# Дискретная математика

Преподаватель
Горшков Евгений Александрович

# Введение

Дискретная математика – направление в математике, объединяющее отдельные её разделы, ранее сформированные как самостоятельные теории. К ним относятся математическая логика и теории множеств, графов, кодирования, автоматов.

Дискретной математикой называют совокупность математических дисциплин, изучающих свойства математических моделей объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, которыми оперируют в различных областях знаний.

# 1.1. Общие понятия теории множеств

Совокупность элементов, объединённых некоторым признаком, свойством, составляет понятие **множество**. Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* студентов в группе, *множество* натуральных чисел N и т.д.

Запись $a \in M$ означает: элемент *a* *принадлежит* множеству *M*, т. е. элемент *a* обладает некоторым признаком. Аналогично $a \notin M$ читается: элемент *a* *не принадлежит* множеству *M*.

# 1.1. Общие понятия теории множеств

- Каждый объект, входящий в множество, называется его элементом, а свойство их объединяющее – характеристическим свойством множества.
- Множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A,B,C..., либо буквами с нижними индексами $A_1, A_2$ ..., элементы множества – соответствующими малыми латинскими буквами.

# *Изображение множеств*

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера*.

Множество $K$ на рис. 1.1 называют **подмножеством** множества $M$ и обозначают $K \subset M$.

Множество $K$ называется **подмножеством** множества $M$ ( $K \subset M$ ), если для любого $x \in K$ выполняется $x \in M$.

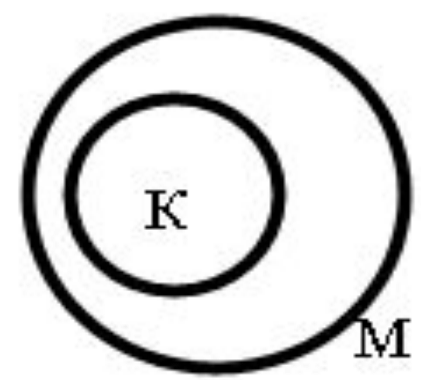



Рис. 1.1.

**Универсальным** называется множество $U$, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Если множество не содержит элементов, обладающих данным признаком, то оно называется **пустым** и обозначается символом (квантором) $\varnothing$.

**Равными** называют два множества $A$ и $B$, состоящие из одинаковых элементов: $A = B$.

Число элементов множества $A$ называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

<u>Определение.</u> Множество $B$ называется подмножеством множества $A$ , если каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$ .

Обозначение: $B \subset A$

Каждое множество является подмножеством (несобственным) самого себя $A \subseteq A$ .

Множество, элементами которого являются подмножества множества *M*, называется *семейством множества M* или *булеаном* этого множества и обозначается *B(M)*.

Мощность булеана множества *M* ***вычисляется по формуле***

, $$\left|B(M)\right| = 2^n$$

где *n – это мощность множества M.*

***Пример***. $$M = \{y, x, a\}, n = 3, \left|B(M)\right| = 2^3 = 8,$$

$$B(M) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

Множество считается **заданным**, если *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Само свойство называется **характеристическим**.

В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства *порождающая процедура*, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов.

# Примеры задания множества

Множество всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2 можно задать:

а) перечислением элементов: $M_{2^n} = \{1,2,4,8,16,32,\ldots\}$

б) указанием характеристического свойства:

; $M_{2^n} = \{2^i \mid i \in Z, i \geq 0\}$

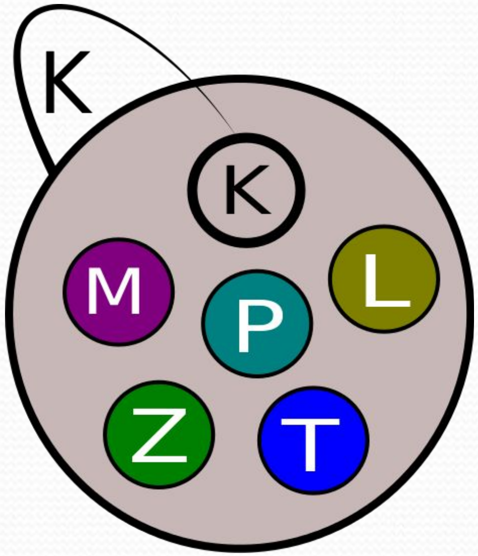
в) с помощью порождающей процедуры по *индуктивным* правилам:

; $1 \in M_{2^n}$

если $k \in M_{2^n}$, то $(2k) \in M_{2^n}$

## Парадокс Рассела (брадобрея).

Единственному деревенскому брадобрею приказали: *«Брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется»*. Кто побреет брадобрея?




