

Дискретная математика

**Характеристические числа
графов**

Цикломатическое число

Цикломатическим

числом графа ***G***

называется число ребер,

которые надо убрать, что

бы граф стал ациклическим.

Цикломатическое число

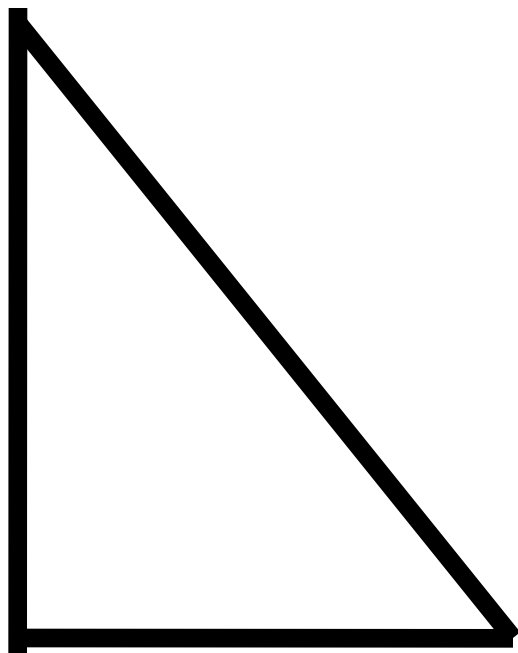


Рис. 1

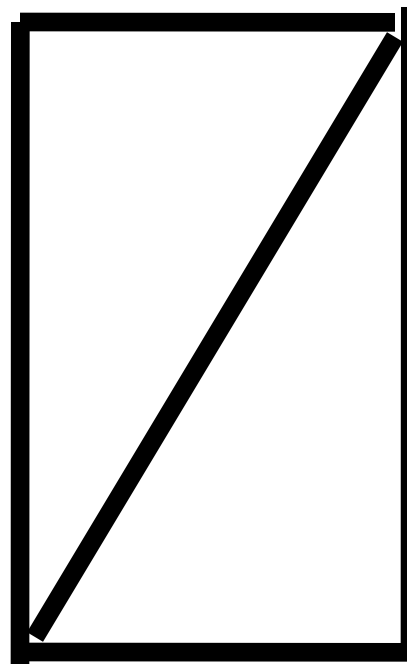


Рис. 2

Цикломатическое число

Цикломатическое число графа G находится по формуле:

$$\gamma(G) = v_e - v_v + v_c$$

v_e – число ребер

v_v – число вершин,

v_c – число компонент связности.

Цикломатическое число

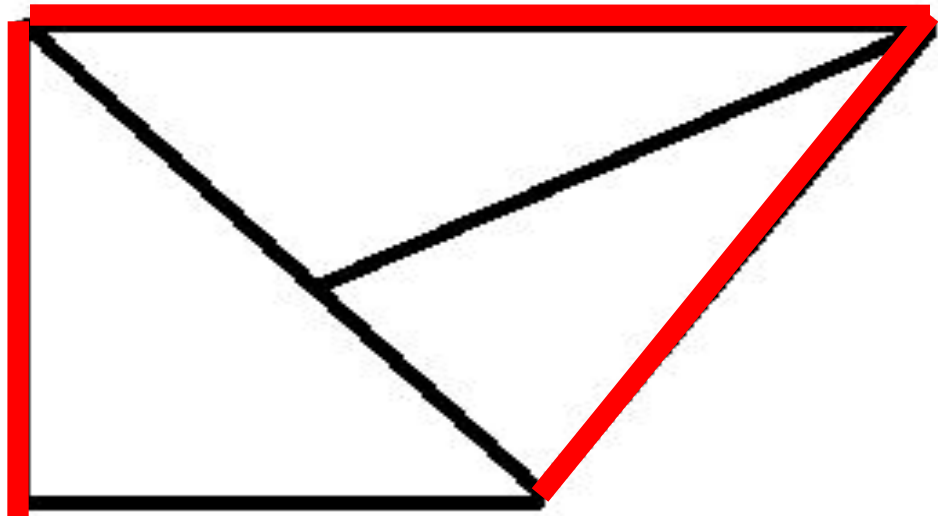
Замечание 1. Цикломатическое число *дерева равно 0.*

Замечание 2. Цикломатическое число *леса равно 0.*

Замечание 3. Если цикломатическое число графа равно 1, то в графе ровно 1 цикл.

Цикломатическое число

Пример 1.



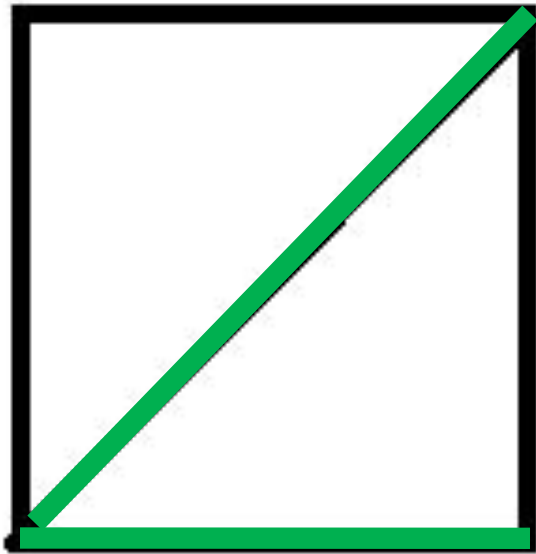
$$\begin{aligned}\gamma(G) &= v_e - v_v + v_c = \\ &= 7 - 5 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Цикломатическое число

Пример 2. $\gamma(G) =$

$$= v_e - v_v + v_c =$$

$$= 10 - 7 + 2 = 5.$$



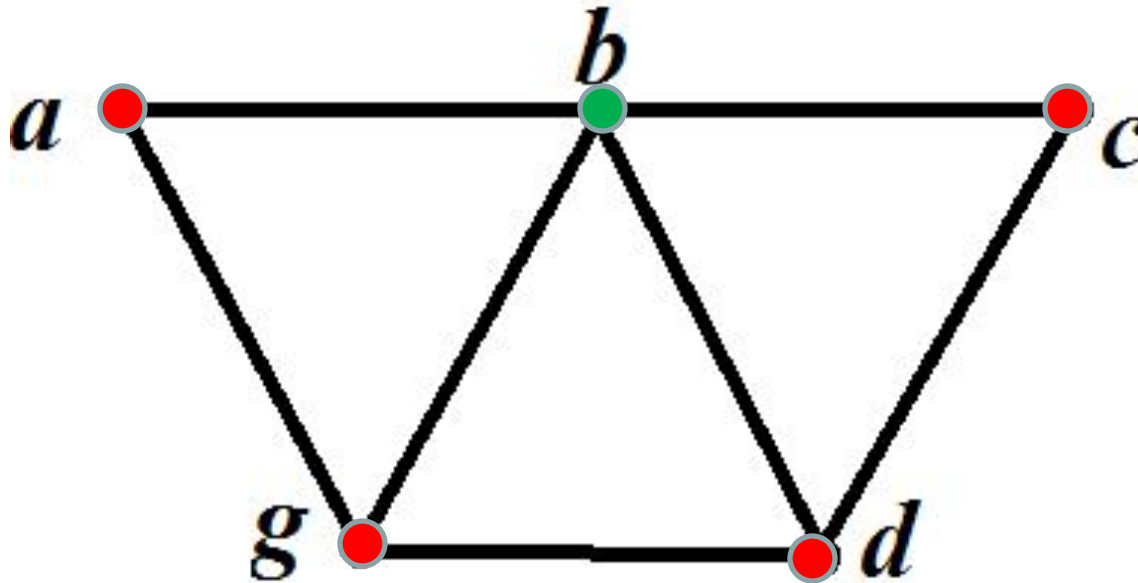
Число внутренней устойчивости

Внутренне устойчивым множеством графа G называется множество вершин S , все вершины которого попарно несмежны.

