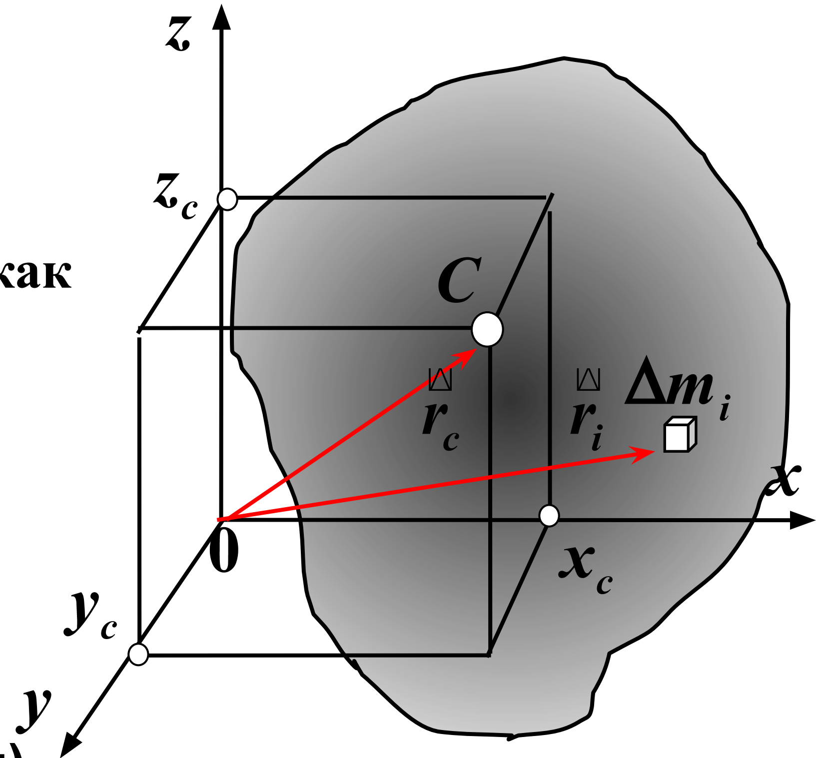
Движение центра инерции (массы) тела (системы тел)

Представим тело (систему тел), как систему N материальных точек с массой Δm_i , где $i = 1 \ldots N$.



Введем радиус-вектор некоторой точки C как

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\,\vec{r}_i$$

Δm_i – масса i-й материальной точки;

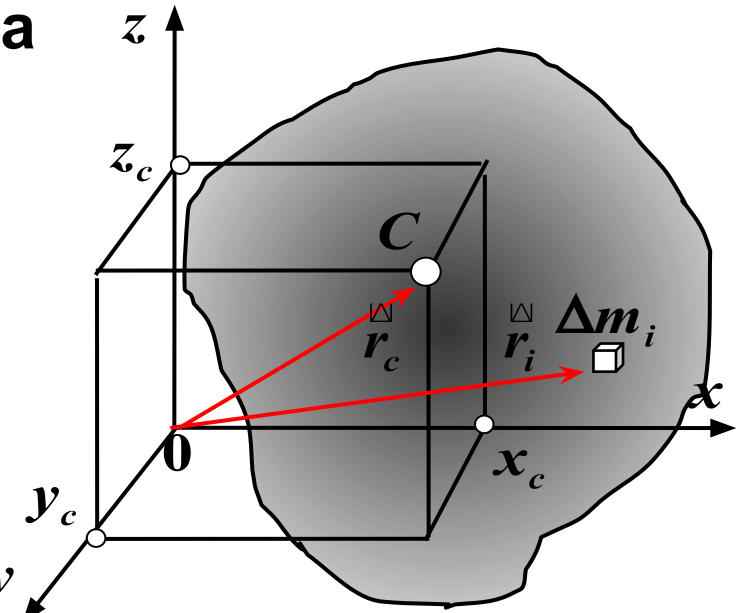
$\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й м. т.

$m = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i$ - масса тела (системы тел).

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\,x_i \qquad y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\,y_i \qquad z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\,z_i$$

Точка C называется центром инерции или центром масс тела (системы тел) или центром тяжести (последнее в однородном поле гравитации).

Движение центра инерции тела (системы тел)



$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\,\vec{r}_i$$

Скорость центра инерции

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\vec{\upsilon}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{1}{m}\vec{P} \longrightarrow \vec{P} = m\vec{\upsilon}_c$$

Полный импульс системы материальных точек (тела) равен произведению массы системы материальных точек (тела) на скорость центра инерции.

Для изменения полного импульса системы найдено

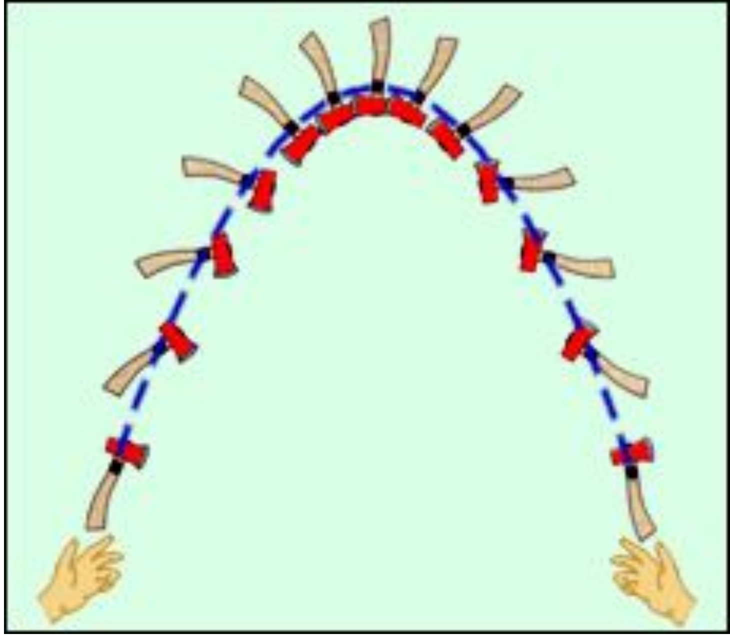
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = \frac{d\left(m\,\vec{\upsilon}_C\right)}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = m\vec{a}_C$$

Центр инерции тела (системы тел) движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой *m* под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телу (системе тел).

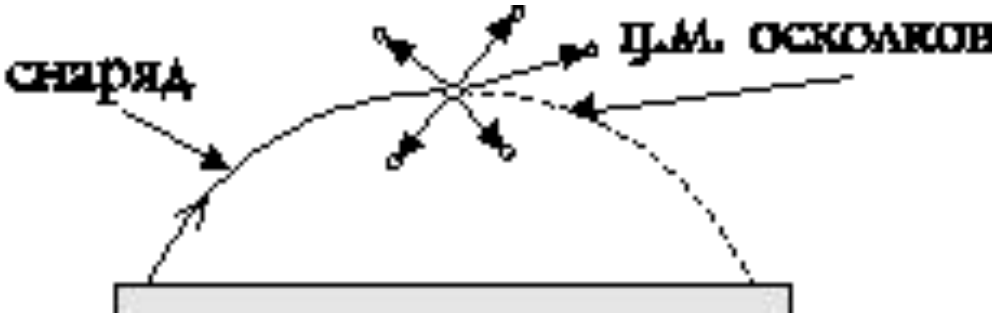
Пример:

Топор совершает сложное движение.

Однако в соответствии с теоремой о движении центра масс, его ц.м. движется так как двигалась бы материальная точка в поле силы тяжести, если она имела начальную скорость направленную под углом к горизонту.



Пример . В некоторой точке траектории снаряд разрывается на множество осколков. Как будет двигаться их центр масс?



