

Дискретная математика



Соответствия и функции

Соответствием множеств A и B называется подмножество G такое, что $G \subseteq A \times B$.
Если $(a, b) \in G$, то говорят, что
“ b соответствует a при соответствии G ”.

Область определения соответствия G –
множество $\text{pr}_1 G \subseteq A$.

Область значений соответствия G –
множество $\text{pr}_2 G \subseteq B$.

- Соответствие G называется *всюду (полностью) определенным* – если $\text{pr}_1 G = A$ (в противном случае – частично определенное соответствие).
- Соответствие G называется *сюръективным*, если $\text{pr}_2 G = B$.

- **Образ** элемента a в множестве B при соответствии G – это множество всех элементов $b \in B$ которые соответствуют $a \in A$.

Прообраз элемента b в множестве A при соответствии G – это множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in B$.

- **Образом множества** $C \in \text{pr}_1 G$ называется объединение образов всех элементов C .

- *Прообразом множества $D \in \text{pr}_2 G$* называется объединение прообразов всех элементов D .
- Соответствие G называется *функциональным (однозначным) соответствием*, если образом любого элемента из $\text{pr}_1 G$ является единственный элемент из $\text{pr}_2 G$.

- Соответствие G называется *инъективным* соответствием, если прообразом любого элемента из $\text{pr}_2 G$ является единственный элемент из $\text{pr}_1 G$.
- Соответствие F является *функцией типа* $F : A \rightarrow B$, если оно функционально (однозначно) $F(a) = b$.

- Соответствие G является *отображением* множества A в множество B , если оно функционально и полностью определено.
- Соответствие G является *взаимно однозначным*, если оно:
 - 1) всюду определено; 2) сюръективно;
 - 3) функционально; 4) инъективно.

- *Преобразованием множества A* называется отображение типа $A \rightarrow A$.
- Функция типа $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ называется *n -местной функцией* ($f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$).
- Соответствие $H \subseteq A \times B$ называется обратным к $G \subseteq A \times B$, если H таково, что

$$(b, a) \in H \Leftrightarrow (a, b) \in G.$$

- Если соответствие, обратное к функции $f : A \rightarrow B$ является функциональным, то оно называется *функцией, обратной к f* , (f^{-1}).
- Пусть дана функция $f : A \rightarrow B$. Соответствие (f^{-1}) является функцией тогда и только тогда, когда f инъективна, и является отображением тогда и только тогда, когда f инъективна и сюръективна (т. е. *биективна*).

- **Утверждение:** Для функции $f : A \rightarrow B$ существует обратная функция (f^{-1}) тогда и только тогда, когда f является взаимнооднозначным соответствием между своей областью определения и областью значений.

- Пусть даны функции $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$
- Функция $h : A \rightarrow C$ называется **композицией функций** f и g , если $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$ (обозначение $h = f \circ g$). Часто говорят, что h получена **подстановкой** f в g .

Для многоместных функций $f : A^m \rightarrow B$ и $g : B^n \rightarrow C$ возможны различные варианты подстановки f в g , задающие функции различных типов. Например, при

$m = 3$ и $n = 4$ функция $B \times A^3 \times B^2 \rightarrow C$ имеет 6 аргументов и.

$$h = g(b_1, f(a_1, a_2, a_3), b_3, b_4)$$

- Для множества **многоместных функций** типа $f_1 : A^{m_1} \rightarrow A, \dots, f_n : A^{m_n} \rightarrow A$ **ВОЗМОЖНЫ** любые *подстановки функций* друг в друга, а также любые *переименования аргументов*.
- Например, переименование x_3 в x_2 из функции четырёх аргументов порождает функцию трёх аргументов:

$$f(x_1, x_2, x_2, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

- Функция, полученная из функций f_1, \dots, f_n некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется *суперпозицией* функций f_1, \dots, f_n .
- Выражение, задающее эту суперпозицию и содержащее функциональные знаки, скобки и символы аргументов, называется *формулой*.

Взаимно однозначные соответствия и МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

- Утверждение (о взаимно однозначном соответствии равномоощных множеств):
Если между конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, то $|A| = |B|$.

- Этот факт:
- 1) позволяет установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя мощностей этих множеств;
- 2) дает возможность вычислить мощность множества, установив его взаимно однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляется.