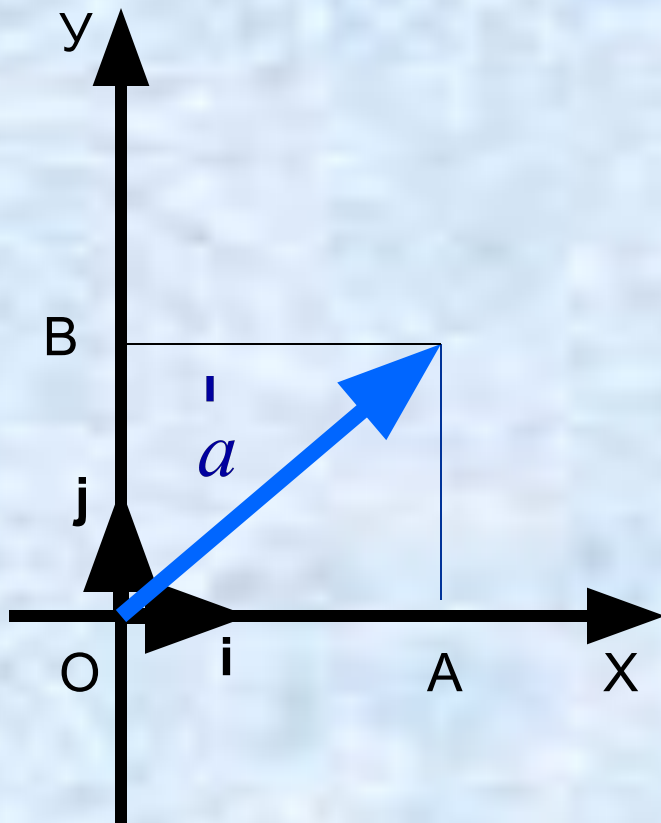
$$\overset{|}{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \overset{|}{a}(a_i)_n$$



Линейные действия над векторами



Пространство \mathbb{R}^2 .

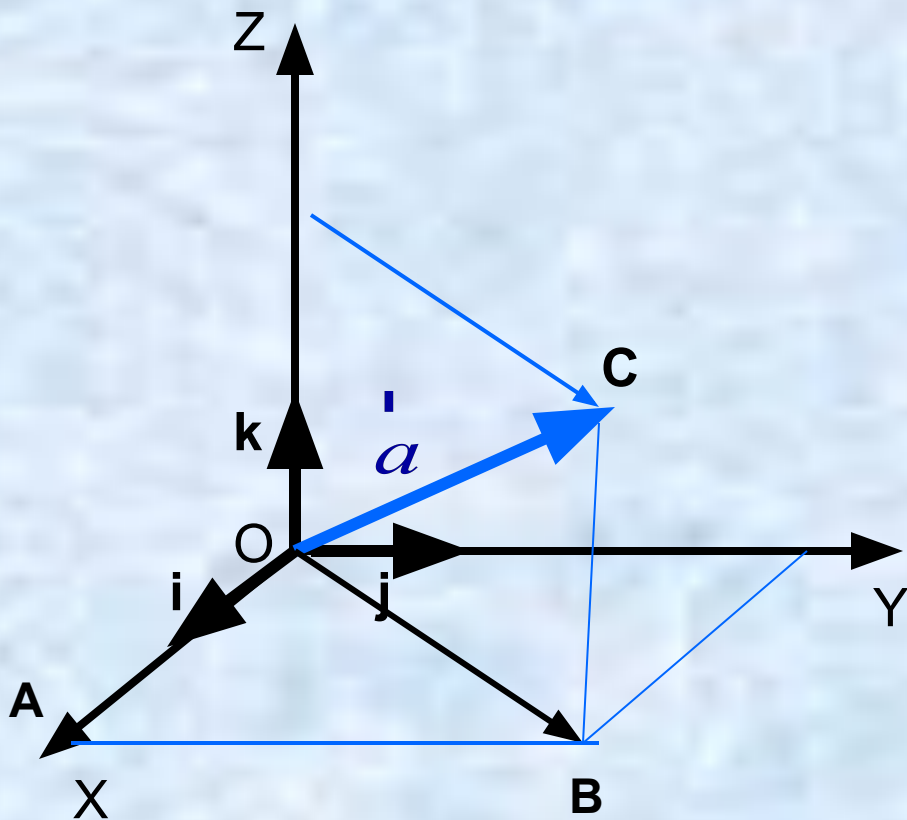


$$\vec{OA} = xi, \quad \vec{OB} = yj$$

$$\vec{a} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\vec{a} = xi + yj$$

Пространство \mathbb{R}^3 .



$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \\ a &= xi + yj + zk \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos j, \quad 0 \leq j \leq \pi$$

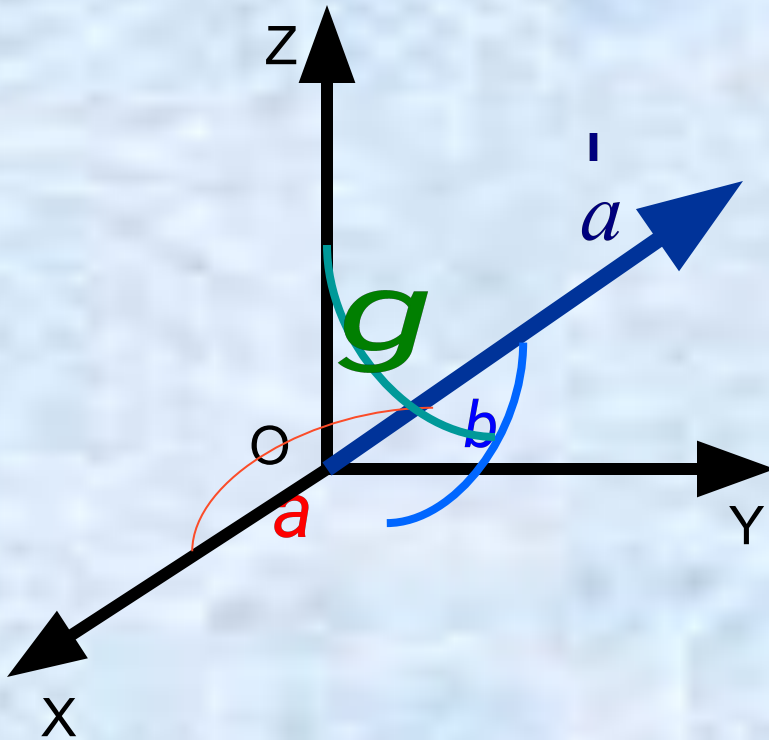
$$\cos j = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \quad \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos j = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Направляющие косинусы



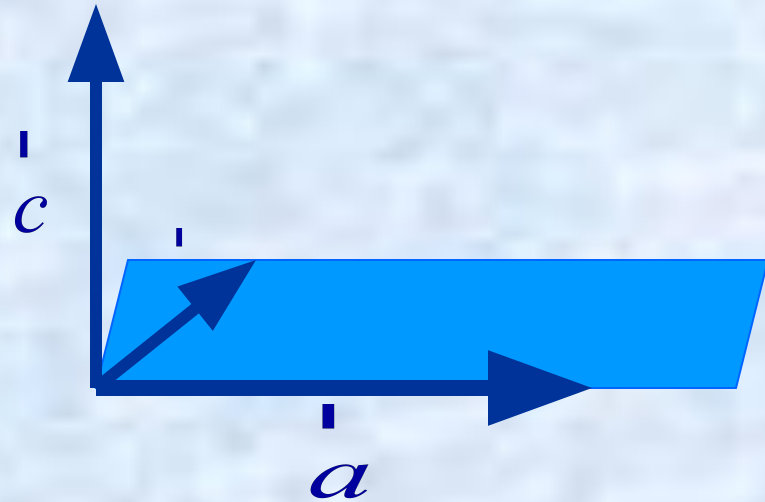
$$\cos a = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos b = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos g = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Векторное произведение векторов

$$|c| = |a| \times |b| \times \sin \alpha$$



$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения

$$1^{\circ} \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad - \text{условие коллинеарности}$$

$$2^{\circ} \quad \vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$

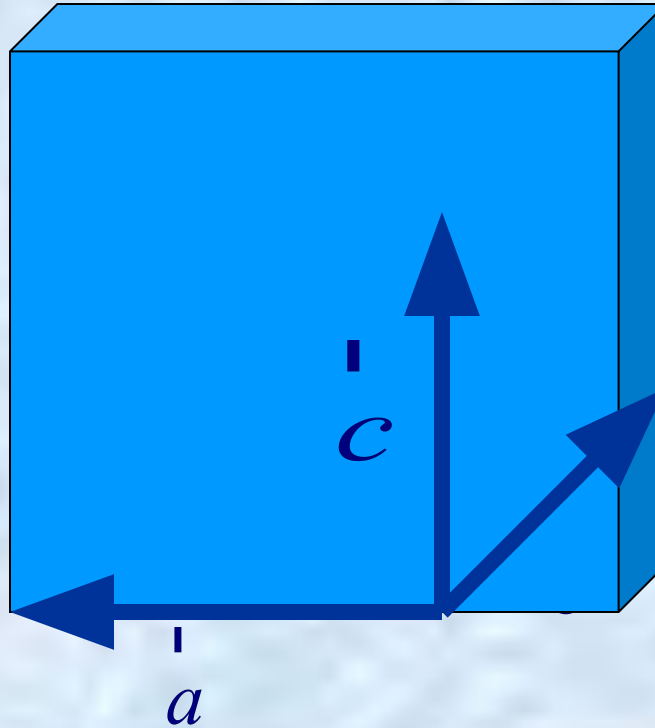
$$3^{\circ} \quad m \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$4^{\circ} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}' \times \vec{b}'$$

$$5^{\circ} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Смешанное произведение векторов

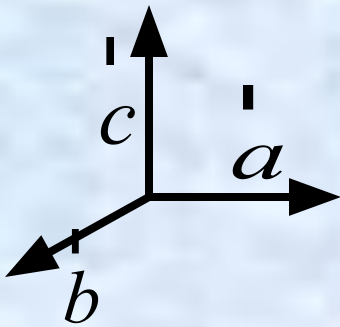
$$\left(\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \right) \times c = abc$$



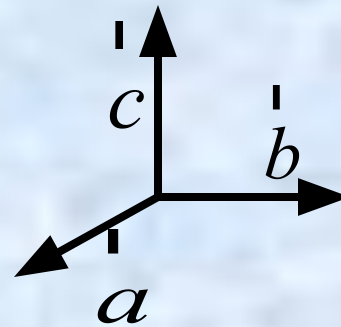
$$V = \left| \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} \right|$$

Свойства смешанного произведения

$$1^0 \quad \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{b} & \vec{a} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} > 0$$



$$\begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{b} & \vec{a} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} < 0$$