По той же траектории (парабола).

Сколь долго это продолжится?

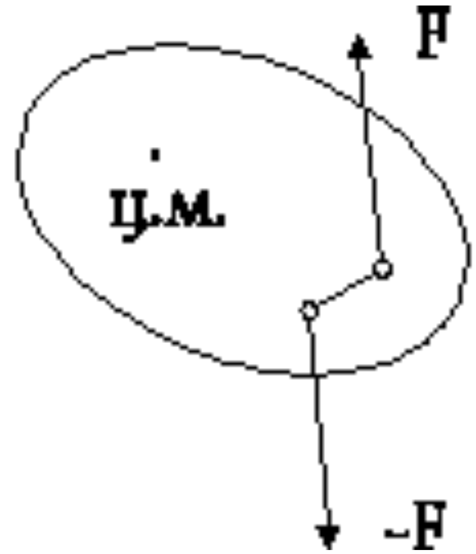
Пока первый осколок не достигнет земли (добавится внешняя сила реакции земли).

Пример. На покоящееся тело начинает действовать "пара" сил F и F*. Как будет двигаться тело?

Геометрическая сумма внешних сил равна нулю ускорение центра масс также равно нулю - он останется в покое.

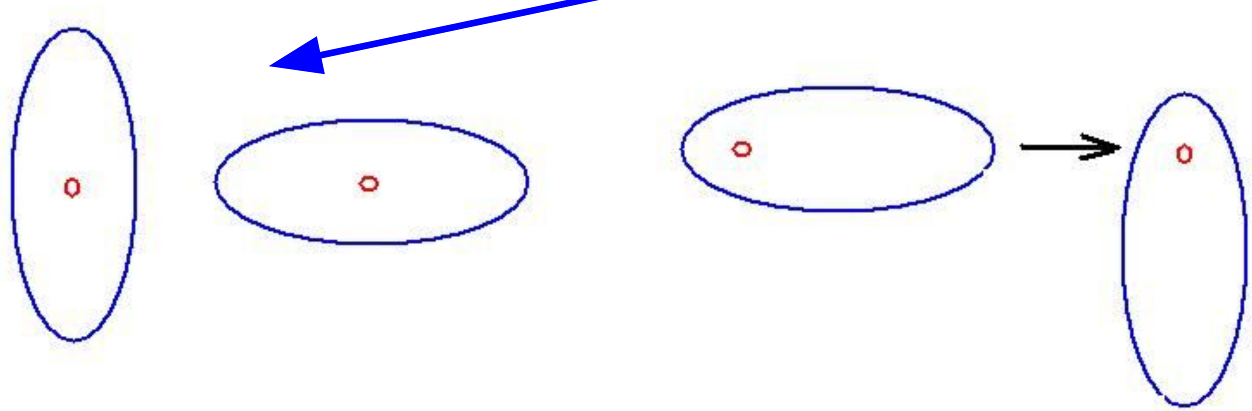
Будет ли тело двигаться?

Оно будет вращаться вокруг оси проходящей через неподвижный центр масс.



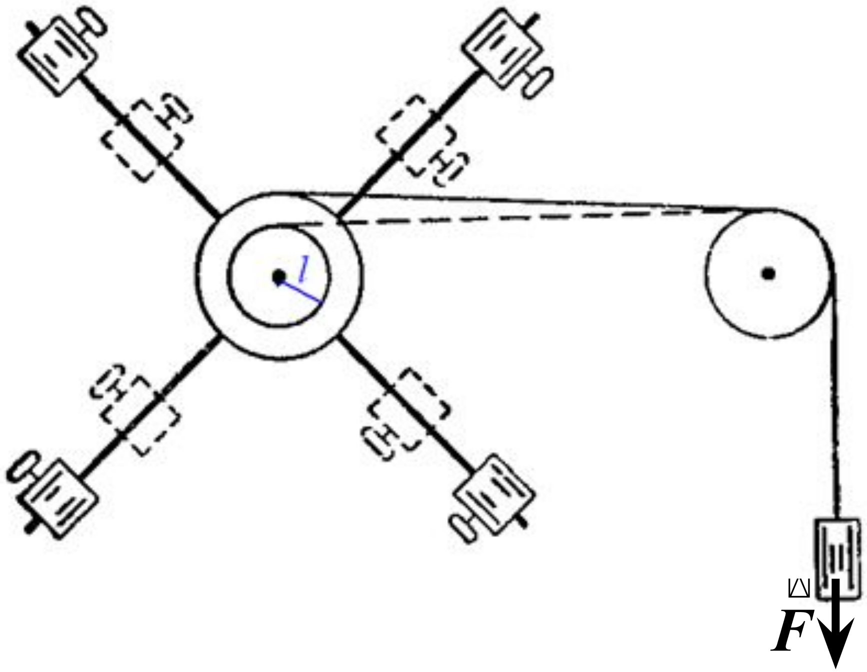
Центр тяжести.

В однородном поле тяготения равнодействующая сил тяжести приложена к центру масс тела (системы тел). Если тело подвешено за центр масс, то оно находится в безразличном состоянии равновесия.



ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

<u>*Простейшая физика динамики вращения АТТ вокруг неподвижной оси*</u>



Угловое ускорение не только пропорционально приложенной силе, но зависит также от радиуса шкива l.

Конкретно:

$\varepsilon \sim F\, l$ «плечо» **момент силы**

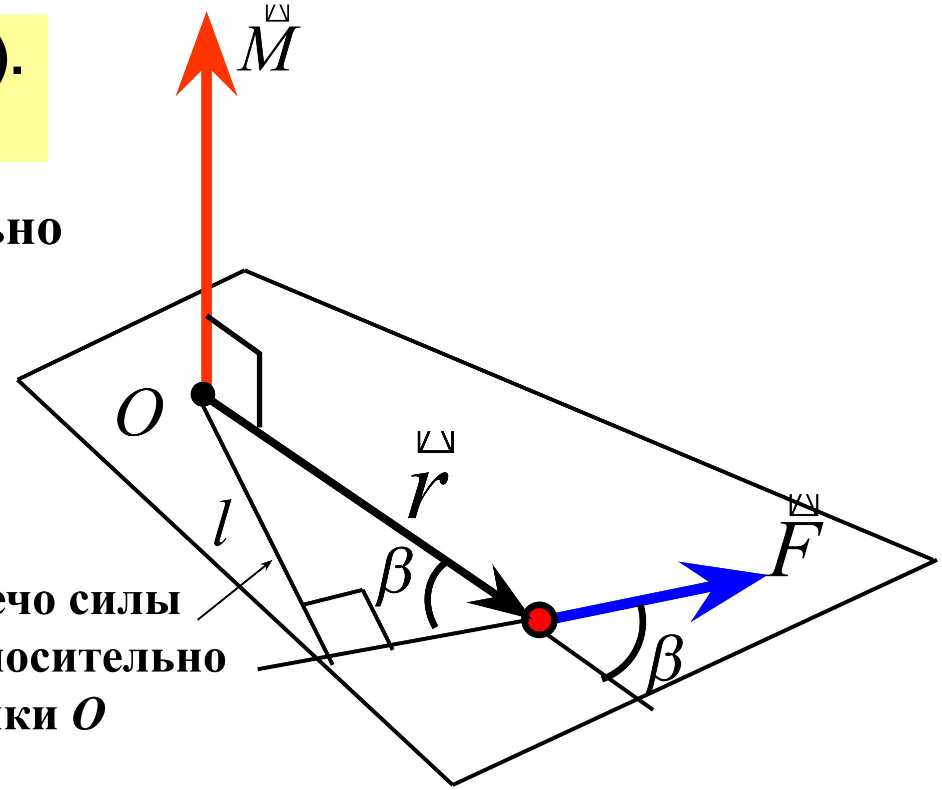
Ускорение зависит не только от массы вращающихся тел, но и от их расстояния до оси вращения, а именно

$$\varepsilon \sim 1/(m\, r^2)$$

mr^2 - **момент инерции** материальной точки относительно оси.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Момент силы (вращающий момент).
Момент импульса.



