МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Лекция – 2(2)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ функций одной переменной

Неопределённый интеграл

Определение. Функция $F(x)$ наз. первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если на этом интервале функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет тождеству $F'(x) = f(x)$ или

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Пример. $F(x) = x^2$, $f(x) = 2x$.

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – также первообразная.

Продолжение

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ – также первообразная.

Теорема. Любые две первообразные для $f(x)$ на (a,b) различаются на константу.

Док-во. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$ на (a,b), обозначим $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$, тогда $\forall x\in(a,b)$

$$\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Из теоремы Лагранжа $\Rightarrow \left(\Phi'(x)\equiv 0 \Rightarrow \Phi(x)\equiv C\right)$ ▶

__Определение__. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на (a, b) наз. __неопределённым интегралом от функции $f(x)$__ на (a,b). Обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad , \qquad F'(x) = f(x)$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение. $f(x)dx = dF(x)$

Неопределённое интегрирование - операция, обратная дифференцированию (с точностью до константы).

Свойства неопределённого интеграла

1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$, действительно

$$d\int f(x)\,dx = d\{F(x)+C\} = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

2. $\int dF(x) = F(x) + C$, действительно

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Таким образом, знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную C)

3. $\int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \qquad (A \neq 0)$

4. $\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad , \alpha \neq -1$

3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad , x \neq 0$

4. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad , a > 0 \, , a \neq 1$

4.' $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

Продолжение таблицы

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ | в естеств ОДЗ.

!

7. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. $x \neq 0$

9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a > 0$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $a > 0$

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$, $a \neq 0$

Интегрирование подстановкой и заменой переменной

$$\boxed{I = \int f(x)\,dx}$$

Пусть $x = x(t)$ – строго монотонная и дифф. на (a, b)

$\Rightarrow$ $t = t(x)$ – обратная функция

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью подстановки $x = x(t)$:

$$f(x)\,dx = f(x(t))\,x'(t)\,dt = u(t)\,dt$$

Пусть $U(t)$ – первообразная для $u(t)$, тогда

$$I = \int f(x)\,dx = \int u(t)\,dt = U(t) + C = U(t(x)) + C$$

– формула интегрирования подстановкой.

[Эффективность её применения связана с удачным выбором функции $x = x(t)$.

Окончательно справедливость формулы может быть явно установлена дифференцированием:

$$\frac{d}{dx}\left\{U(t(x)) + C\right\} = U'(t(x))\cdot t'(x) = u(t(x))\,t'(x) =$$

$$= f(x)\left[x'(t)\cdot t'(x)\right] = f(x) \qquad u = f\cdot\frac{dx}{dt}$$

Примеры

$$I=\int \sin^3 x\cos x\,dx=\int \sin^3 x\,d\sin x=\frac{\sin^4 x}{4}+C$$

1

$$1)\int x e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

2

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$$

3

$$\int \operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$$

4

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

Продолжение

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-1/2}\, d(5x-2) =$

$$= \frac{1}{5}\int u^{-1/2}\, du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C,$$

где было положено $u = 5x - 2$. Использовались правило 4) и табличный интеграл I.

Пример 3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$

Неявно подразумевалось $u = x^2$, причем применялись правило 4) и табличный интеграл V.

Пример 4. $\int x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\, d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

в силу правила 4) и табличного интеграла VII.

Продолжение

2°. Тригонометрические подстановки.

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно полагают $x = a \sin t$; отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то полагают $x = a \sec t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a \operatorname{tg} t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t.$$

Интегрирование по частям

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$$

$$u\,dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \iff \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Примеры

1) $\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot d\ln x = x\ln x - x + C$

2) $\int x\cos x\, dx = \int x \cdot d\sin x = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx =$

$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

3) $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 =$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x\, de^x =$

$= x^2 e^x - 2\left\{x e^x - \int e^x dx\right\} = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$

Реккурентные соотношения

$I_n = \int x^n e^x dx$

$J_n = \int x^n \cos x\, dx, \quad K_n = \int x^n \sin x\, dx$

. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен

1°. Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$. Основной прием вычисления — приведение квадратного трехчлена к виду

$$ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l, \tag{1}$$

1

$$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad a \neq 0$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right\} = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm h^2\right\}$$

$$t = x+\frac{b}{2a}, \quad dt = dx, \quad h = \sqrt{\left|\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right|}$$

$$I = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2 \pm h^2} = \frac{1}{a}\cdot\begin{cases}\frac{1}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h}+C, & (+)\\ \frac{1}{2h}\ln\left|\frac{t-h}{t+h}\right|+C, & (-)\end{cases}$$

2. Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. Путем выделения из квадратного трехчлена полного квадрата данный интеграл сводится к одному из следующих двух основных интегралов

1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ (a > 0);$

2) $\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C.$

См. слайд 15

3

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{d\cancel{x}t}{\sqrt{a\{t^2\pm h^2\}}}$$

$\underline{a>0}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm h^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm h^2}\right|+C$$

$\underline{a<0}$ $\Longrightarrow$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{a(t^2-h^2)}}=$$