Пусть — множествоПусть — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли само себя в качестве элемента? Если предположить, что содержит, то мы получаем противоречие с "Не содержат себя в качестве своего элемента". Если предположить, что не содержит себя как элемент, то вновь возникает противоречие, ведь —множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, а значит должно содержать все возможные элементы, включая и себя.

- Другая версия парадокса.
- Прилагательное русского языка назовем рефлексивным, если оно обладает тем свойством, которое определяет. Например, прилагательное «русский» – рефлексивное, а прилагательное «английский» – нерефлексивное. Прилагательное «трехсложный» – рефлексивное (состоит из трех слогов). А прилагательное «четырехсложный» – нерефлексивное (состоит из пяти слогов).
- Интересно: а прилагаемое «трудновыговариваемое» рефлексивно или нет?
- Следовательно, все прилагательные можно разделить на два множества: рефлексивные и нерефлексивные прилагательные. Но рассмотрим само прилагательное «нерефлексивный». Оно рефлексивное или нет?

# 1.2. Основные операции над множествами

*Суммой* или *объединением* двух множеств $X$ и $Y$ называется множество, состоящее из элементов, входящих или во множество $X$, или во множество $Y$, а может в оба множества одновременно (рис. 1.2). Обозначение: $Z = X \cup Y$.

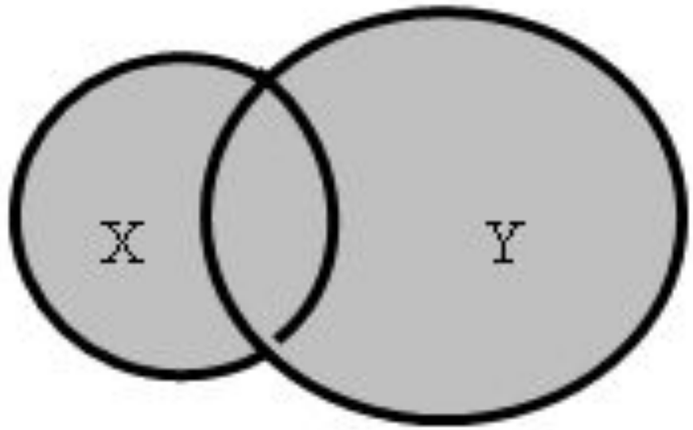



Рис. 1.2

*Пересечением* множеств $X$ и $Y$ называется множество, состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество $X$, и во множество $Y$ (рис. 1.3). Обозначение: $Z = X \cap Y.$

*Разностью* множеств X и Y называется множество Z, содержащее все элементы множества X, не содержащиеся в Y (рис. 1.4); эта разность обозначается $Z = X \setminus Y.$

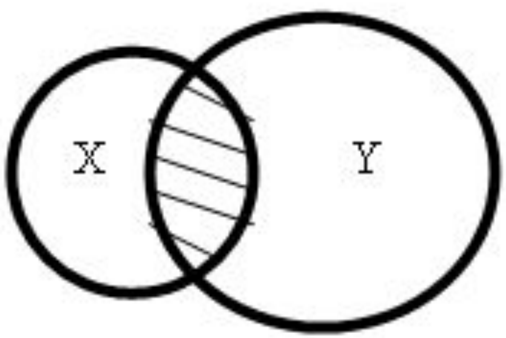


Рис. 1.3

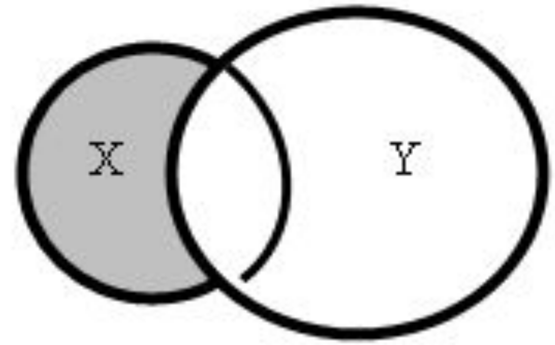


Рис. 1.4

*Дополнением* $\overline{X}$ множества $X$ до универсального множества $U$ *(рис. 1.6)* является множество