Рассмотрим движение МТ относительно произвольной точки (центра) О.

Пока *не имеется в виду непременно обращение МТ вокруг центра О*.
В частности, движение может быть прямолинейным.

Определение:

Момент *силы относительно точки О* равен векторному произведению радиус-вектора на вектор силы:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}],$$

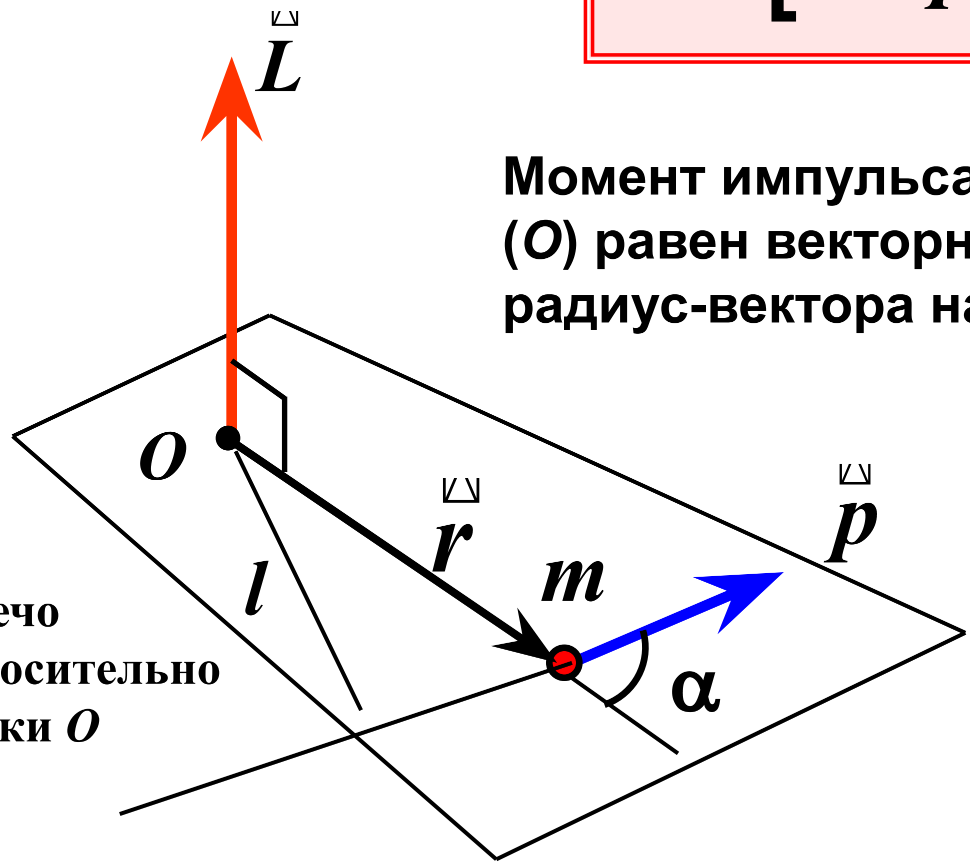
$\vec{M}$ – **момент силы,**

Величина момента силы: $M = rF\sin\beta = Fl$

l – **плечо силы относительно точки О.**

Момент импульса м.т. относительно точки (центра)

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]}$$



Момент импульса МТ относительно точки (*O*) равен векторному произведению радиус-вектора на вектор импульса МТ:

$$\boxed{L = r\,p\sin\alpha}$$

$$L = l\,p$$

Закон изменения (сохранения) момента импульса

<u>Закон изменения момента импульса для МТ</u>

Найдем связь между $\vec{M}$ и $\vec{L}$ для материальной точки.

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \longrightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r} \times \vec{p}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \underbrace{[\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}]}_{=0} + \underbrace{[\vec{r} \times \vec{F}]}_{\vec{M}} = \vec{M}$$

Скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту сил и определяется уравнениями моментов:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Смысл введения $\vec{M}$ и $\vec{L}$

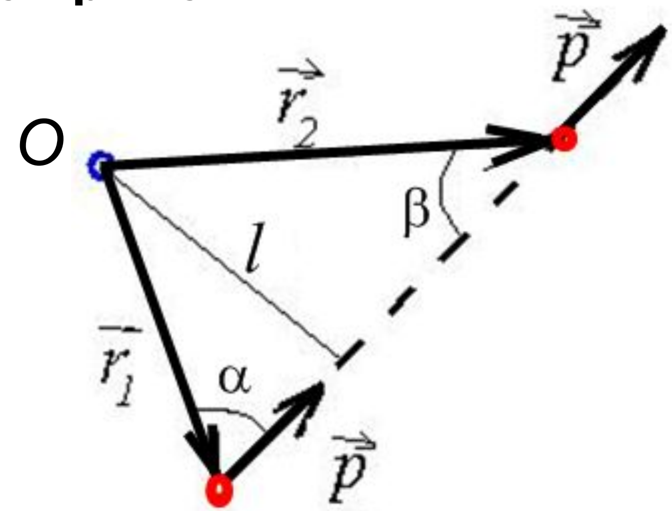
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$$

Момент импульса МТ сохраняется, если момент силы равен 0.

$$L = rp\sin\alpha$$

Пример: МТ движется равномерно по прямой



Найдем момент импульса $\vec{L}$ относительно произвольного центра *O* в двух точках траектории .

$$L(1) = p \cdot r_1 \cdot \sin\alpha = p \cdot l$$
$$L(2) = p \cdot r_2 \cdot \sin\beta = p \cdot l$$

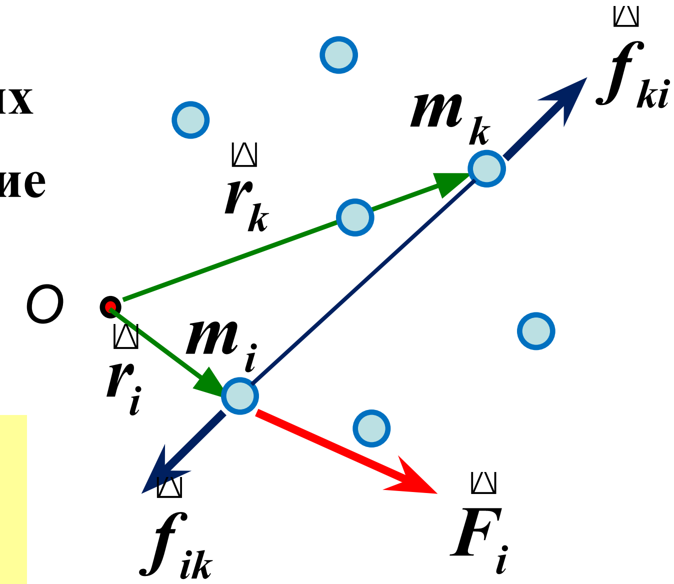
$\Longrightarrow \vec{L}$ **не меняется**

Но по отношению к другому центру это будет уже другой постоянный момент импульса.