В противном случае

$a(t^2+h^2)<0$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{|a|(h^2-t^2)}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{h^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{h}+C$$

Обобщенные случаи

4

$$I=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Основная идея:

$$(Ax+B)\,dx=M\underbrace{d(ax^2+bx+c)}_{\text{линейно по } x}+N\cdot dx \quad \Big| \quad \underline{M,\ N - \text{констн}}$$

$$(Ax+B)\,dx=M(2ax+b)\,dx+N\cdot dx$$

$$(\underline{A}x+\underline{\underline{B}})\,dx=(\underline{2aM}\,x+\underline{\underline{Mb}}+\underline{\underline{N}})\,dx \quad\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}A=2aM\\ B=Mb+N\end{cases}\quad\Big|\quad M=\frac{A}{2a},\quad N=B-Mb=B-\frac{Ab}{2a}$$

Продолжение

5

$$I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$(Ax+B)\,dx = M\,d(ax^2+bx+c) + N\,dx$$

$$M = \frac{A}{2a}, \quad N = B - \frac{Ab}{2a}$$

$$I = M\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + N\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= 2M\sqrt{ax^2+bx+c} + N\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

6

$$I = \int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$t = \frac{1}{mx+n}, \quad mx+n = \frac{1}{t}$$

$$x = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{t} - n\right); \quad dx = -\frac{dt}{mt^2}$$

$$I = -\int \frac{t\,dt}{mt^2\sqrt{\frac{a}{m^2}\left(\frac{1}{t}-n\right)^2 + \frac{b}{m}\left(\frac{1}{t}-n\right)+c}}$$

1/t = z

$$= -\frac{1}{m}\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{P_2(t)}{t^2}}} = -\frac{1}{m}\int \frac{dt}{\sqrt{P_2(t)}}.$$

ЛЕКЦИЯ 2

Рациональные дроби.

Разложение правильной рациональной дроби
. на сумму простейших (бд)

Интегрирование простейших дробей.

Интегрирование правильных и неправильных
. рациональных дробей.

Многочлены и рациональные дроби

Определение. Многочленом $P_n(z)$ наз. функция вида

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

где a_k - постоянные коэффициенты (вообще говоря, комплексные), z - переменная (вообще говоря, комплексная).

Если $a_n \neq 0$, то многочлен имеет степень n.

Очевидно, что произведением многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ степеней n и m явл. многочлен $T_{n+m}(z)$ степени $n+m$.

$$T_{n+m}(z) = P_n(z) \cdot Q_m(z)$$

Алгоритм деления многочлена

1)

$$\begin{array}{l|l} x^4+6x^2-3x+1 & x^3+4x-2 \\ \underline{-\;x^4+4x^2-2x} & \overline{x} \\ \quad 2x^2-x+1 & \end{array}$$

остаток

$$x^4+6x^2-3x+1=(x^3+4x-2)x+(2x^2-x+1)$$

2)

$$\begin{array}{l|l} x^5+4x^4-6x^3-26x^2+12 & x^2-6 \\ \underline{-\;x^5+0-6x^3} & \overline{x^3+4x^2-2} \\ \quad 4x^4-26x^2+12 & \\ \underline{\quad -\;4x^4-24x^2} & \\ \qquad -2x^2+12 & \\ \underline{\qquad -\;-2x^2+12} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$\Longrightarrow$

$$x^5+4x^4-6x^3-26x^2+12=(x^2-6)(x^3+4x^2-2)$$

делители

Теорема (Безу). Остаток деления многочлена $P_n(z)$ на $(z-z_0)$ равен $P_n(z_0)$

Следствие 1. Если z_0 - корень многочлена $P_n(z)$, то

$$P_n(z) = (z-z_0)Q_{n-1}(z)$$

очевидно и обратное.

Следствие 1'. z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда он делится без остатка на $(z-z_0)$.

Определение. Отношение двух многочленов

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

наз. дробно-рациональной функцией (рациональной дробью).

Если $n < m$ дробь наз. правильной,

если $n > m$ дробь наз. неправильной.

Теорема. Всякую неправильную дробь можно представи(ть) в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Док-во Если $n > m$, то поделив числитель на знаменатель получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_l(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \quad k < m$$

Пример. $\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$

Процедура выделения целой части

$$\begin{array}{r|l} x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1 & x^2+x+1 \\ -\,(x^4+x^3+x^2) & x^2-x \\ \hline -x^3-x^2+0\cdot x+1 & \\ -\,(-x^3-x^2-x) & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^4+1}{x^2+x+1} = x^2-x+\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Определение. Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2), \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \geq 2);$$ x^2+px+q не имеет действит. корн.

наз. простейшими.

Теорема. Пусть знаменатель правильной дроби разложен на линейные и квадратичные множители

$$Q(x) = a(x-c)^k \cdots (x-b)^l (x^2+px+q)^m \cdots (x^2+rx+s)^n, \text{ тогда}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-c)^k} + \frac{A_1}{(x-c)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-c} + \dots +$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^l} + \frac{B_1}{(x-b)^{l-1}} + \dots + \frac{B_{l-1}}{x-b} +$$

$$+ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots + \frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{x^2+px+q} + \dots +$$

$$+ \frac{Ex+G}{(x^2+rx+s)^n} + \frac{E_1x+G_1}{(x^2+rx+s)^{n-1}} + \dots + \frac{E_{n-1}x+G_{n-1}}{x^2+rx+s}$$

Примеры.