$$\overline{X} = \{x_i \mid x_i \notin X, x_i \in U\}.$$

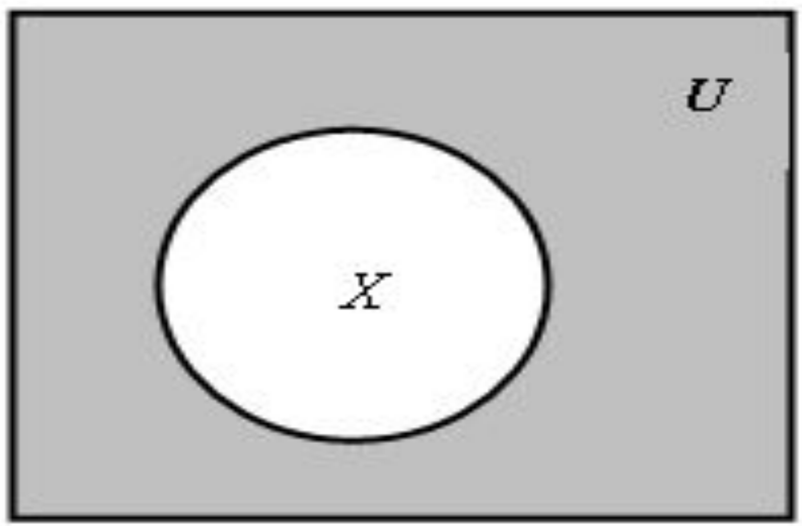



Рис. 1.5

*Симметрической разностью* множеств X и Y называется множество Z, содержащее либо элементы множества X, либо элементы множества Y, но не те и другие одновременно (*рис. 1.6*); эта разность обозначается $X \dot{\setminus} Y$.

$$= \quad X \dot{\setminus} Y \quad (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

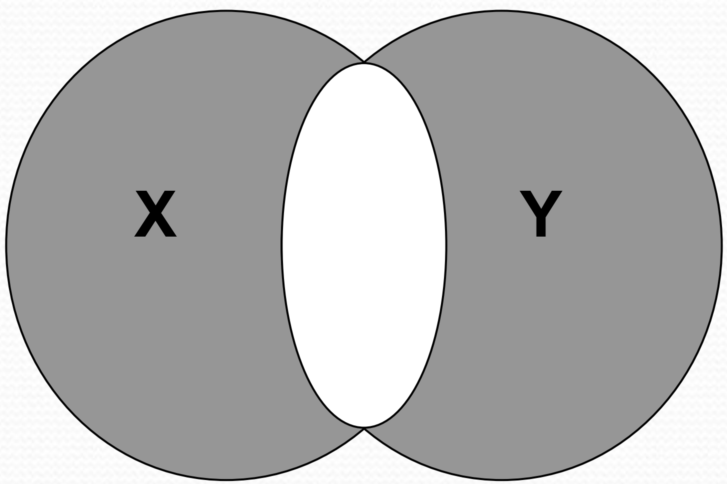


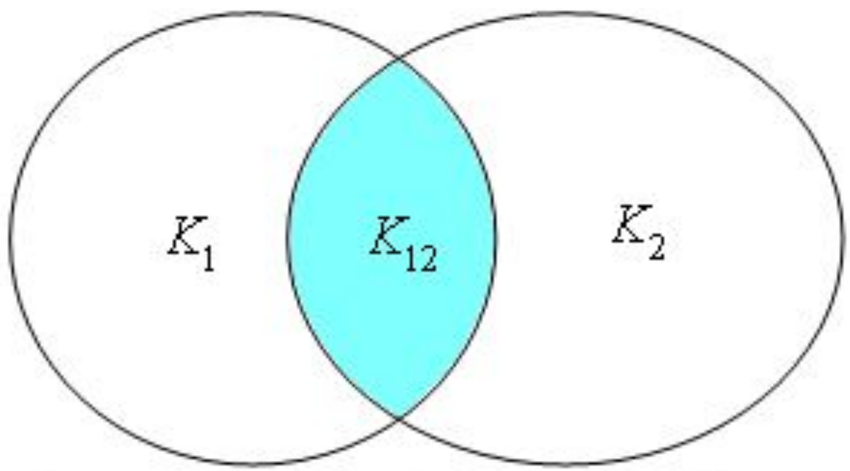

**Рис. 1.6**.

# 3. Принцип включения-исключения

- Принцип включения-исключения является важнейшим математическим инструментом в различных разделах математики: комбинаторике, теории вероятности, теории множеств.

