Лекция 1.5. **Нормальные формы функций.**

При решении ряда задач, связанных с использованием формул алгебры высказываний, важную роль играют формулы, построенные особым образом из высказывательных переменных с помощью только операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания и называемые **дизъюнктивными** и **конъюнктивными нормальными формами (днф и кнф).**

Элементарные дизъюнкции и конъюнкции.

Пусть задана система высказывательных переменных

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

Элементарной дизъюнкцией системы (1) называется дизъюнкция некоторых высказывательных переменных этой системы или их отрицаний.

Элементарной конъюнкцией системы (1) называется конъюнкция некоторых высказывательных переменных этой системы или их отрицаний.

Если в элементарную дизъюнкцию (конъюнкцию) входит каждое высказывательное переменное из системы (1) (с отрицанием или без него) и притом только один раз, то она называется *полной элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией)*.

Нормальные формы.

<u>Определение</u>

Формула F называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ) от высказывательных переменных системы (1), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, образованных из высказывательных переменных этой системы.

Формула F называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ) от высказывательных переменных системы (1), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций, образованных из этих переменных.

Например, следующие формы не являются нормальными дизъюнктивными формами

$\overline{A \square B}$; $A \square (B \square (C \square D))$

Примеры формул в **ДНФ**

$(A \square B)$; $(A \square B) \square \overline{A}$; $(A \square B \square \overline{C}) \square (\overline{D} \square E \square F) \square (C \square D) \square B$

Следующие формы не являются нормальными конъюнктивными формами:

$\overline{B \square C}$; $(A \square B) \square C$; $A \square (B \square (D \square E))$

Но эти 3 формулы не в **КНФ** эквивалентны следующим формулам в **КНФ**:

$\overline{B} \square \overline{C}$; $(A \square C) \square (B \square C)$; $A \square (B \square D) \square (D \square E))$

Алгоритм построения ДНФ

1) Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$$A \to B \overset{2.2}{=} \overline{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$ (эту эквиваленцию проверьте)

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным на основании формул:

$$\overline{A \vee B} \overset{2.4}{=} \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$\overline{A \wedge B} \overset{2.3}{=} \overline{A} \vee \overline{B}$$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения

Пример построения ДНФ

Приведем к ДНФ формулу: $F = ((X \to Y) \downarrow (\overline{Y \to Z}))$

Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$$F \overset{2.2}{\equiv} ((\bar{X} \vee Y) \downarrow \overline{(\bar{Y} \vee Z)} \overset{5.1}{\equiv} \overline{(\bar{X} \vee Y)} \wedge \overline{\overline{(\bar{Y} \vee Z)}}$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$F = \overline{(\bar{X} \vee Y)} \vee \overline{\overline{(\bar{Y} \vee Z)}} \overset{2.4}{\equiv} (\bar{\bar{X}} \wedge \bar{Y}) \wedge (\bar{Y} \vee Z) \overset{1.9}{\equiv} (X \wedge \bar{Y}) \wedge (\bar{Y} \vee Z)$$

Используя закон дистрибутивности, приводим формулу к ДНФ: $F \overset{3.5}{\equiv} (X \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge Z)$.

Алгоритм построения КНФ

1) Заменить все логические операций в формуле основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$A \to B = \overline{A \vee B}$; это не так $A \to B = \overline{A} \vee B$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знакам и отрицания, относящимися к отдельным переменным на основании формул:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}\ ; \qquad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания.

Пример построения КНФ

Приведем к КНФ формулу

$$F = (X \to Y) \land ((\overline{Y} \to Z) \to \overline{X})$$

Преобразуем формулу F к формуле, не содержащей →

$$F \overset{2.2}{\equiv} (\overline{X} \lor Y) \land \left(\overline{\overline{Y} \to Z}\right) \lor \overline{X} \overset{2.2}{\equiv} (\overline{X} \lor Y) \land \left(\overline{\overline{\overline{Y}} \lor Z}\right) \lor \overline{X})$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$F \overset{2.4}{\equiv} (\overline{X} \lor Y) \land ((\overline{Y} \land \overline{Z}) \lor \overline{X})$$

По закону дистрибутивности получим КНФ:

$$F \overset{3.5}{\equiv} (\overline{X} \lor Y) \land (\overline{X} \lor \overline{Y}) \land (\overline{X} \lor \overline{Z})$$

Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Формула F называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ) от высказывательных переменных системы (1) $x_1,\ldots,x_n$, если она является конъюнкцией различных полных элементарных дизъюнкций от этих переменных (при этом равенство дизъюнкций понимается с точностью до порядка членов).

Формула F называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (СДНФ) от высказывательных переменных системы (1) $x_1,\ldots,x_n$, если она является дизъюнкцией различных полных элементарных конъюнкций от этих переменных.