Закон изменения (сохранения) момента импульса для системы МТ

$$m_1, m_2, \ldots m_i \ldots m_k \ldots m_N$$
$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_i \ldots \vec{p}_k \ldots \vec{p}_N$$

На i-тую МТ действуют силы со стороны других МТ ($\vec{f}_{i1}, \vec{f}_{i2}, \ldots \vec{f}_{ik}, \ldots \vec{f}_{iN}$ внутренние) и внешние силы (их результирующая $\vec{F}_i$)



O - *произвольная* точка

$$\vec{p}_i \Longrightarrow \vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$

момент импульса *i-ой* МТ относительно О

$$\vec{F}_i \Longrightarrow \vec{M}_i^{ext} = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

момент результирующей внешних сил, приложенных к *i-ой* МТ, относительно О

$$\vec{f}_{ik} \Longrightarrow \vec{M}_{ik} = [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}]$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} \Longrightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \vec{M}_{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}]$$

момент всех внутренних сил, приложенных к *i-ой* МТ, относительно О

Закон изменения (сохранения) момента импульса для системы МТ

Для *i*-ой МТ

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i^{ext}$$

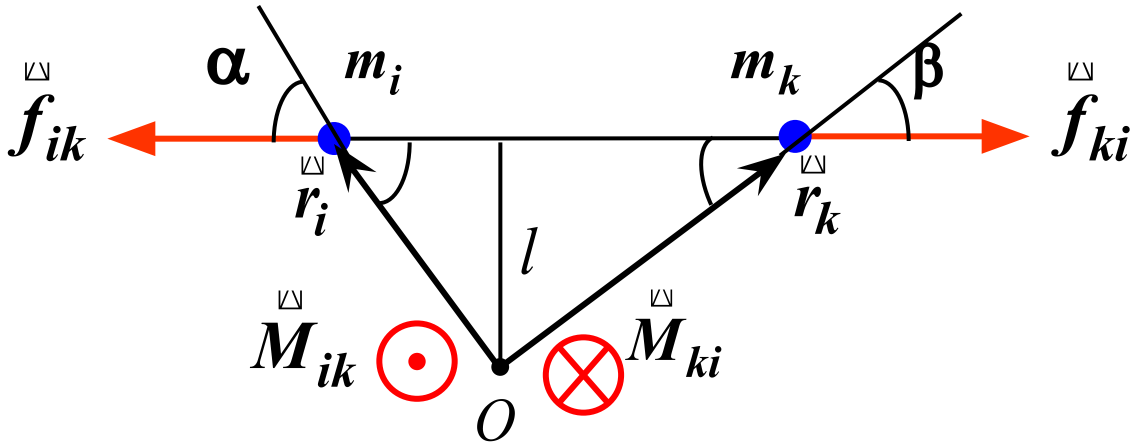
Просуммируем обе части по *i*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{M}_{ik}}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{ext}}_{\vec{M}^{ext}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i}_{=\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Докажем $\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{M}_{ik} = 0$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}}$$



$$\vec{M}_{ik} = [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}]$$

$$M_{ik} = r_i f_{ik} \sin\alpha = f_{ik} l$$

$$\vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k \times \vec{f}_{ki}]$$

$$M_{ki} = r_k f_{ki} \sin\beta = f_{ki} l$$

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{M}_{ik} = -\vec{M}_{ki}}$$

Моменты всех *внутренних* сил взаимно компенсируют друг друга

***l* -плечо силы**

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\vec{M}_{ik}}_{=0}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i^{ext}}_{\vec{M}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}^{ext}}$$

Закон изменения импульса для системы материальных точек относительно точки:

Скорость изменения момента импульса системы относительно точки равна результирующему моменту внешних сил приложенных к системе МТ.

Если $\vec{M}^{ext} = 0$, то $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const}$$

Закон сохранения момента импульса:

Суммарный момент импульса системы МТ относительно точки - величина постоянная, если векторная сумма моментов всех внешних сил относительно точки, действующих на систему, равна нулю.

Момент импульса относительно неподвижной оси

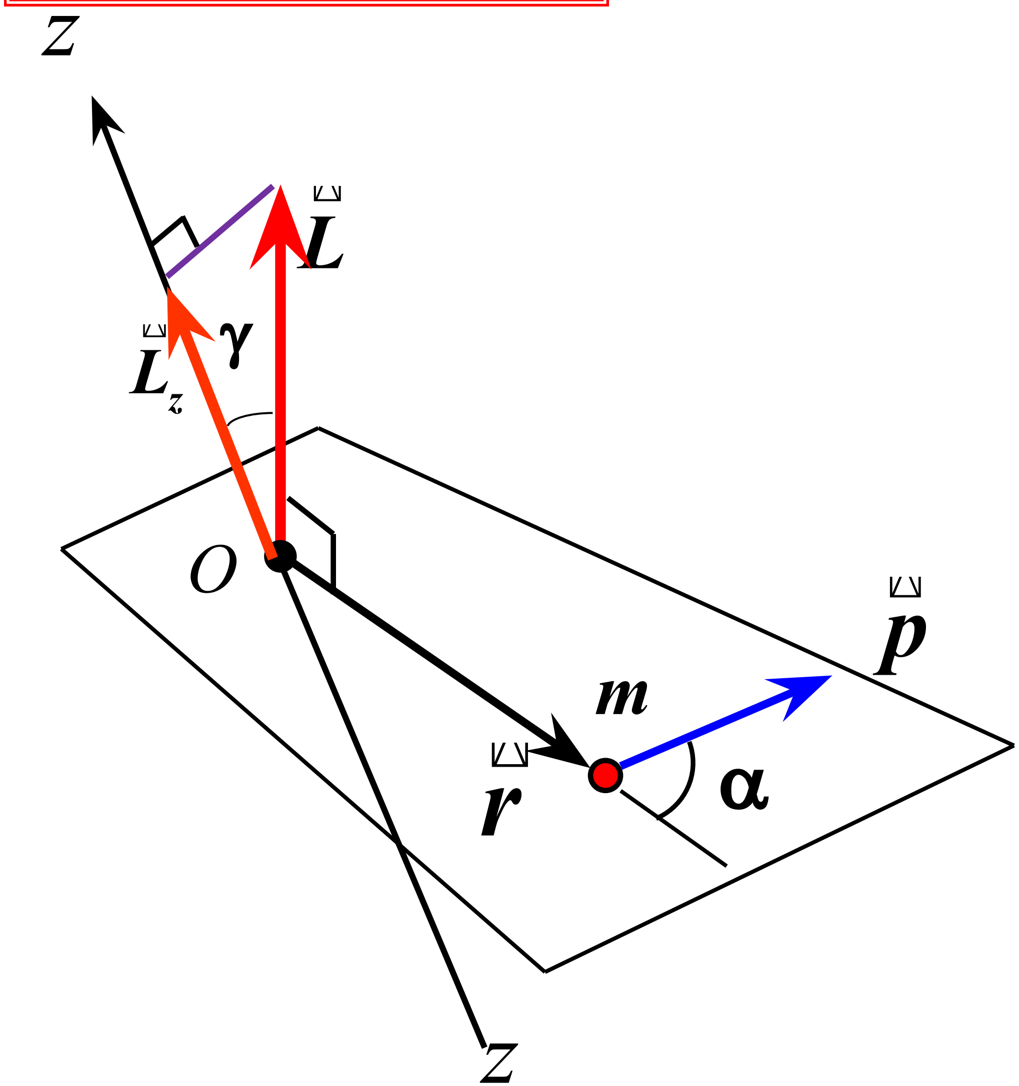
Момент импульса м.т. относительно точки $\vec{L}$