# Формула сложения

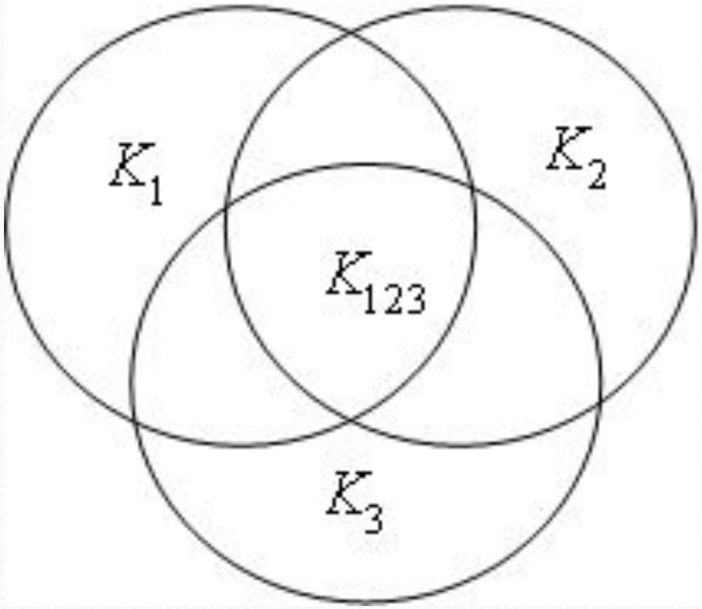
Если два множества состоят из конечного числа элементов, то, как видно из рисунка, число элементов, входящих  в их объединение,  выражается формулой:




$$n\left(K_1 \cup K_2\right)=n\left(K_1\right)+n\left(K_2\right)-n\left(K_1 \cap K_2\right)$$

- Если же свойств три, то можно по аналогии определить множества

$$K_{12}, K_{23}, K_{31}, K_{123}$$




$$K_{12} = K_1 \bigcap K_2,\ K_{23} = K_2 \bigcap K_3,\ K_{31} = K_3 \bigcap K_1\ K_{123} = K_1 \bigcap K_2 \bigcap K_3$$

$$n\left(K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3\right) = n\left(K_1\right) + n\left(K_2\right) + n\left(K_3\right) - n\left(K_{12}\right) - n\left(K_{23}\right) - n\left(K_{31}\right) + n\left(K_{123}\right)$$

# 4. Кортежи. Декартовы произведения

**Кортежем длины** $n$ из элементов множества $A$ называется упорядоченная последовательность $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ элементов этого множества.

Кортежи $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ и $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают, т. е.

$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, если $(k = n)$ и для $\forall i \;\; a_i = b_i$.

В отличие от элементов множества элементы кортежа могут совпадать.

Например, в прямоугольной системе координат координаты точек являются кортежами.

Операция, с помощью которой из двух кортежей длиной $k$ и $m$ можно составить новый кортеж длиной $k + m$, в котором сначала идут подряд элементы первого кортежа, а затем – элементы второго кортежа, называется **соединением кортежей**.

# 4. Элементы комбинаторики

Раздел математики, занимающийся подсчётами количества различных комбинаций между объектами, называется комбинаторикой.

Все комбинаторные задачи сводятся к подсчёту мощности конечных множеств и их отображений.

*Правило суммы.* Пусть элемент α можно выбрать $k$ способами, а элемент β - $m$ способами, причём, если любой способ выбора α отличается от любого способа выбора β, то выбор «α или β» можно сделать $k+m$ способами.

*Правило произведения.* Если элемент α можно выбрать *k* способами, а элемент β - *m* способами, то пару (α, β) можно выбрать *k* · *m* способами.

*Пример.* Если в группе 16 юношей и 14 девушек, то преподаватель может вызвать к доске одного учащегося 16 + 14 = 30 способами.