Число внутренней устойчивости:

$$\alpha(G) = \max_{S \subseteq V} |S|$$

Число внутренней устойчивости



$$S_1 = \{a\}, S_2 = \{a, c\}, S_3 = \{g, c\}, S_4 = \{a, d\}.$$

$$\alpha(G) = \max |S_i| = 2.$$

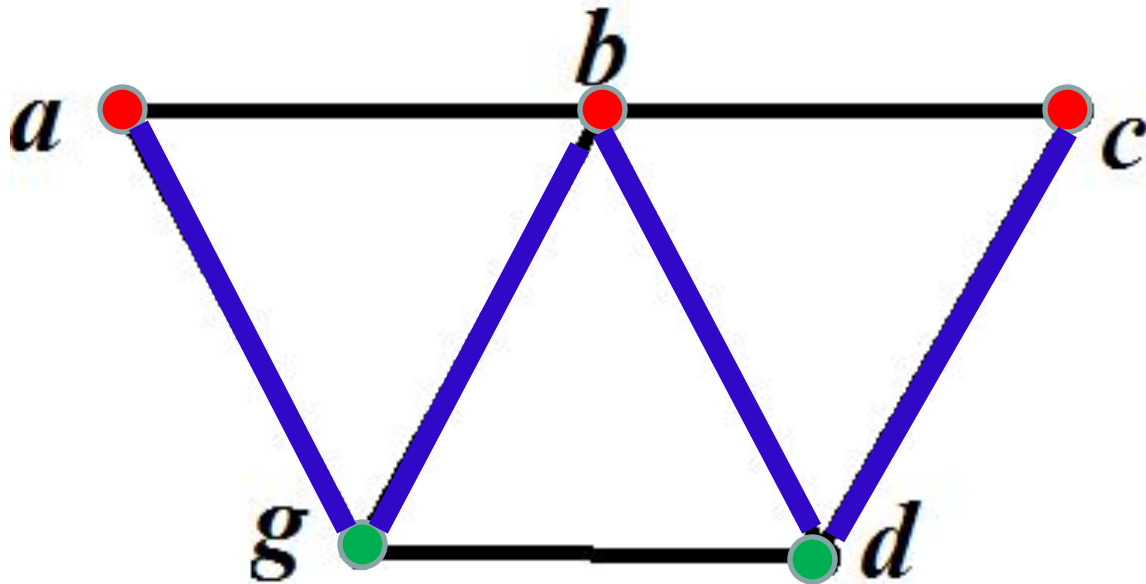
Число внешней устойчивости

Внешне устойчивым множеством графа G называется множество вершин Q , таких, что из всех вершин множества $\neg Q$ ведут ребра в вершины множества Q .

Число внутренней устойчивости:

