Урок 2

Определенный интеграл. Площадь криволинейной трапеции

Три пути ведут к знанию:

путь размышления - это путь самый благородный,

путь подражания - это путь самый легкий,

и путь опыта - это путь самый трудный.

Конфуций

Устно ответьте на вопрос задачи

Найти все первообразные данной функции (1—17).

1. $\boxed{3}$ $3x^3-4x^2$.

2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}$.

3. $\boxed{3}$ x^5-2x.

4. $\boxed{4}$ $-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}$.

5. $\boxed{4}$ $2\sin x+x^2$.

6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

7. $\boxed{4}$ $4e^x+x^3$.

8. $\boxed{4}$ $\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$.

Устно ответьте на вопрос задачи

Найти все первообразные данной функции (1—17).

1. $\boxed{3}$ $2x^4 - 5x$.

2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}$.

3. $\boxed{3}$ $x^6 + 3x^2$.

4. $\boxed{4}$ $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}$.

5. $\boxed{4}$ $3\cos x - x$.

6. $\boxed{5}$ $x\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

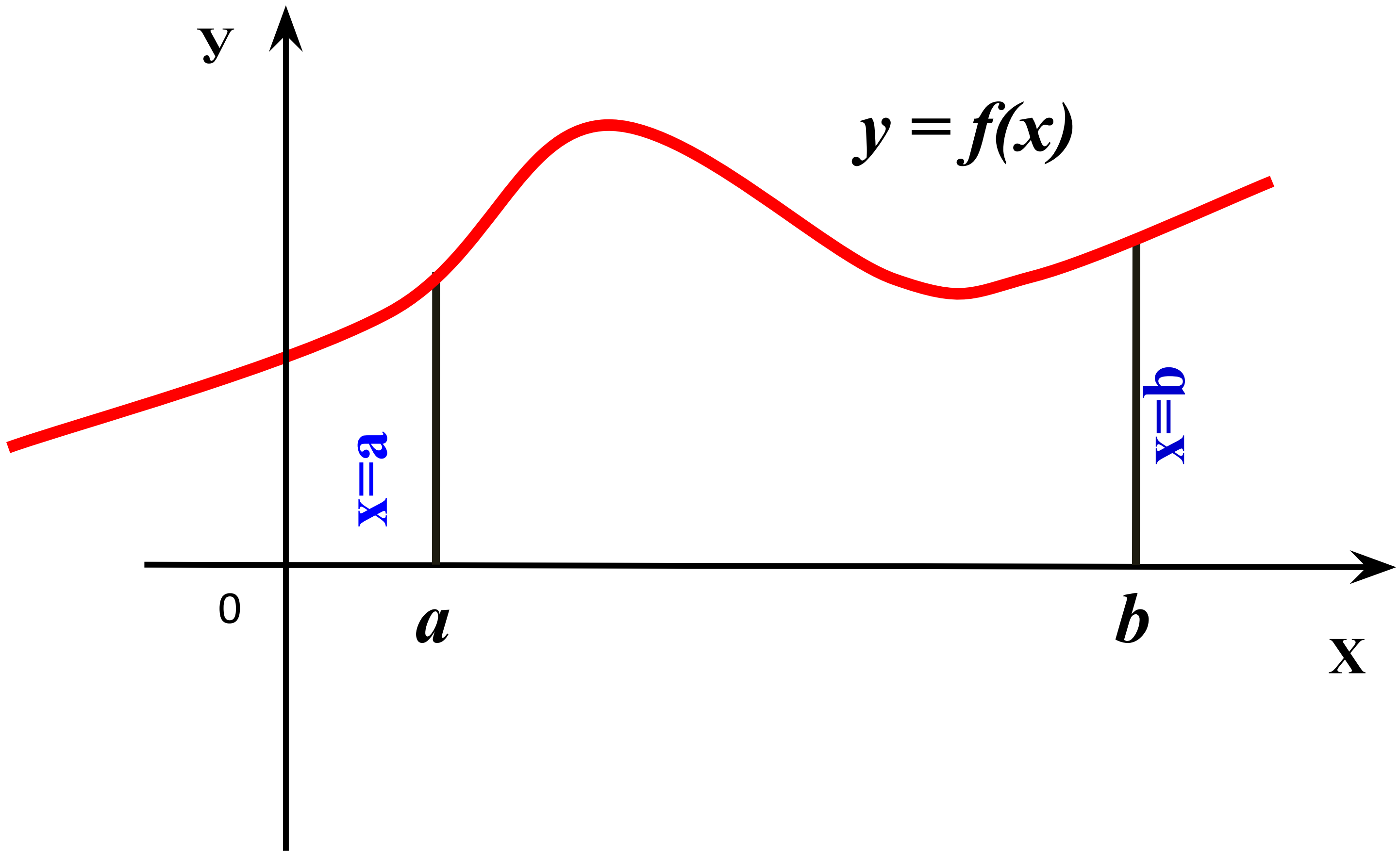
7. $\boxed{4}$ $5e^x - 2x^4$.

8. $\boxed{4}$ $x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

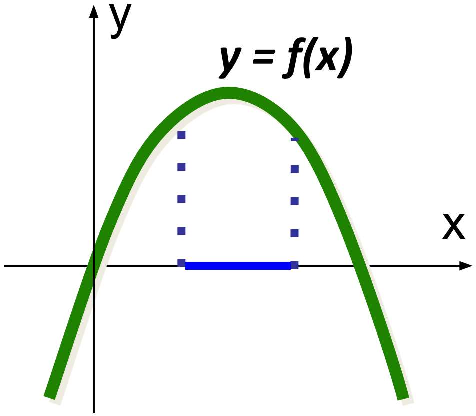
Криволинейная трапеция

Фигура ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a,\ x=b,$ называется криволинейной трапецией.

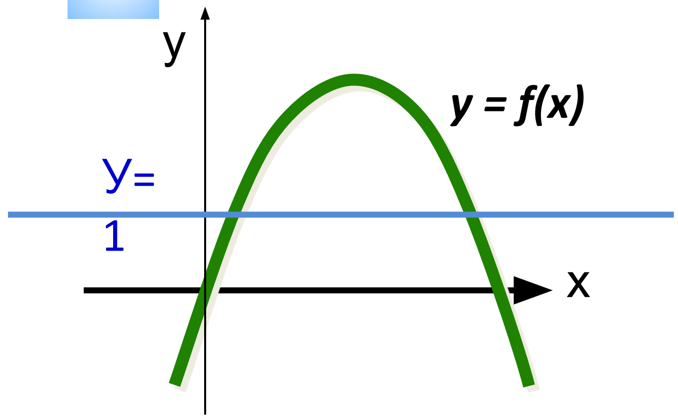
Отрезок [a; b] называют основанием криволинейной трапеции.



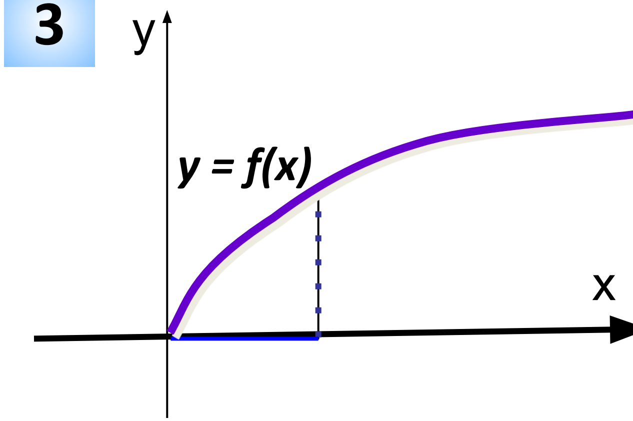
1



2

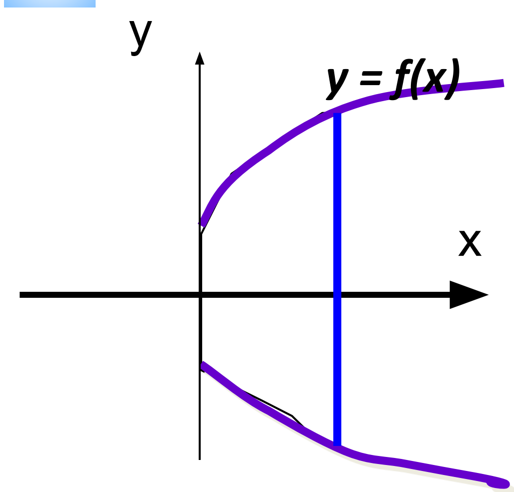


3

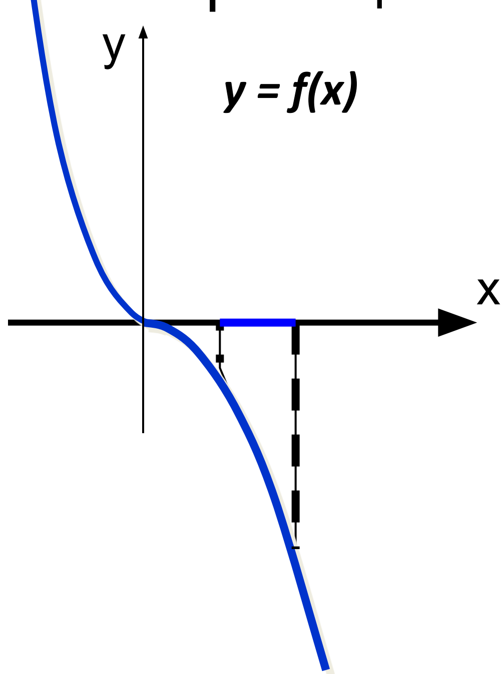


Какие из предложенных фигур являются криволинейными трапециями?