Напомним, что *элементарной дизъюнкцией* системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется дизъюнкция некоторых высказывательных переменных этой системы или их отрицаний.

Элементарной конъюнкцией системы (1) называется конъюнкция некоторых высказывательных переменных этой системы или их отрицаний.

Если в элементарную дизъюнкцию (конъюнкцию) входит каждое высказывательное переменное из системы (1) (с отрицанием или без него) и притом только один раз, то она называется *полной элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией)*.

Правила приведения к совершенной нормальной форме.

А. Правила приведения к СДНФ.

Из определения СДНФ следует, что формула F является СДНФ, если она отвечает следующим условиям (обладает следующими “**свойствами совершенства** ”):

а) в ней нет двух одинаковых слагаемых (дизъюнктивных членов);

б) ни одно слагаемое не содержит двух одинаковых множителей;

в) никакое слагаемое не содержит переменную вместе с её отрицанием;

г) в каждом слагаемом содержится в качестве множителя либо каждая из переменных x_i, либо её отрицание $\bar{x}_i$. $i=\overline{1,n}$.

Пусть дана произвольная формула F$(x_1,\dots,x_n)$.

<u>Выполним пять операций</u>, которые приведут формулу к <u>СДНФ</u>.

1)Приведем её с помощью равносильных преобразований к какой-либо ДНФ.

2)Если какое-нибудь из слагаемых этой ДНФ, например, B не содержит переменную x_i, то заменим его суммой $x_i B \vee \bar{x}_i B$.

Эта замена представляет собой равносильное преобразование, так как $x_i B \vee \bar{x}_i B \overset{3.5}{\equiv} (x_i \vee \bar{x}_i) \wedge B \overset{1.8}{\equiv} И \wedge B \overset{1.3}{\equiv} B$.

Проделав операции по п.2), мы удовлетворили требованиям п. г) свойств совершенства.

3) Если в полученном выражении окажутся одинаковые слагаемые, то, удалив все, кроме одного из них (в силу закона идемпотентности (8)), мы получим опять равносильное выражение. Здесь мы удовлетворили п. а) свойств совершенства.

4) Если в некоторых слагаемых окажется по несколько одинаковых множителей, то лишние (в силу закона идемпотентности (9)) удаляем. Таким образом, мы удовлетворяем п. б) свойств совершенства.

5) Удаляем все те слагаемые, которые содержат какую-нибудь переменную x_i вместе со своим отрицанием $\overline{x_i}$, так как, в силу закона противоречия (15), они являются тождественно ложными выражениями – удовлетворили п. в) свойств совершенства.

Если бы все слагаемые оказались таковыми, то и вся ДНФ была бы тождественно ложной. А тогда это значило бы, что исходная формула F – тождественно ложная формула и не имеет СДНФ. Именно поэтому мы утверждаем: если формула F не является тождественно ложной, то в её произвольной ДНФ должны присутствовать слагаемые, удовлетворяющие условию п. в) свойств совершенства.

После удаления всех слагаемых, содержащих какую-нибудь переменную вместе с её отрицанием, мы получили ДНФ, удовлетворяющую всем свойствам совершенства, т.е. СДНФ.

Пример перехода от ДНФ к СДНФ

Если в какой-то простой конъюнкции недостает переменной, например, Z, вставляем в нее выражение: $Z \vee \overline{Z} = 1$, после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем).

Например

$$X \vee \overline{Y} \wedge \overline{Z} \overset{1.8}{\equiv} X \wedge (Y \vee \overline{Y}) \wedge (Z \vee \overline{Z}) \vee (X \vee \overline{X}) \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \overset{3.5}{\equiv}$$

$$\overset{3.5}{\equiv} X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$$

Б. Правила приведения к СКНФ.

Из определения СКНФ - следует, что СКНФ обладает следующими свойствами совершенства (иными словами, СКНФ формулы F$(x_1,\dots,x_n)$ называется её КНФ, удовлетворяющая следующим условиям):

а) в ней нет двух одинаковых множителей;

б) ни один множитель не содержит двух одинаковых слагаемых;

в) ни один множитель не содержит какую-нибудь переменную x_i вместе с её отрицанием $\bar{x}_i$;

г) каждый множитель содержит в качестве слагаемых все переменные x_i или их отрицание $\bar{x}_i$, т.е. $i=\overline{1,n}$ для каждого множителя.

Пример перехода от КНФ к СКНФ

Если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например), z, то добавляем в нее выражение: $z \wedge \bar{z} \overset{1.7}{\equiv} 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона):

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \overset{1.6}{\equiv} ((X \vee Y \vee (Z \wedge \bar{Z})) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \overset{3.6}{\equiv}$$

$$\overset{3.6}{\equiv} (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})$$

Таким образом, из КНФ получена СКНФ.