$$\beta(G) = \min_{Q \subseteq V} |Q|$$

Число внешней устойчивости



$$Q_1 = \{a, b, c\}, Q_2 = \{g, d\}.$$

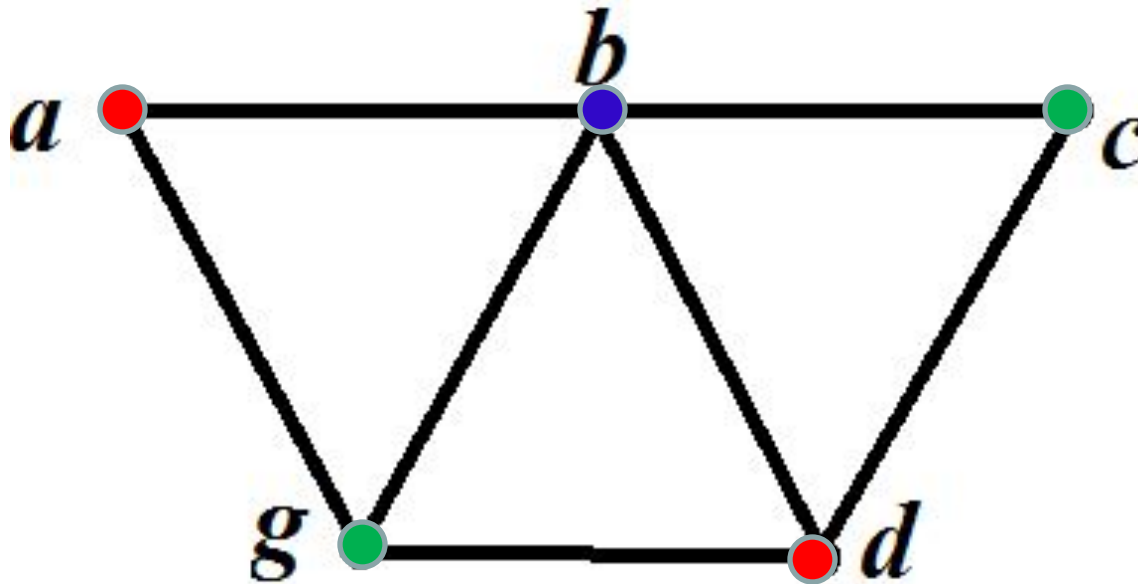
$$\beta(G) = \min |Q_i| = 2.$$

Хроматическое число

Граф G называется h -хроматическим, если его вершины можно раскрасить h различными красками так, чтобы никакие две смежные (различные) вершины не были окрашены в один цвет. *Хроматическое число графа* – это наименьшее число красок.

$$\chi(G) = \min h$$

Хроматическое число



$$H_1 = \{a, d\}, H_2 = \{g, c\}, H_3 = \{b\}.$$

$$\chi(G) = \min h = 3.$$

Хроматическое индекс

Граф ***G*** называется *k*-раскрашиваемым, если его ребра можно раскрасить *k* различными красками так, чтобы никакие два смежные ребра не были окрашены в один цвет. ***Хроматический индекс графа*** – это наименьшее число красок.

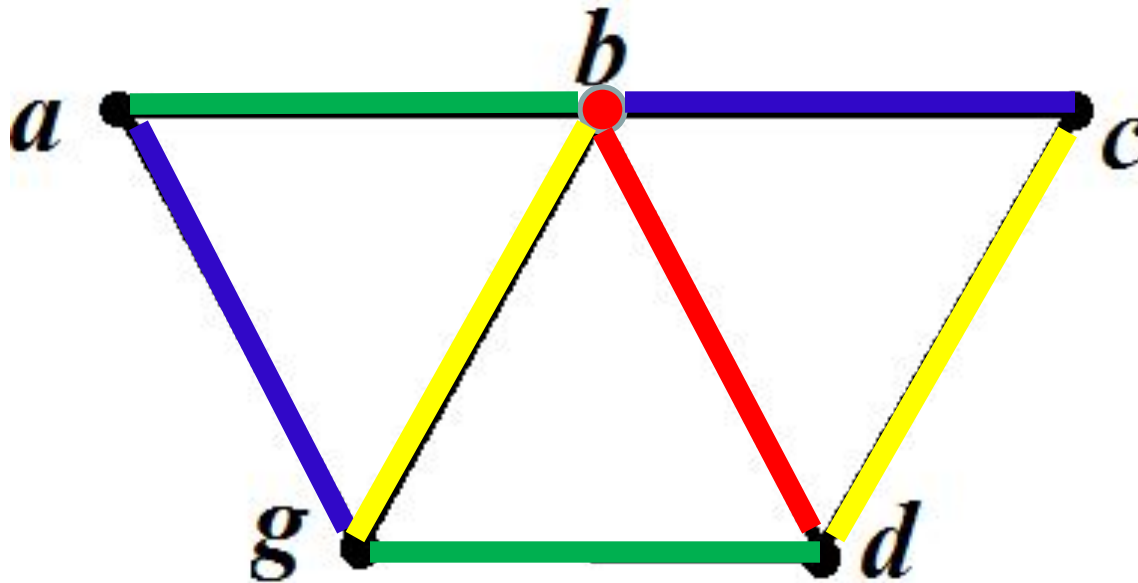
$$\chi'(G) = \min k$$

Хроматическое индекс

Согласно *теореме Визинга*, если максимальная локальная степень вершины графа равна *k*, то хроматический индекс подчиняется условию:

$$k \leq \chi'(G) \leq k + 1$$

Хроматическое число

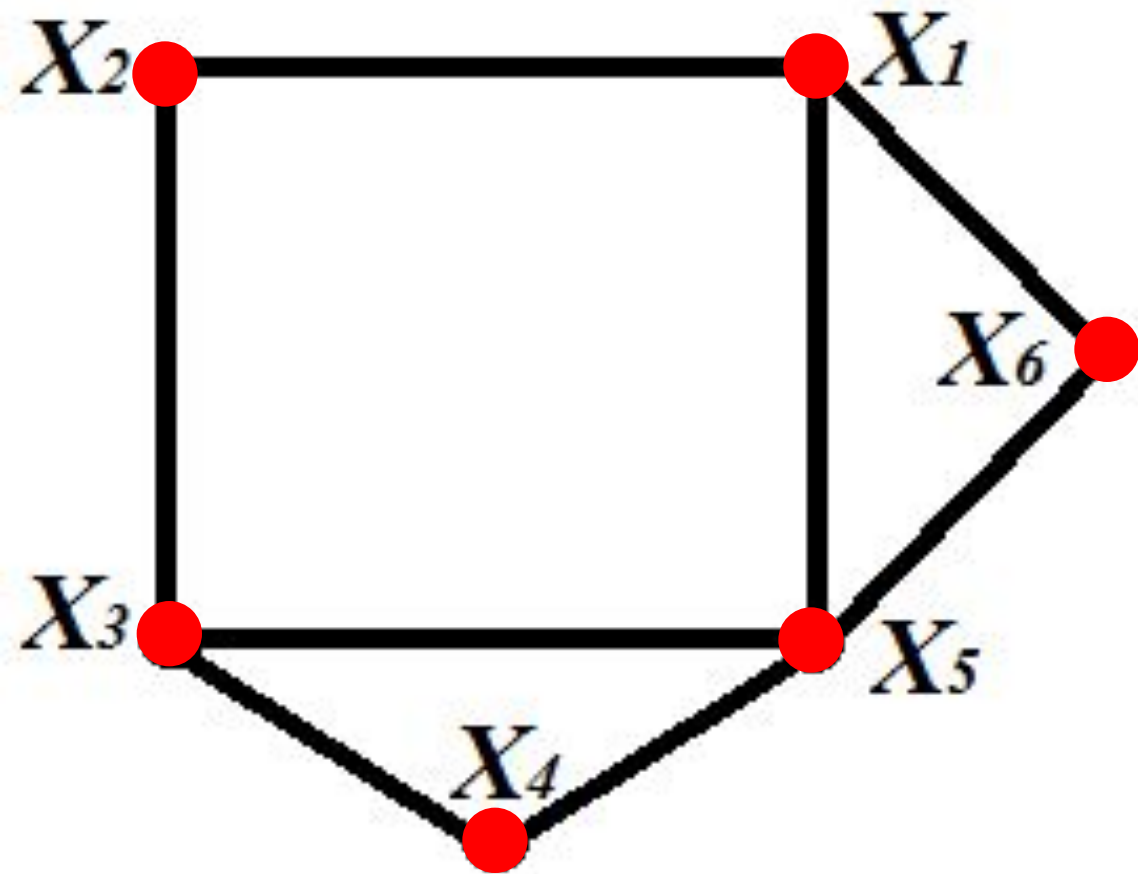


$$k = \max \rho(v) = \rho(b) = 4$$

$$4 \leq \chi'(G) \leq 5 \qquad \chi'(G) = 4$$

Пример 1

В пунктах $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ могут быть источники излучения. Если источники расположены в пунктах X_i и X_j влияют друг на друга (поражают друг друга), то на графе они соединены ребром (X_i, X_j) . Можно ли расположить в каких-либо из данных пунктов 4 или 3 источника, не поражающих друг друга?