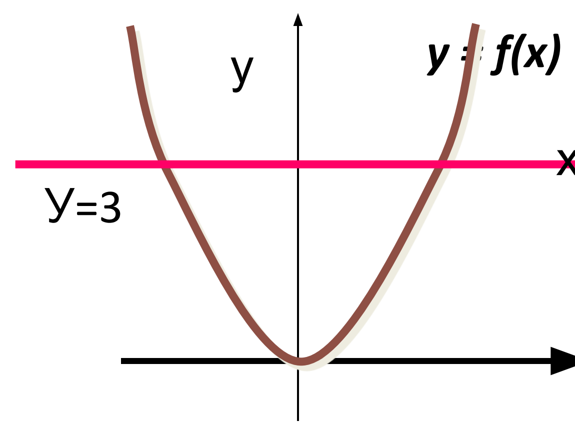
4

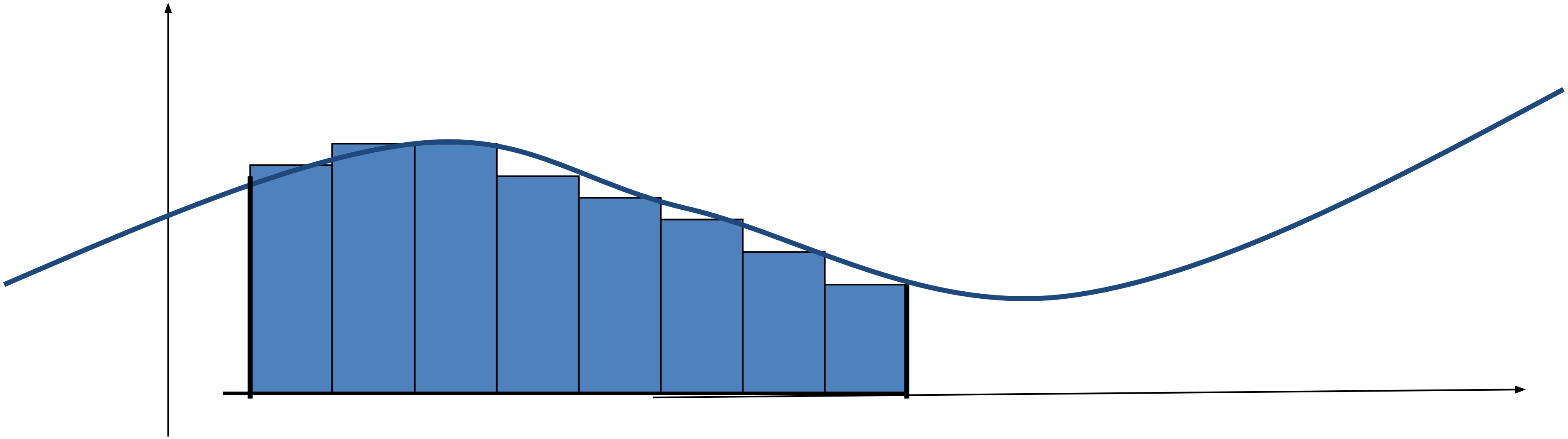


5



6





- Слово интеграл происходит от латинского слова integer – «целый».
- Интеграция-восстановление, восполнение, воссоединение; подробнее - это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь идет о воссоединении целого по отдельным частям (например о нахождении всей площади – по площадям столбиков)

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

«определенный интеграл от a до b от функции f(x) по dx»

$\int -$ *знак интеграла*,

$f(x) -$ *подынтегральная функция*,

$f(x)dx -$ *подынтегральное выражение*,

$x -$ *переменная интегрирования*,

$F(x) -$ *первообразная подынтегральной функции*,

$a -$ *нижний предел интегрирования*,

$b -$ *верхний предел интегрирования*

Формула Ньютона-Лейбница

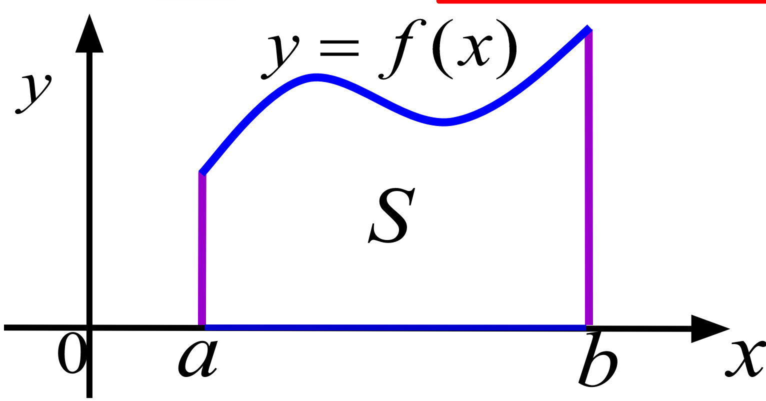
$$S = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

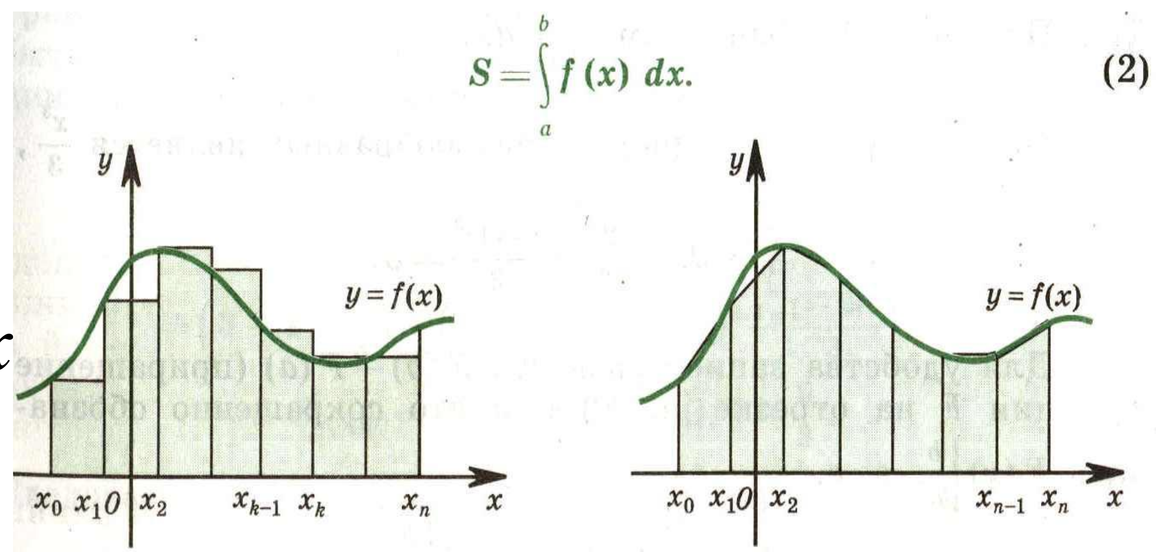
1643—1727

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

1646—1716



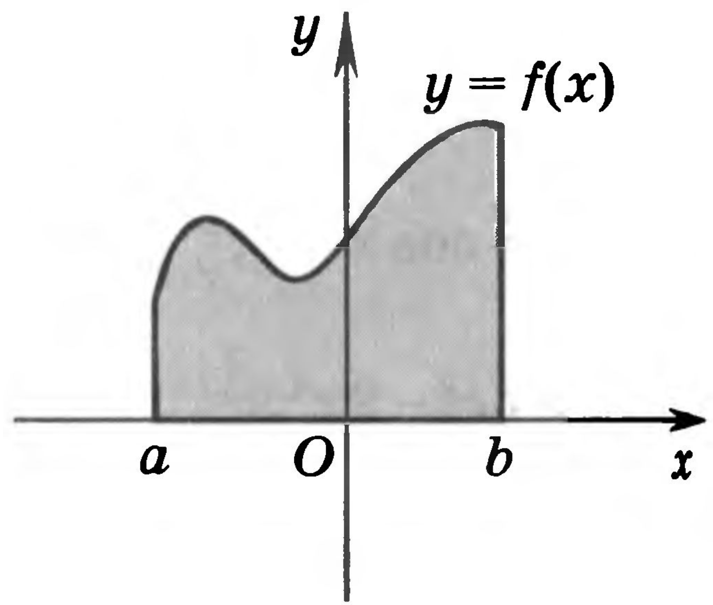
$$S = F(b) - F(a)$$



Геометрический смысл определенного интеграла:

Площадь фигуры S, ограниченной кривой y=f(x) (f(x)>0), осью абсцисс и прямыми *x=a и x=b*:

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$, то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Вычислите площади фигур с рисунков 87 и 88

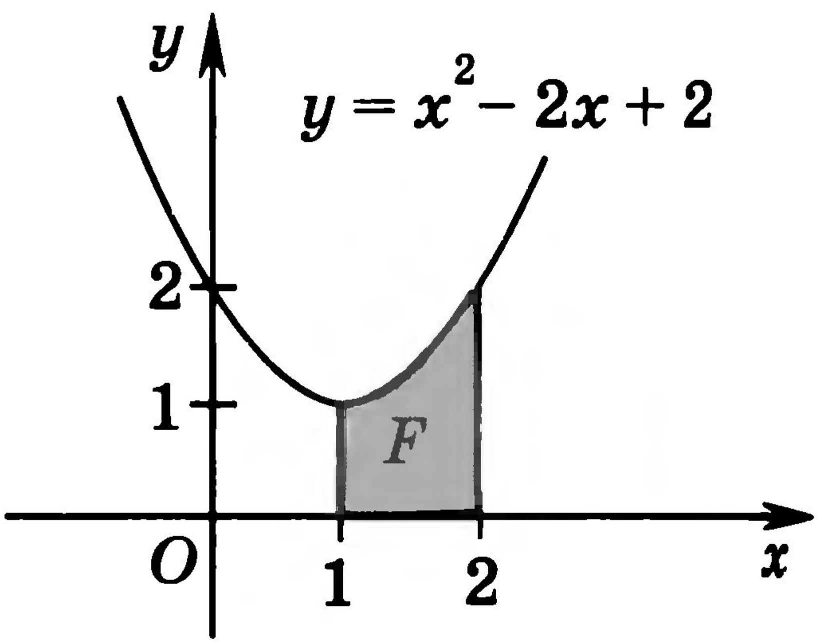


Рис. 87

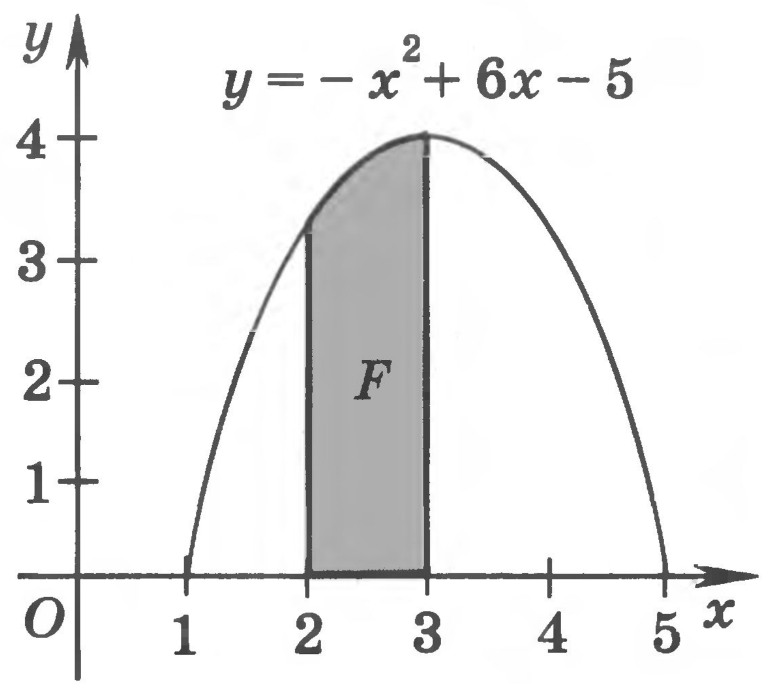


Рис. 88

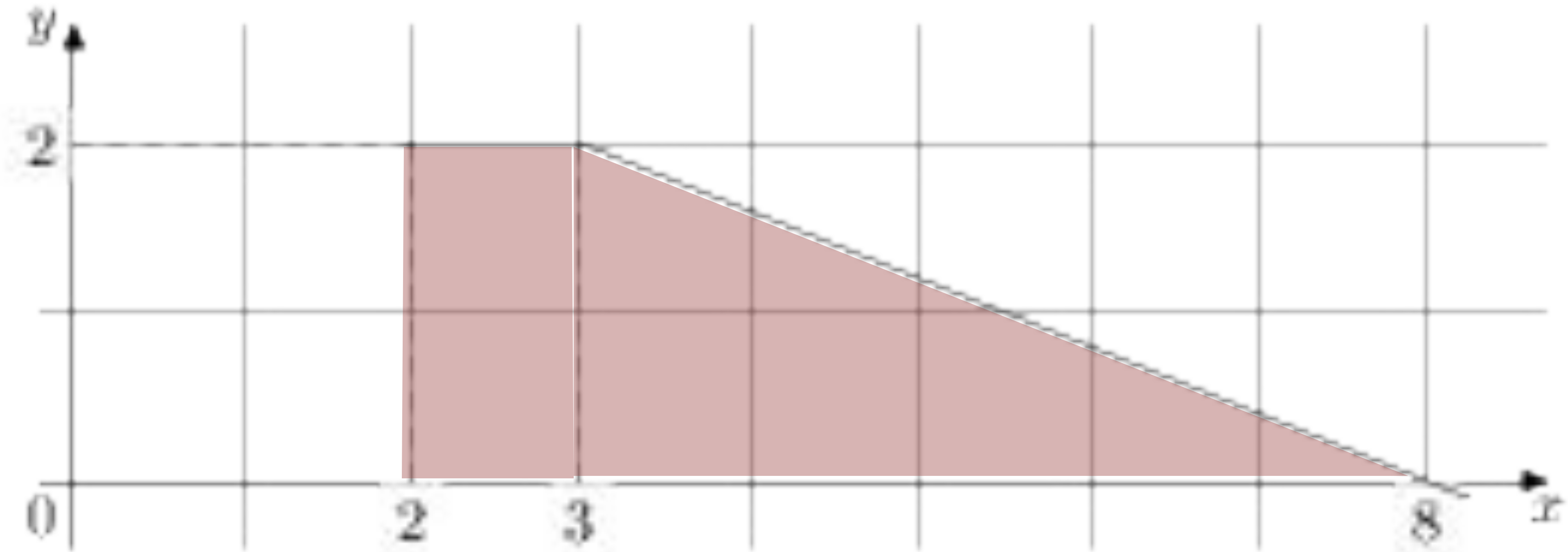
Первообразная на ЕГЭ

Прототип задания 7 (№ 323078)

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$

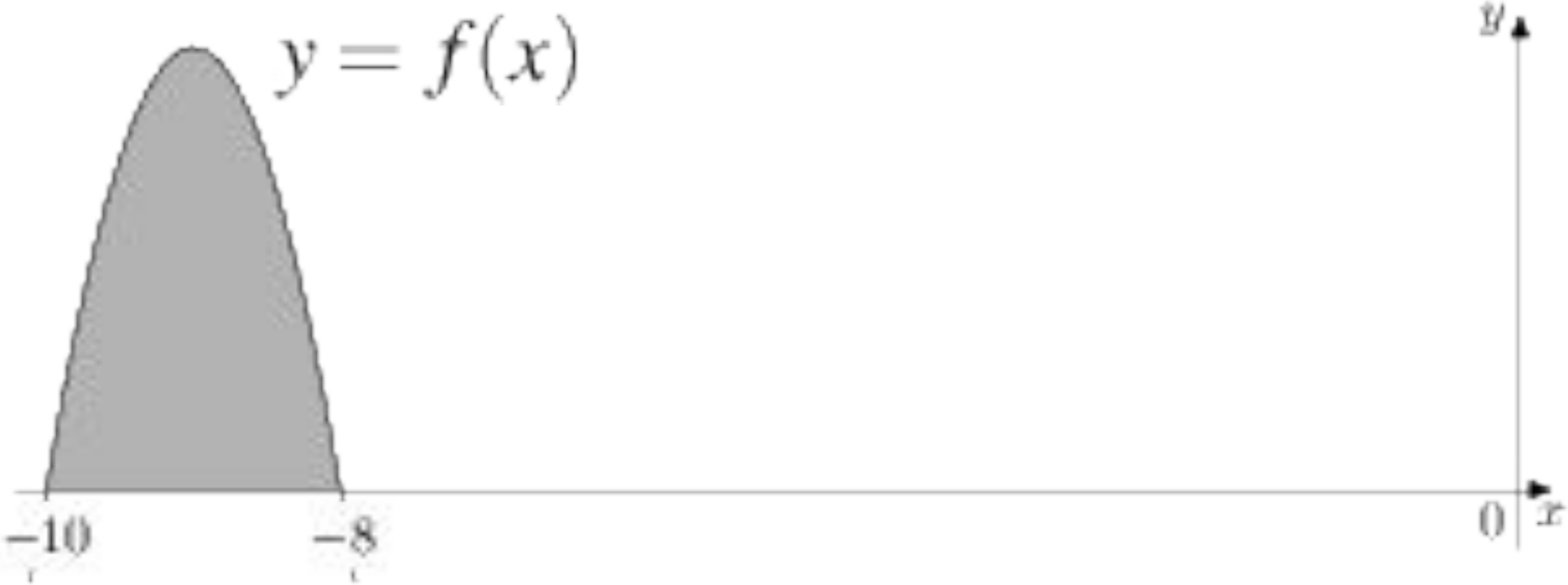
Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$

, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$



Прототип задания 7 (№ 323080)

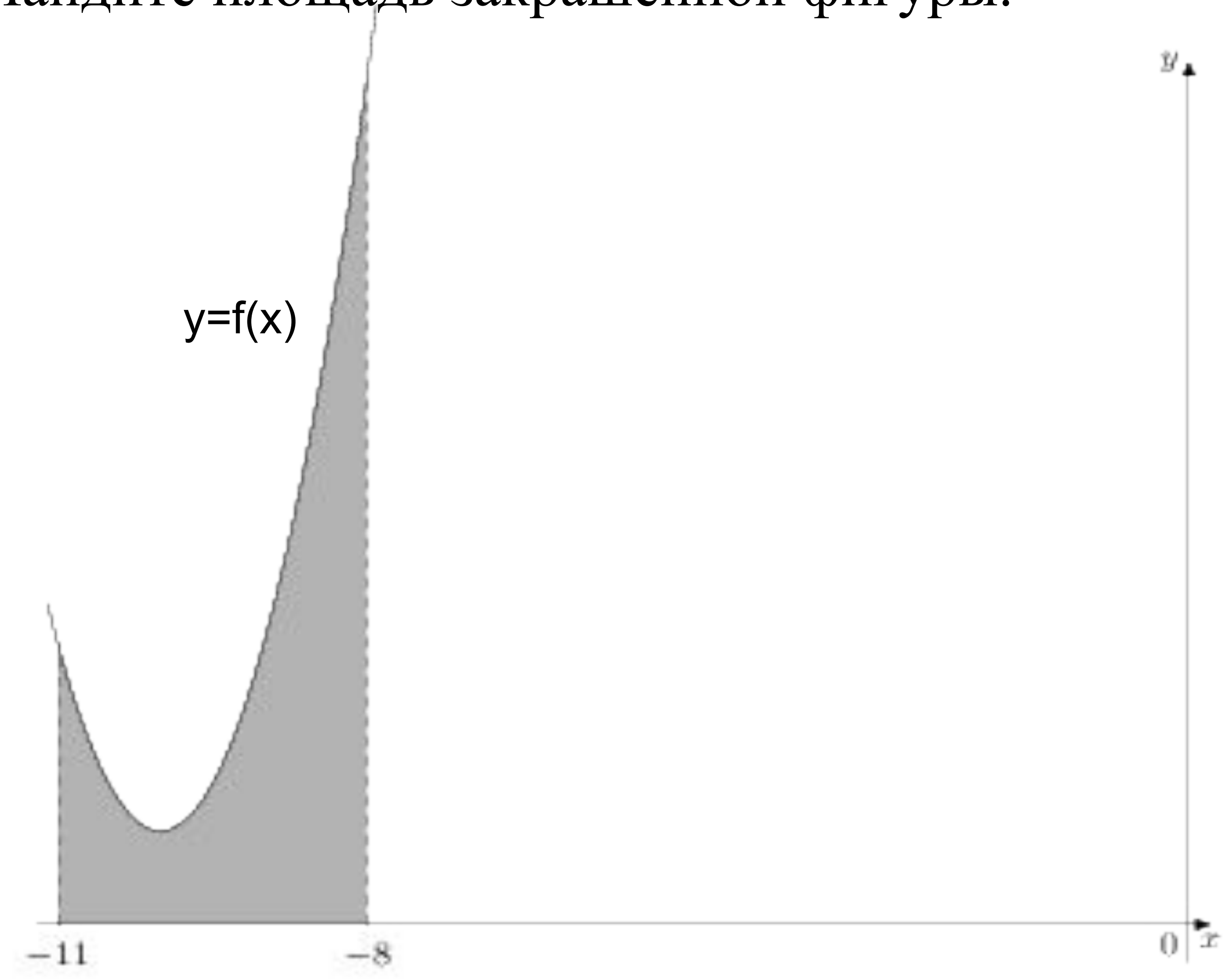
На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 323287 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$.

Функция $F(x)=2/3\cdot x^3+20x^2+201x-6/7$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$.

Найдите площадь закрашенной фигуры.