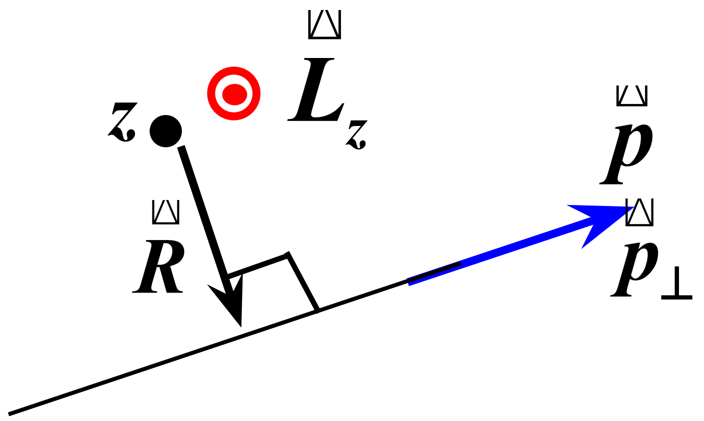
Момент импульса м.т. относительно оси $\vec{L}_Z$ ***равен проекции вектора*** $\vec{L}$ ***на ось Z***

$$\left|\vec{L}_z\right| = \left|\vec{L}\right| \cos\gamma$$

$$\gamma = 0$$

$$L_Z = L$$





$\vec{p}_\perp$ **- проекция вектора** $\vec{p}$ **на плоскость, перпендикулярную оси** z

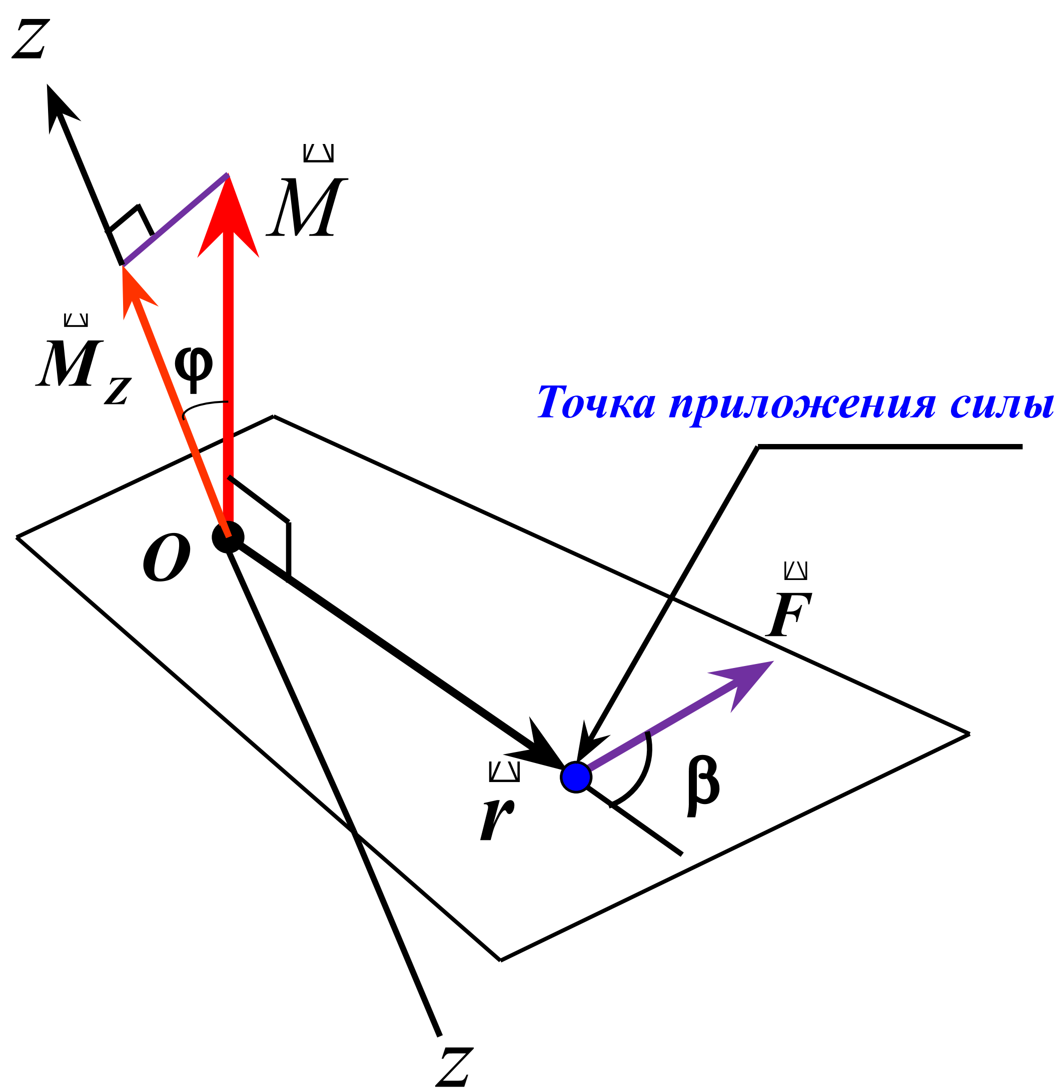
$$\vec{L}_z = \left[\vec{R} \times \vec{p}_\perp\right]$$

$l = \left|\vec{R}\right|$ **– плечо**

$$L_z = p_\perp \cdot l$$

Момент силы относительно точки $\vec{M}$

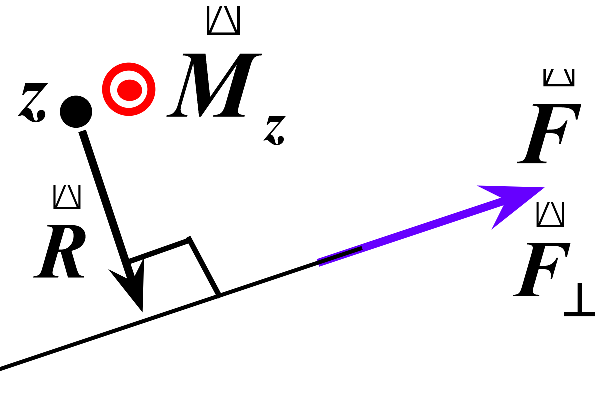
Момент силы относительно оси равен проекции вектора $\vec{M}$ на ось Z $\vec{M}_Z$



$$\left|\vec{M}_Z\right| = \left|\vec{M}\right| \cos\varphi$$

$$\varphi = 0$$

$$M_Z = M$$



$\vec{F}_\perp$ - проекция вектора $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси z

$$\vec{M}_z = \left[\vec{R} \times \vec{F}_\perp\right]$$

$l = \left|\vec{R}\right|$ – плечо силы

$$M_z = F_\perp \cdot l$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}^{ext}}$$

Векторное уравнение

в проекциях на оси центр, которых находится в точке О:

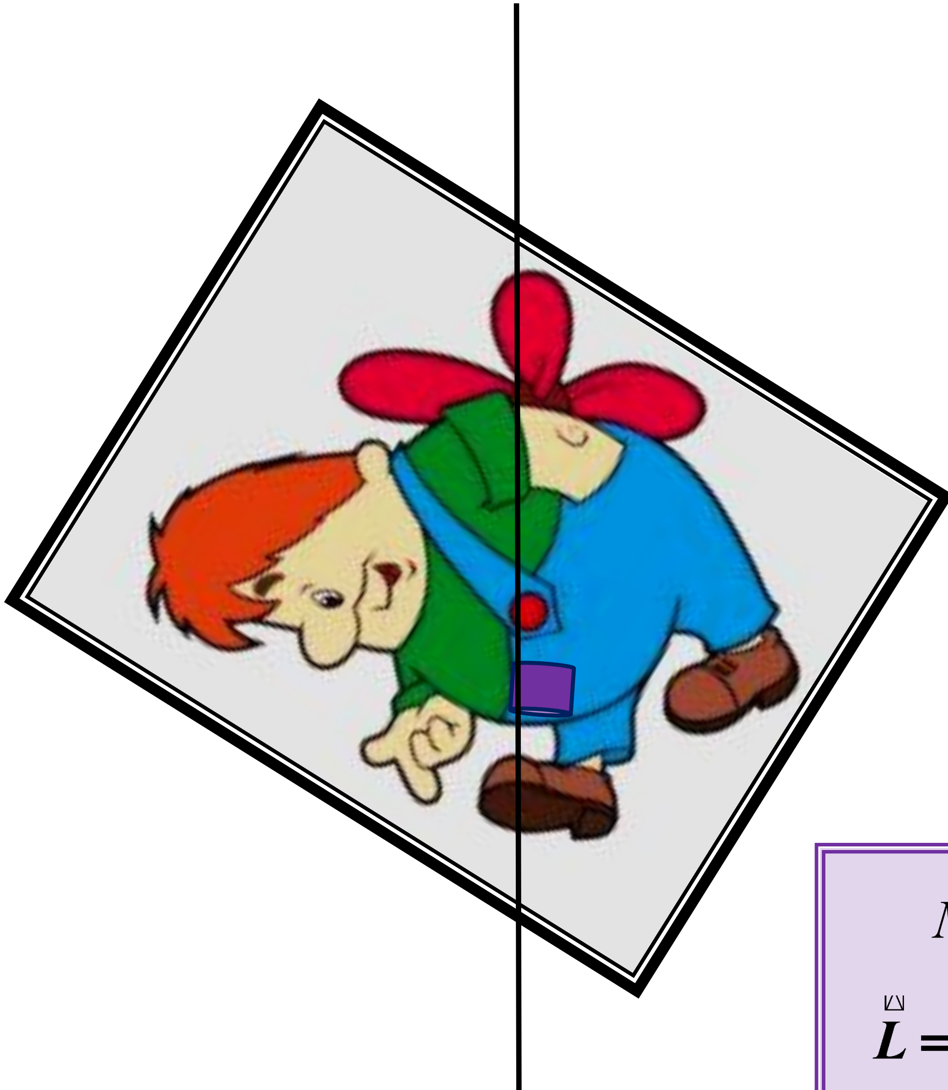
Три независимых уравнения

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} = M_x^{ext} \qquad \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t} = M_y^{ext} \qquad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z^{ext}$$

$$M_x^{ext} = 0 \qquad M_y^{ext} = 0 \qquad M_z^{ext} = 0$$

$$\Rightarrow L_x = \mathrm{const}; \qquad \Rightarrow L_y = \mathrm{const}; \qquad \Rightarrow L_z = \mathrm{const}$$

Проблемы при полетах…..



$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const = 0$$

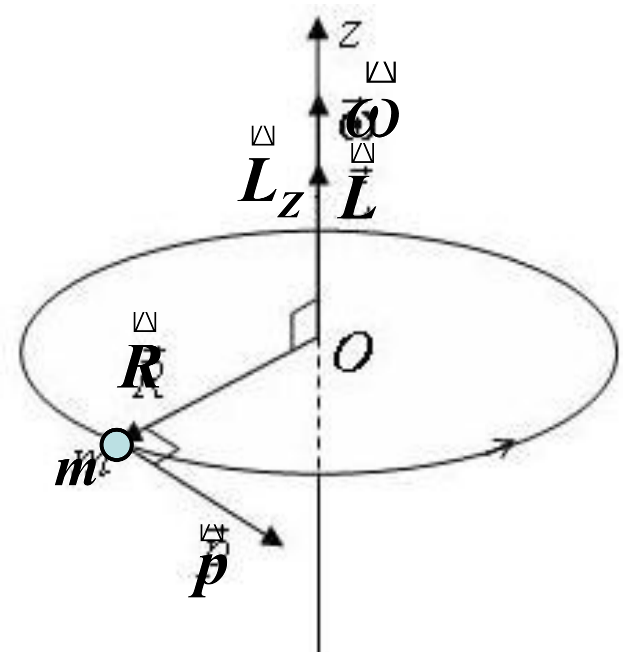
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_{propeller} + \vec{L}_{Carlson} = 0$$

$$(L_{Carlson})_Z = -(L_{propeller})_Z$$


1009


57

Момент инерции материальной точки относительно оси, перпендикулярной плоскости её обращения



МТ движется по окружности в плоскости, перпендикулярной оси (*z*), проходящей через цент окружности.

Момент импульса МТ относительно точки *O* :

$$\vec{L}_Z = [\vec{R} \times \vec{p}]$$

Проекция момента импульса на ось z

$$L_z = \left|\vec{L}_z\right| = Rp\sin\frac{\pi}{2} = Rm\upsilon = Rm\omega R = mR^2\omega$$

$I_z = mR^2$ **- момент инерции материальной точки относительно оси *z*.**

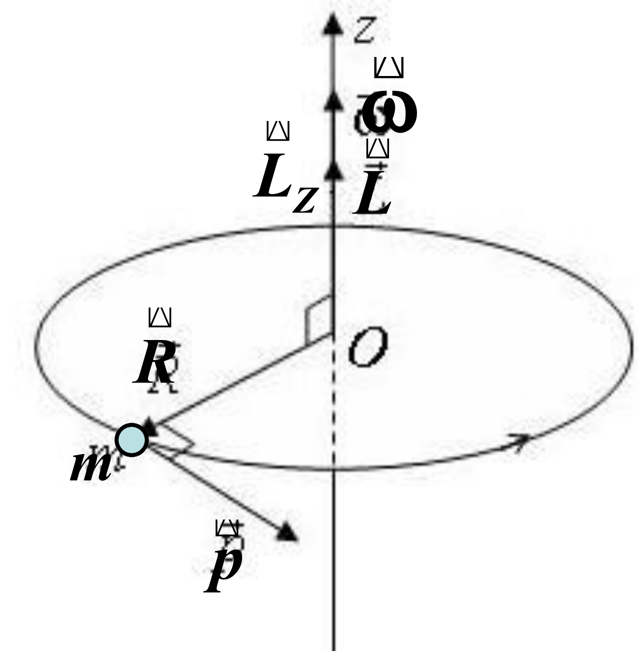
Момент инерции материальной точки относительно оси – это величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения.

Момент инерции материальной точки относительно оси, перпендикулярной плоскости её обращения

$$I_z = mR^2$$

$$L_z = mR^2\omega = I_z\omega$$

$$L_z = I_z\omega$$

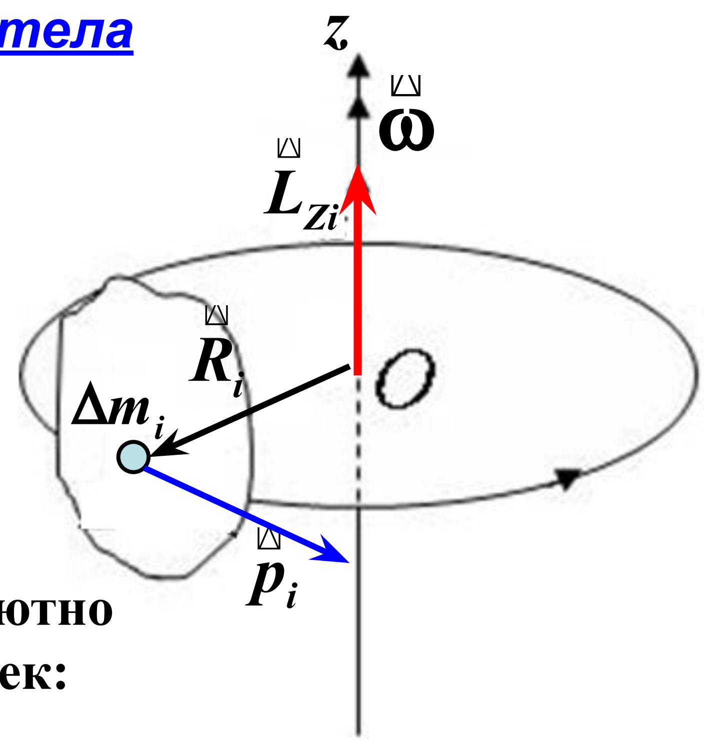


В векторной форме:

$$\boxed{\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}}$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси



Тело как совокупность N материальных точек

Δm_i **– масса i -ой МТ,** R_i **– расстояние от i -ой МТ до оси**

Момент импульса относительно оси для абсолютно твердого тела, как системы материальных точек:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{zi} = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 = I_z \vec{\omega}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2$$

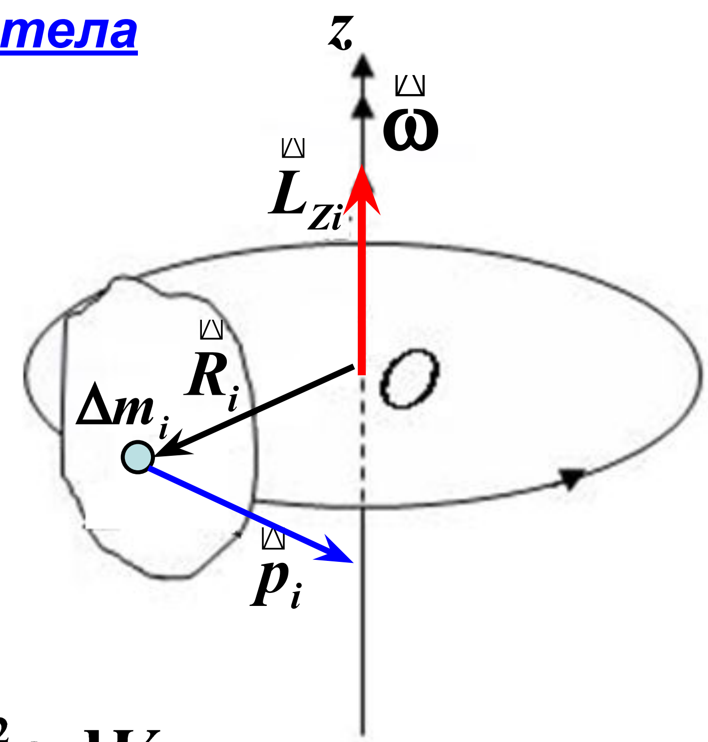
момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси z

I_z **зависит от: 1) массы материальных точек (тела);**

2) распределения масс в теле относительно оси (R_i);

3) выбора оси.

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси



Выражение для момента инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси в интегральном виде

$$\Delta m_i \Longrightarrow \mathrm{d}m \qquad R_i \Longrightarrow r$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 \Longrightarrow I_z = \int_m r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \, \mathrm{d}V$$

ρ - плотность

Для однородного по объему тела $\rho = const$

$$I_z = \rho \int_V r^2 \, \mathrm{d}V \Longleftarrow$$

Момент инерции твёрдого тела вычисляется интегрированием по объёму.

Момент инерции относительно неподвижной оси

Не абсолютно твердое тело

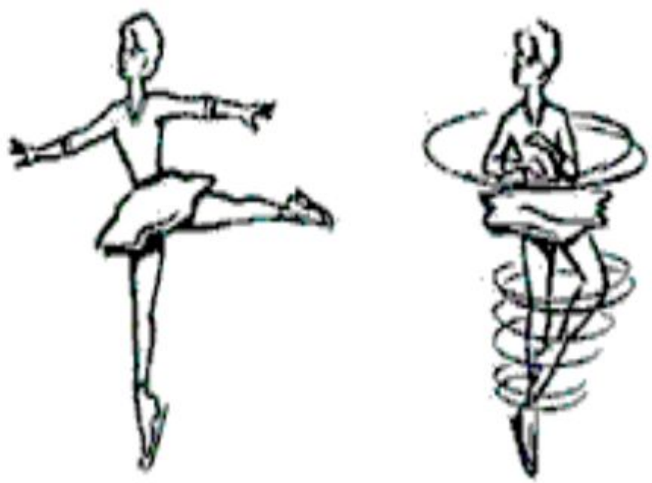
$$L_z = I_z\omega \Longrightarrow \omega = \frac{L_z}{I_z}$$

Момент инерции зависит от формы тела и может изменяться

Если $M_z = 0$, то $L_z = const$,
и при *изменении момента инерции*, *угловая скорость будет меняться*

$$I_z \downarrow \Leftrightarrow \omega \uparrow \qquad I_z \uparrow \Leftrightarrow \omega \downarrow$$

Примеры: фигурное катание и т. п.



Основное уравнение динамики вращательного движения

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси.

Момент импульса тела относительно оси

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}$$

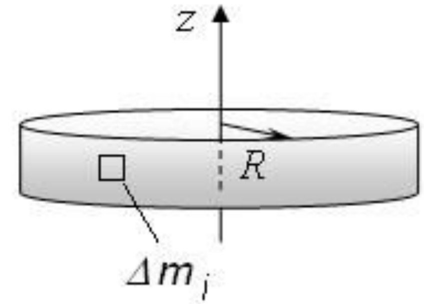
Под действием внешних сил $\vec{L}_z$ **и** $\vec{\omega}$ **будут меняться.**

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_z}{I_z}} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

основное уравнение динамики вращательного движения

Примеры расчета момента инерции абсолютно твердого тела



1. Тонкое кольцо, полый тонкостенный цилиндр

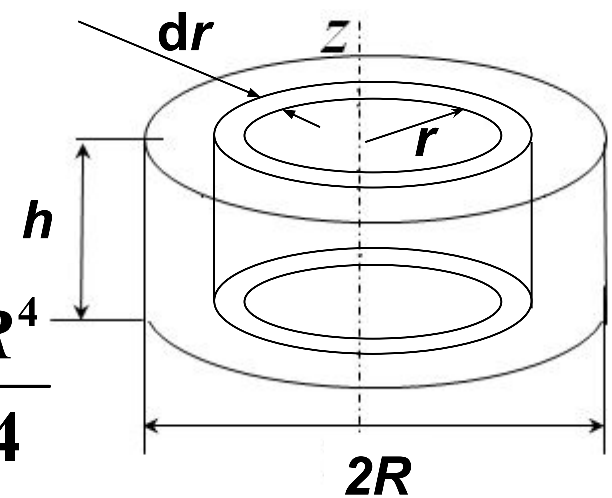
Найдём момент инерции относительно оси симметрии