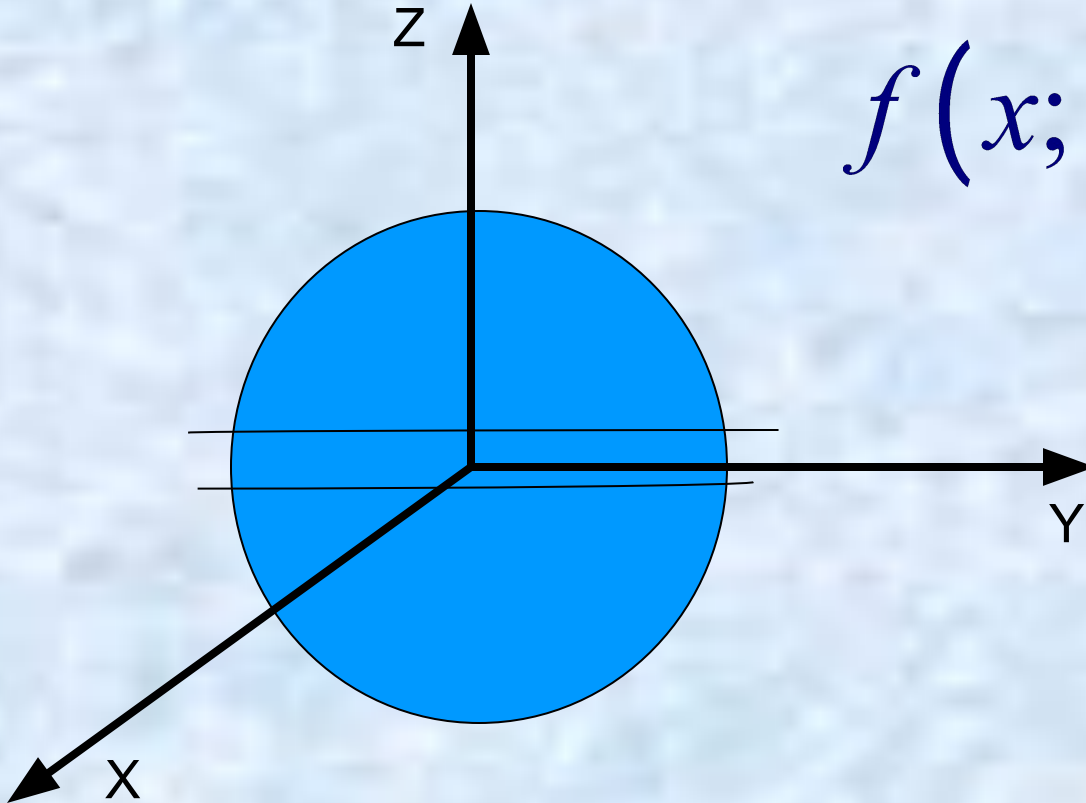


$$2^0 \quad \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{b} & \vec{a} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} & \vec{a} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = abc$$

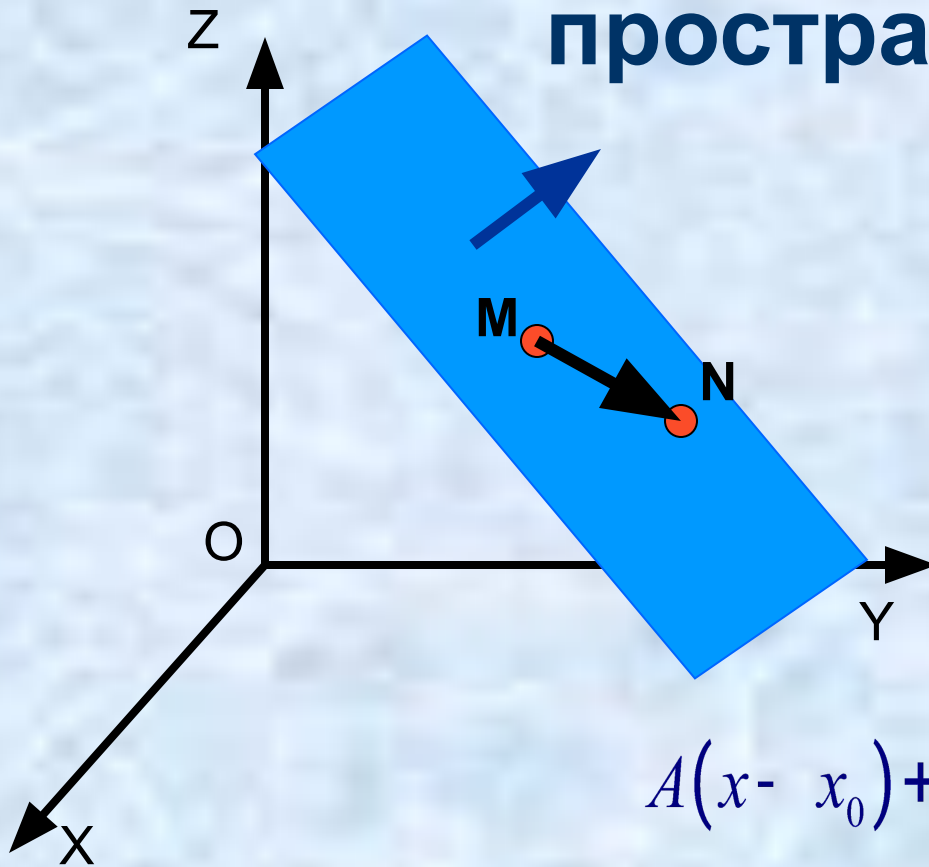
$$3^0 \quad \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{- условие компланарности}$$