1) $$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1) = 2x^2+5x+5$$

$$(A+B+C)x^2 + (3A+B)x + (2A-2B-C) = 2x^2+5x+5$$

$$\left\{\begin{array}{ll} A+B+C & = 2 \\ 3A+B & = 5 \\ 2A-2B-C & = 5 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \\ C=1 \end{array}\right.$$

2 способ.

$$A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1) = 2x^2+5x+5$$

$$\begin{array}{llll} x=1 & \Rightarrow 6A = 12, & A=2 \\ x=-1 & \Rightarrow -2B = 2, & B=-1 \\ x=-2 & \Rightarrow 3C = 3, & C=1 \end{array}$$

2) $$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+3)^3(x^2+1)(x^2-3x+5)^2} =$$

$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{(x+3)^3} + \frac{B_1}{(x+3)^2} + \frac{B_2}{x+3} +$$

$$+ \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+G}{(x^2-3x+5)^2} + \frac{E_1x+G_1}{x^2-3x+5}$$

Интегрирование простейших дробей.

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$$ — см. интегрир. выраж., содерж. квадр. трёхчлен.

$$I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

$$(Ax+B)\,dx = d\left(\frac{A}{2}x^2 + Bx\right) =$$

$$= \frac{A}{2}\,d\left(x^2 + \frac{2B}{A}x + \frac{2K}{A}\right) =$$

$$= \frac{A}{2}\,d\left[x^2 + px + \left(\frac{2B}{A} - p\right)x + q\right] =$$ константу меняем произвольно

$$= \frac{A}{2}\,d(x^2+px+q) + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A} - p\right)dx$$

$$I = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A} - p\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{(-k+1)} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$x+\frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q-\frac{p^2}{4} = a^2$$

т.к. трехчлен
не имеет веществ. к

Продолжение

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$ Преобразуем J_{k-1} по частям:

$$J_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \int (t^2+a^2)^{-k+1} dt = t(t^2+a^2)^{-k+1} - \int t\, d(t^2+a^2)^{-k+1} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int t\,(-k+1)(t^2+a^2)^{-k} \cdot 2t \cdot dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - 2(k-1)a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} \Longrightarrow$$

$$J_{k-1} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\cdot J_{k-1} - 2(k-1)a^2 \cdot J_k \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} J_k = \dfrac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \dfrac{2k-3}{2a^2(k-1)} J_{k-1} \\ J_1 = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C \end{cases}$$

См. слайд 15

Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических.

Определение. $R(u,v)$ – рациональная функция аргументов u, v, если над ними производятся только арифметические операции.

Пример. $R(u,v) = \dfrac{au^2 + uv + v^3}{u + bu^2v + uv^2}$

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx \rightarrow$$

[На самом деле это – замена переменной]

□

Продолжение

Универсальная подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

подстановка

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

интеграл от рациональной дроби

Такой интеграл берётся всегда.

Примеры

1) $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ $\left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right.$

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

2) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Часто бывают полезны и другие подстановки

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx = \int R(\sin x)\,d\sin x \quad , \quad t = \sin x$$

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx = -\int R(\cos x)\,d\cos x \quad , \quad t = \cos x$$

Пример.

1) $$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2}\ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

2) $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\,(\cos x\,dx)}{\sin^7 x} = \int \cancel{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)\,d\sin x}{\sin^7 x} = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^7} = \int (t^{-7} - t^{-5})\,dt =$$

$$= \frac{t^{-6}}{-6} - \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + C$$

$$J = \int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\, dx, \quad J = \int R(\operatorname{tg} x)\, dx$$

$$t = \operatorname{tg} x \quad , \quad x = \operatorname{arctg} t \quad , \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$J = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} \quad , \quad J = \int R(t)\, \frac{dt}{1+t^2}$$

Пример.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} \qquad \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \quad , \quad x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right.$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int \left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)^2 \cdot (1+t^2) \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt =$$

$$= \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(t^{-4} + 2t^{-2} + 1\right) dt =$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} + 2\frac{t^{-1}}{-1} + t + C = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$$

$$I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

а) $m+n = 2k \Rightarrow t = \operatorname{tg} x$

б) $m+n = 2k+1 \Rightarrow t = \sin x, \; t = \cos x$

Примеры. а) $I = \int \frac{dx}{\cos^6 x} \qquad (m=0, n=-6)$

$t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^2, \quad \frac{1}{\cos^6 x} = (1+t^2)^3$

$$I = \int (1+t^2)^2 dt = \int (1 + 2t^2 + t^4) dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C$$

Продолжение

б) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx =$

$= \int \cos^4 x \cdot (\cos^2 x - 1) \, d\cos x = \left| t = \cos x \right|$

$= \int t^4 (t^2 - 1) \, dt = \int (t^6 - t^4) \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C =$

$= \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$

Спасибо за внимание !


Спасибо за внимание !