$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2$$

$$\boxed{I_z = mR^2}$$

2. Однородный диск, сплошной цилиндр

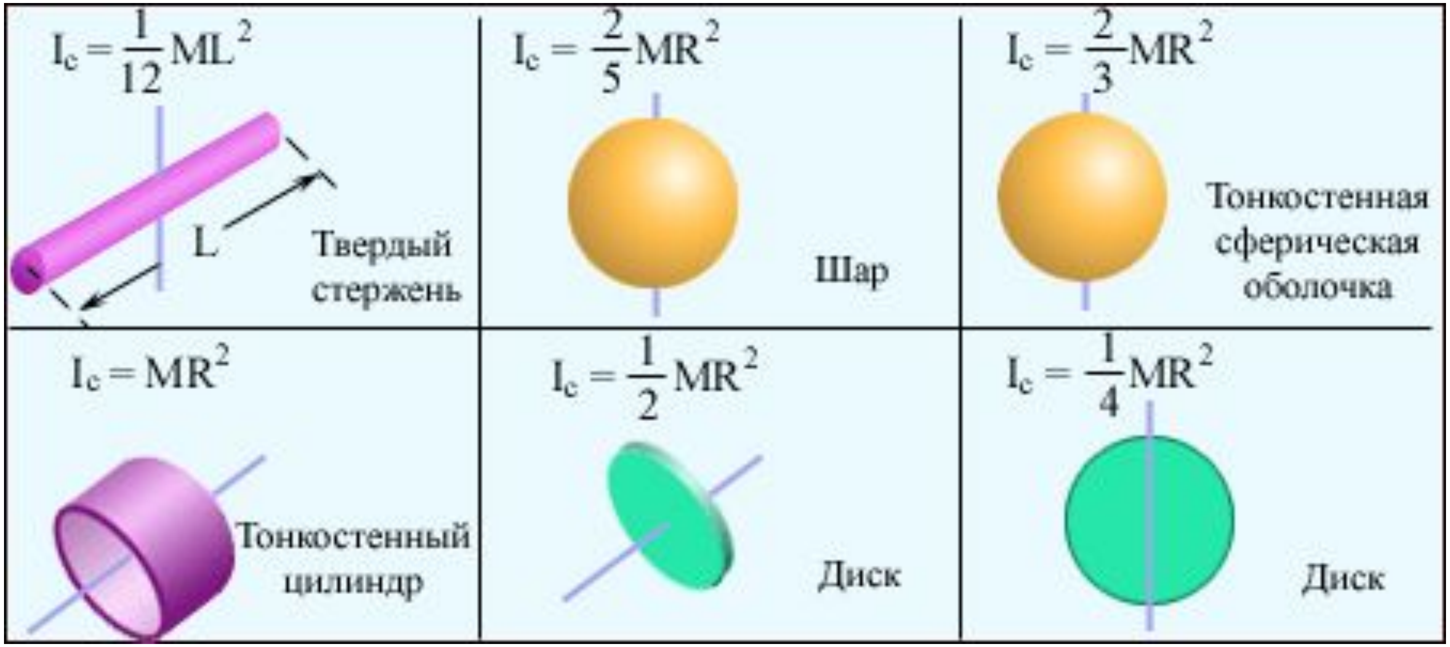
Найдём момент инерции относительно оси симметрии, проходящей через центр масс.



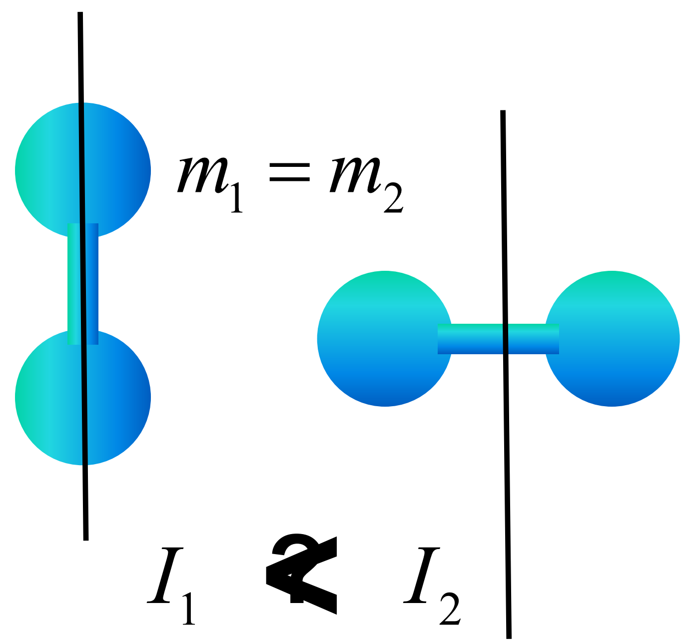
$$I_z = \rho \int_V r^2 \, dV \qquad dV = 2\pi r h dr \Longrightarrow$$

$$I_z = \rho \int_0^R r^2 2\pi r h dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}$$

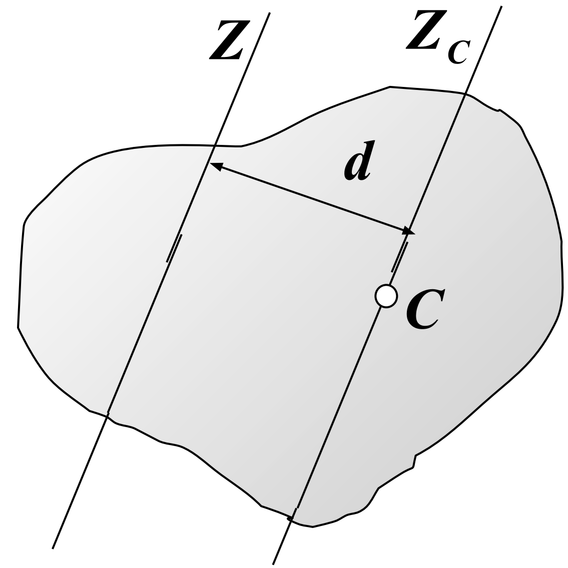
$$\pi R^2 \cdot h = V \quad V \cdot \rho = m \Longrightarrow \boxed{I_z = \frac{mR^2}{2}}$$



$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2$$



Теорема Штейнера



Момент инерции тела относительно произвольной оси Z равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I_Z = I_C + md^2$$

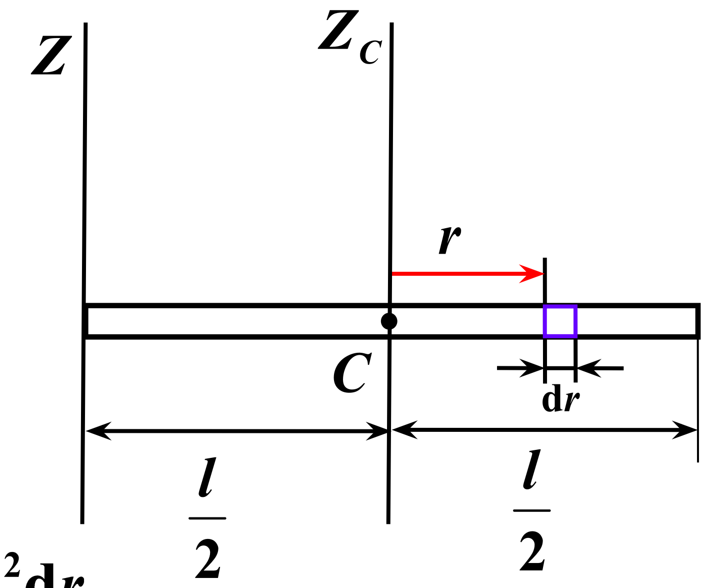
I_z – искомый момент инерции тела относительно оси Z;

I_C - момент инерции тела относительно оси , параллельной оси Z и проходящей через центр масс тела – точку C ;

d – расстояние между осями;

m – масса тела

Момент инерции однородного стержня.



1. *Момент инерции стержня относительно оси Z_C, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр (центр масс).*

Разобьем стержень на элементарные участки длиной d*r*.

$$\rho = \frac{m}{l} \Rightarrow \quad dm = \rho dr \qquad dI_c = r^2 dm = \rho r^2 dr$$

$$I_c = 2\int_0^{l/2} dI_C = 2\rho \int_0^{l/2} r^2 dr = 2\rho \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{l/2} = 2\rho \frac{l^3}{24} = \frac{ml^2}{12}$$

$$\boxed{I_C = \frac{1}{12} ml^2}$$

2. *Момент инерции относительно оси Z, проходящей через конец стержня параллельной оси Z_C.*

Согласно теореме Штейнера

$$I_Z = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

$$\boxed{I_Z = \frac{1}{3} ml^2}$$