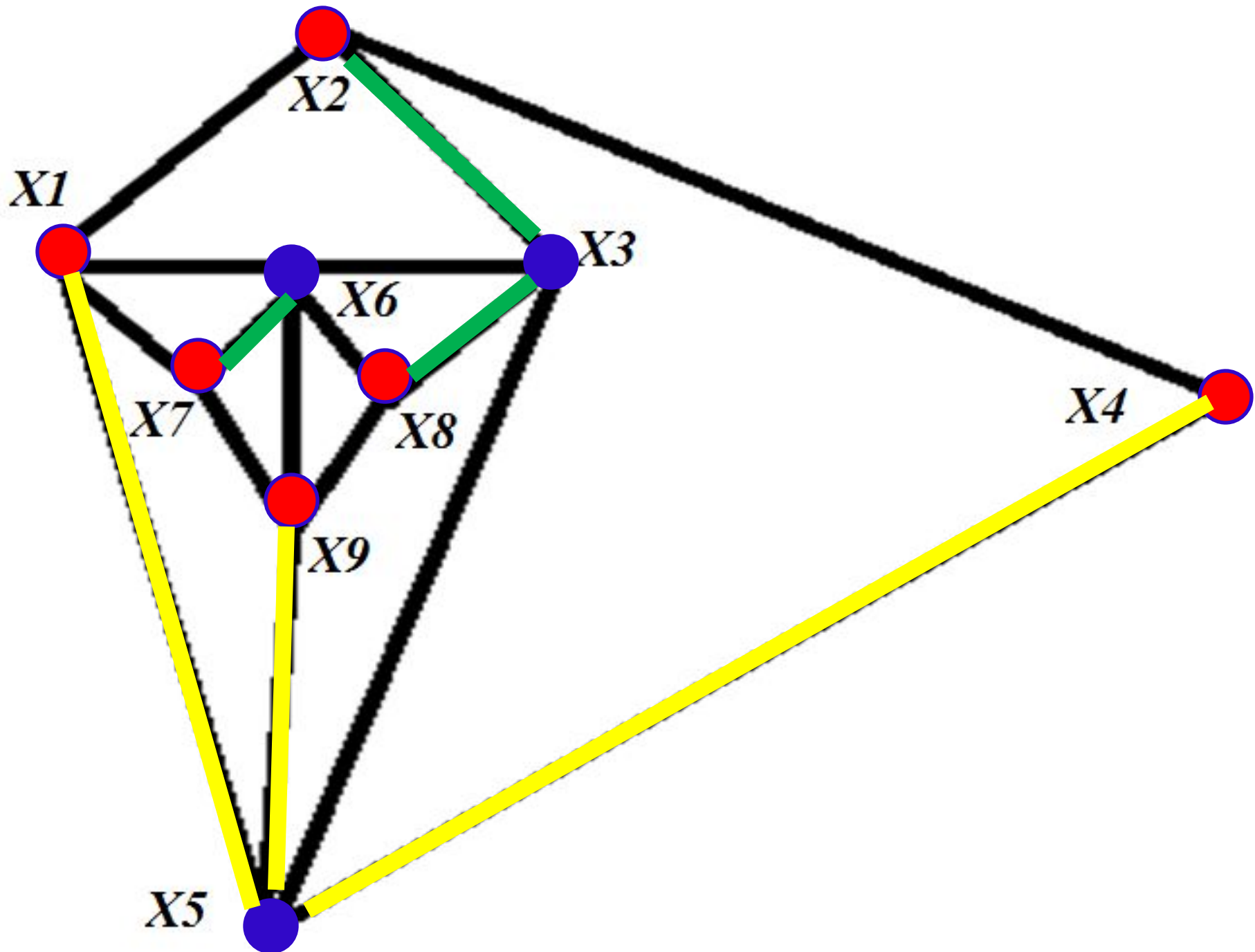


Надо найти
максимальное
внутренне
устойчивое
множество.