Поверхность в трехмерном пространстве

$$f(x; y; z) = 0$$



Плоскость в трехмерном пространстве



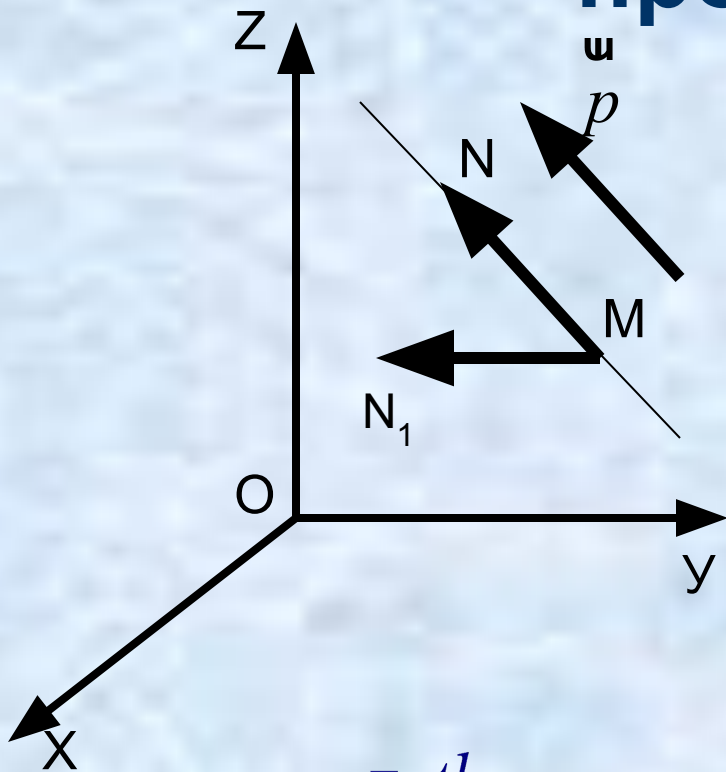
$$M(x_0; y_0; z_0), \quad N(x; y; z)$$
$$\vec{MN} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

$$\vec{n} \wedge \vec{MN} \text{ or } \vec{n} \times \vec{MN} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Прямая линия в трехмерном пространстве



$$M(x_0; y_0; z_0), \quad N(x; y; z), \quad N_1(x_1; y_1; z_1)$$

$$p(l; m; n)$$

$$\vec{MN} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

$$\vec{MN} = t \vec{p}$$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = (tl; tm; tn)$$

$$x - x_0 = tl, \quad y - y_0 = tm, \quad z - z_0 = tn$$

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm, \quad z = z_0 + tn$$

Прямая линия в трехмерном пространстве

$$2) \quad \vec{p}_0(\cos a; \cos b; \cos g)$$

$$x = x_0 + t \cos a, \quad y = y_0 + t \cos b, \quad z = z_0 + t \cos g$$

$$3) \quad \frac{x - x_0}{l} = t, \quad \frac{y - y_0}{m} = t, \quad \frac{z - z_0}{n} = t,$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$