

Лекция 1.2. Правила записи сложных формул

В логике высказываний элементарные высказывания рассматриваются как нерасчленяемые «атомы», а составные высказывания – как молекулы, образованные из «атомов» применением к ним логических операций. Логика высказываний интересуется единственным свойством элементарных высказываний – их значением истинности; составные же высказывания изучаются ею со стороны их логической структуры, отражающей способ, которым они образованы. Структура составных высказываний определяет зависимость их значений истинности от значений истинности составляющих элементарных высказываний.

Так как смысл высказываний математическую логику не интересует, их вполне можно заменить переменными.

Пусть $X, Y, Z, \dots, X_i, Y_i, Z_i$ – переменные, вместо которых можно подставить любые элементарные высказывания (или их значения истинности). Такие переменные называют пропозициональными или высказывательными переменными. С помощью высказывательных переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, т.е. заменить формулой, отражающей его логическую структуру.

Для определения понятие формулы этого зададим алфавит, т.е. набор символов, которые мы будем употреблять в логике высказываний:

$X, Y, Z, \dots, X_i, Y_i, Z_i$ (i – натуральное число) – символы для обозначения высказывательных переменных;

$I, L, 1, 0$ – символы, обозначающие логические константы «истина» и «ложь»;

$\neg, (\&,\boxtimes),\boxtimes, \rightarrow, \leftrightarrow$ – символы логических операций;

$(), []$ – скобки (вспомогательные символы, служащие для указания порядка выполнения операций).

Определение формулы логики высказываний (формулы ЛВ):

1. Всякая высказывательная переменная – формула ЛВ.

2. Символы $I, L, 1, 0$ – формулы ЛВ.

3. Если F – формула ЛВ, то $\bar{F}$ – формула ЛВ.

4. Если F_1 и F_2 – формулы ЛВ, то $F_1 \boxtimes F_2; F_1 \boxtimes F_2; F_1 \rightarrow F_2; F_1 \leftrightarrow F_2;$ – формулы ЛВ.

Никаких других формул в логике высказываний нет.

Определение такого вида называется индуктивным. В п.п. 1 и 2 определены элементарные формулы, в п.п. 3 и 4 даны правила образования новых формул из любых данных формул.

Условимся не заключать в скобки формулы, не являющиеся частями других формул или стоящие под знаком отрицания. Число левых скобок всегда должно быть равно числу правых скобок.

Если высказывание – простое, то ему ставится в соответствие элементарная формула.

Если высказывание – составное, то нужно:

- а) выделить все элементарные высказывания и логические связки, образующие данное составное высказывание;
- б) заменить их соответствующими символами;
- в) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Пример 1: Определите логическую структуру высказываний (формализуйте высказывания):

1. $E = \text{«Ваш проезд не является ни необходимым, ни желательным»}$.

Составляющие простые высказывания: $A = \text{Ваш проезд необходим}$; $B = \text{Ваш проезд желателен}$. Они соединены между собой неявно имеющимся в высказывании E союзом «и» и, кроме того, к каждому из них относится частица «не». Таким образом, форма сложного высказывания имеет вид: $E = \bar{A} \wedge \bar{B}$.

Пример 2. Запишем в форме логического выражения составное высказывание « $(2 \cdot 2 = 5 \text{ или } 2 \cdot 2 = 4)$ и $(2 \cdot 2 \neq 5 \text{ или } 2 \cdot 2 \neq 4)$ ».

Составное высказывание одержит два простых:

$A = \text{«} 2 \cdot 2 = 5 \text{ »}$ - ложно (0),

$B = \text{«} 2 \cdot 2 = 4 \text{ »}$ - истинно (1).

Тогда составное высказывание можно записать в следующей форме: « $(A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } B)$ ».

Теперь необходимо записать высказывание в форме логического выражения с учетом последовательности выполнения логических операций. При этом определен следующий порядок логических операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Для изменения указанного порядка могут использоваться скобки: $F = (A \boxtimes B) \boxtimes (\bar{A} \boxtimes \bar{B})$.

Истинность ложность составных высказываний можно определять формально, руководствуясь законами алгебры высказываний.

Подставим в логическое выражение значения переменных и, используя таблицы истинности базовых логических операций, получим значение логической функции: $F = (A \boxtimes B) \boxtimes (\bar{A} \boxtimes \bar{B}) = (0 \boxtimes 1) \boxtimes (1 \boxtimes 0) = 1 \boxtimes 1 = 1$.

Таблицы истинности. Для каждого составного высказывания можно построить таблицу, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).

При этом следует руководствоваться определенной последовательностью действий.

Во-первых, необходимо определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение. Если количество логических переменных равно n , то количество строк 2^n .

В нашем случае логическая функция $F = (A \boxtimes B)(\bar{A} \boxtimes \bar{B})$ имеет 2 переменные и, следовательно, количество строк в таблице истинности должно быть равно 4.

Во-вторых, необходимо определить количество столбцов в таблице истинности, которое равно количеству логических переменных плюс количество логических операций. В нашем случае количество переменных равно двум, а количество логических операций - пяти, то есть количество столбцов таблицы истинности равно семи.

В-третьих, необходимо построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов, обозначить столбцы и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.

В-четвертых, необходимо заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности. Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Таблица истинности логической функции $F = (A \oplus B) \oplus (\bar{A} \oplus \bar{B})$

A	B	$A \oplus B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \oplus \bar{B}$	$(A \oplus B) \oplus (\bar{A} \oplus \bar{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Равносильные логические выражения. Логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают, называются *равносильными*. Для обозначения равносильных логических выражений используется знак « $=$ ».

Докажем, что логические выражения $\bar{A} \boxtimes \bar{B}$ и $\overline{A \boxtimes B}$ равносильны. Построим сначала таблицу истинности логического выражения $\bar{A} \boxtimes \bar{B}$.

Таблица истинности логического выражения $\bar{A} \boxtimes \bar{B}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \boxtimes \bar{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Теперь построим таблицу истинности логического выражения $\overline{A \boxtimes B}$.

Таблица истинности логического выражения $\overline{A \boxtimes B}$

A	B	$A \boxtimes B$	$\overline{A \boxtimes B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Значения в последних столбцах таблиц истинности совпадают, следовательно, логические выражения равносильны:

$$\overline{A \boxtimes B} = \overline{A \boxtimes B}$$

Вопросы для размышления

1. Что содержат таблицы истинности и каков порядок их построения?

2. Какие логические выражения называются равносильными?

Задания

3.1. Записать составное высказывание " $(2 \cdot 2 = 4 \text{ и } 3 \cdot 3 = 9)$ или " $(2 \cdot 2 \neq 4 \text{ и } 3 \cdot 3 \neq 9)$ в форме логического выражения. Построить таблицу истинности.

3.2. Доказать, используя таблицы истинности, что логические выражения $\overline{A \boxtimes B}$ и $A \boxtimes B$ - равносильны.