Частный случай правила произведения – число размещений с повторениями $\hat{A}_m^k = m^k$ для подсчёта кортежей длины *k*, составленных из элементов множества X мощности *m*.

*Перестановки.* Упорядоченные множества (кортежи), состоящие из $n$ различных элементов, называются перестановками (без повторений). Обозначение : . $P_n$

Формула для нахождения числа перестановок:

. $P_n = n! = nP_{n-1}$

Задачи:

- Сколькими способами можно переставлять элементы множества, чтобы получить различные кортежи длины $n$ ?
- Сколькими способами можно расфасовать $n$ шаров разного цвета в ящик с $n$ свободными местами ?

*Пример.* Из цифр 3, 5, 7, 9 можно составить 4! кортежей, так как $n$=4, то $P_4$=4!=4·3·2·1=24, т.е. существует 24 различных четырёхзначных числа, составленных из этих цифр: 5379, 7359, 9375, … .

Формула $P_n = n! = nP_{n-1}$ называется *рекуррентной* и даёт возможность подсчитывать число перестановок во множестве $n$+1 элемента через перестановки во множестве $n$ элементов.

$P_1$=1!, $P_0$=0!=1. Если во множестве один элемент, то кортеж единственный; если нет элементов, то вариант один – «нет кортежа».

*Размещения (без повторений).* Упорядоченное подмножество $m$ элементов (кортеж), составленное из всего множества, содержащего $n$ элементов, называется **размещением** (без повторения). Обозначение: $A_n^m$.

Формула для нахождения числа размещений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Задачи.

- Сколькими способами из всего множества можно выбрать различные кортежи (упорядоченные подмножества) длиной $m$ $(m < n)$?

## *Сочетания без повторений.*

**Сочетаниями** из $n$ элементов по $m$ называется неупорядоченное подмножество (**выборка**), состоящее из $m$ элементов, взятых из множества, состоящего из $n$ элементов.

Обозначение: $C_n^m$.

Формула для подсчёта числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задачи.

- Сколькими способами из всего множества можно выбрать различные подмножества длиной $m$ $(m < n)$?

*Перестановки с повторениями.* Кортеж, имеющий повторяющиеся элементы, называется перестановкой с повторениями.

Пусть в кортеже длины $n$ первый элемент встречается $n_1$ раз, второй элемент – $n_2$ раз и так далее, элемент под номером $m$ – $n_m$ раз: $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. Тогда число перестановок с повторениями из этих $n$ элементов обозначается

$\hat{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ и вычисляется по формуле:

$$\hat{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$$

# Задача 1.

- На экзамене по математике были предложены 3 задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов, решавших их, задачу по алгебре решили 800 человек, по геометрии – 700, а по тригонометрии – 600 человек. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по геометрии и тригонометрии – 400. А 300 абитуриентов решили все три задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

# Решение задачи 1.

- Решение. Пусть U — множество всех абитуриентов, A — множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, B — множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, C — множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию я (£/)=1000, п(A) = 800, п(B) = 700, я(C) = 600, я (Л Л B)=600, п (Л ПС)=500, «(Б ПС)=400, п(A ПЯПС)=300. В множество A\JB\JC включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле (2) имеем:
- n(A\JB\JC) = 800 + 700 + 600 — 600 — 500 — 400 + 300 = 900.
- Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили
- п (U) — п{A[]B\}C)= 1000 — 900= 100 (абитуриентов).
- Открываем раздел комбинаторика, подраздел правило суммы, и находим формулу.
  \`N(A uu B uu C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A nn B)- N(A nn C)-N(B nn C)+ N (A nn B nn C)\`
  Ответ: 100

# Задача 2

- Из 100 опрошенных студентов филологического факультета 24 не изучают ни английский, ни немецкий, ни французский языки, 48 человек изучали английский, 8 – английский и немецкий, 26 – французский, 8 – французский и английский, 13 – французский и немецкий, 28 – немецкий. Сколько среди опрошенных студентов изучают английский, французский и немецкий языки одновременно?

# Задача 3

- На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка, и 50% времени шел дождь. Какую минимальную часть времени все это могло происходить одновременно?
- Решение. Перейдём к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шёл 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более
- 20 + 10 + 50 = 80% времени.
- Следовательно, музыка под дождём в темноте звучала не меньше
- 100 – 80 = 20% времени.