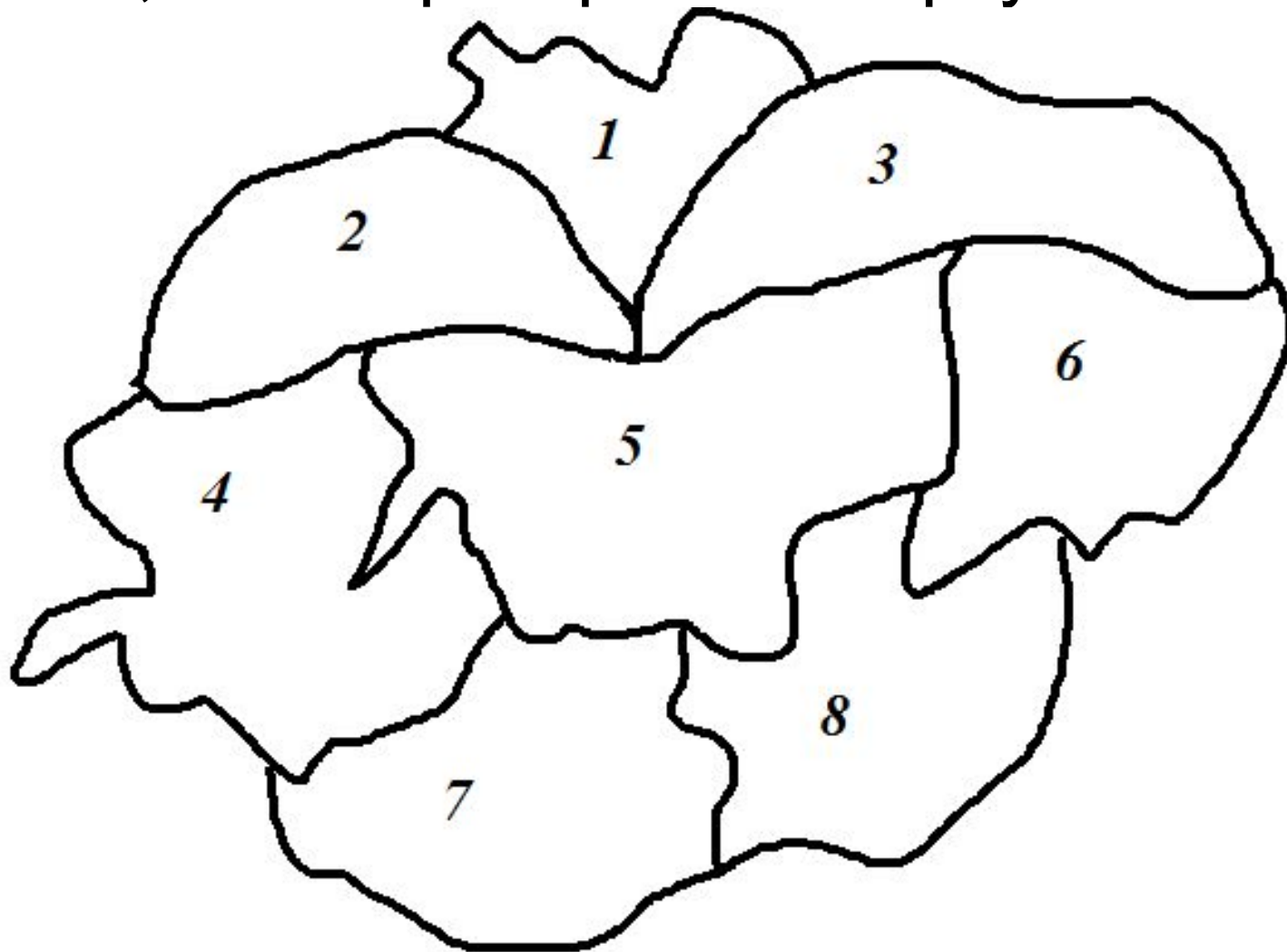
$$S_1 = \{X_2, X_5\}, \quad S_2 = \{X_1, X_4\}, \quad S_3 = \{X_3, X_6\}, \\ S_4 = \{X_1, X_3, X_5\}.$$

Пример 2

Объекты X_1, X_2, \dots, X_9 расположены так, как показано на графе. Объекты, которые просматриваются друг из друга соединены ребрами. Определить в каких объектах достаточно поставить камеры наблюдения, чтобы они в совокупности просматривали все объекты.

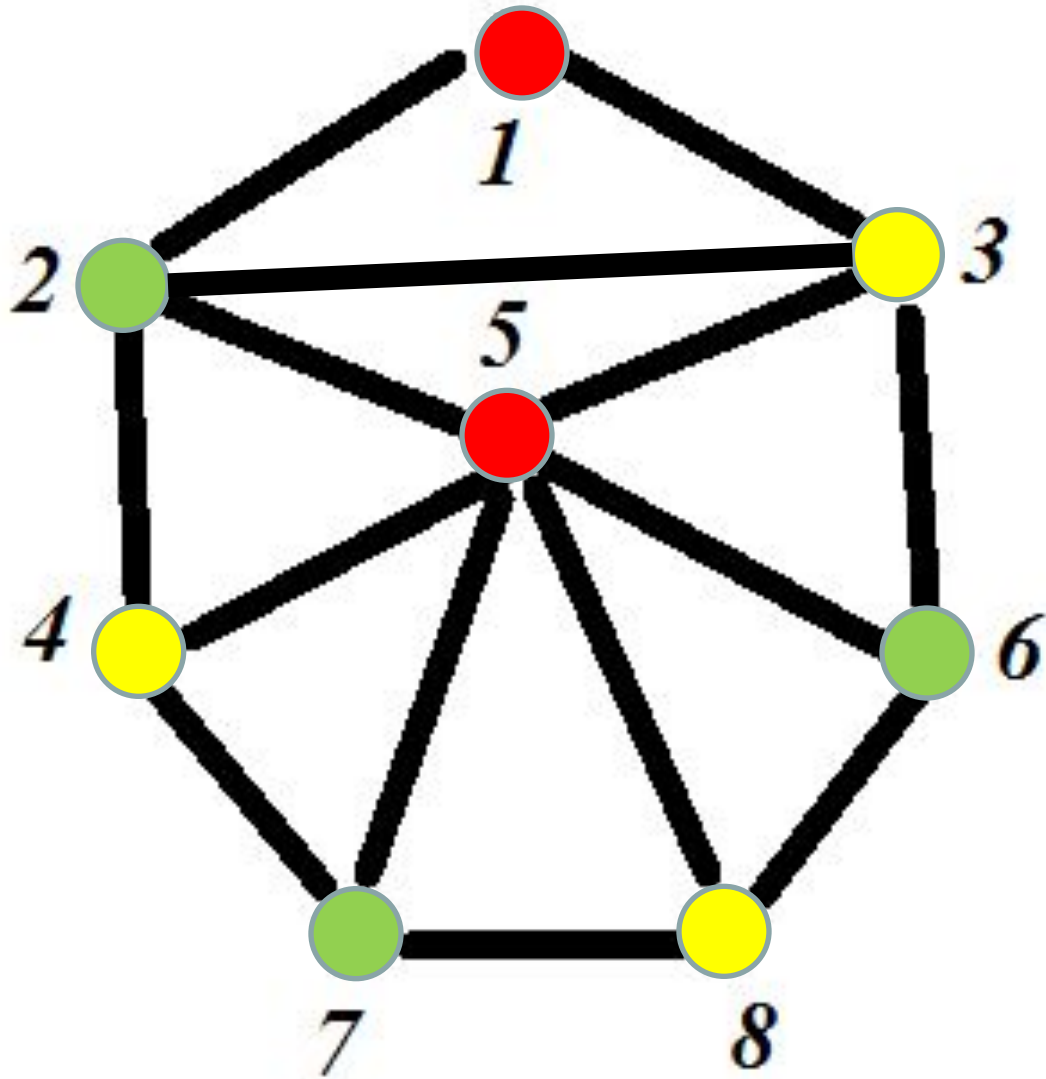


Пример 3. Дана политическая карта континента. Найти минимальное число цветов, чтобы раскрасить карту.



Заменим
страны на
вершины, а
границы между
ними на ребра.
Найдем
хроматическое
число графа.

$$\chi(G) = 3.$$



Раскраска карты в три цвета