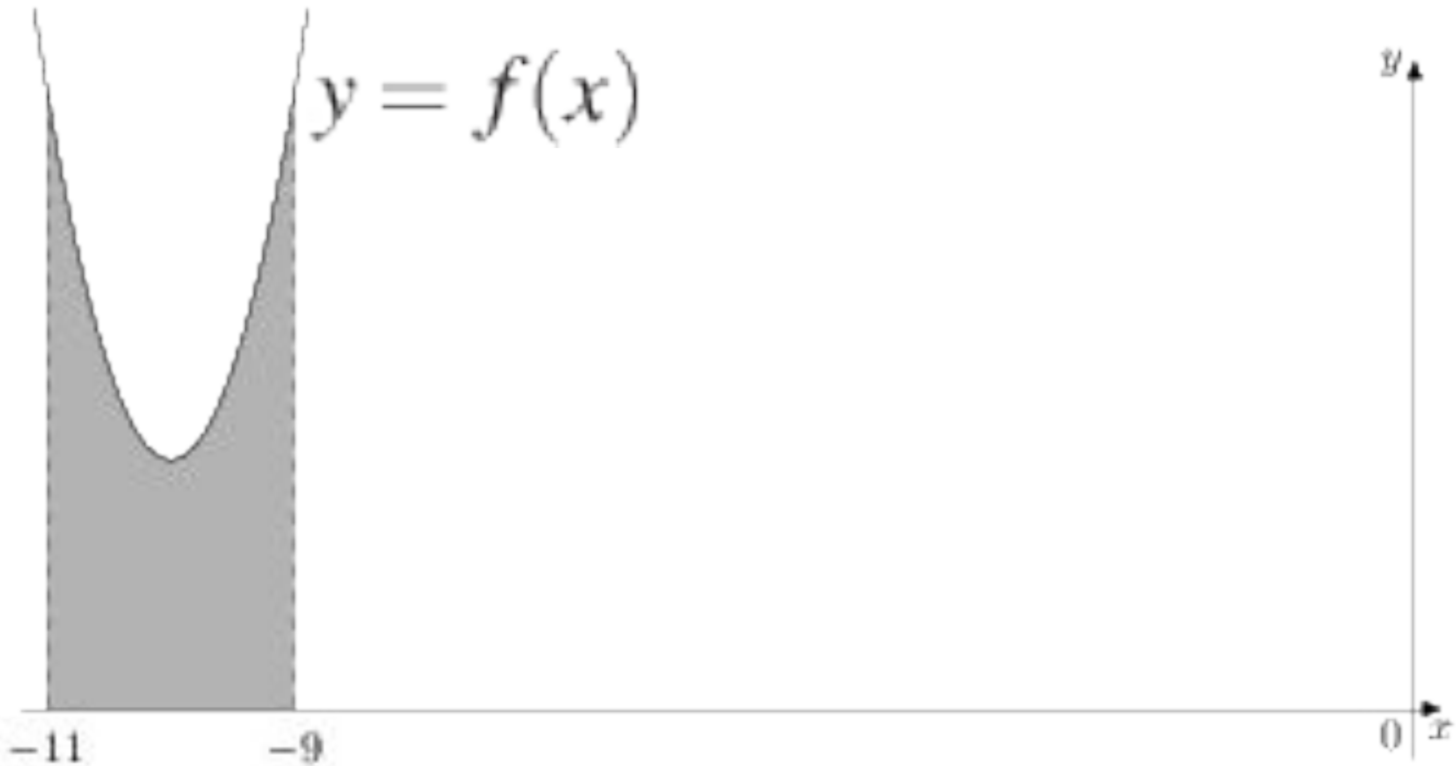
Прототип задания 7 (№ 323079)

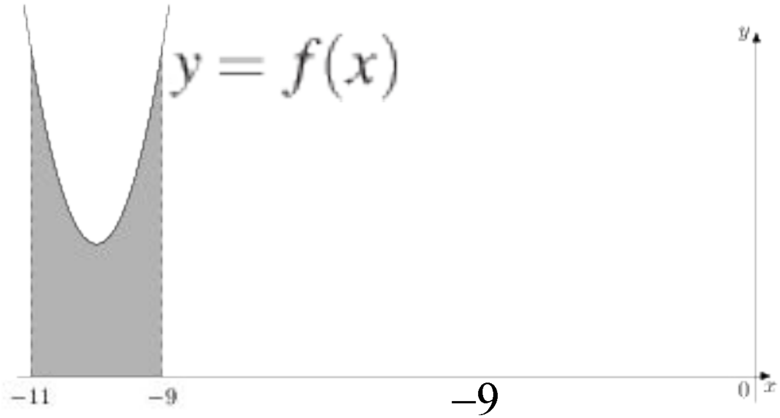
На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$

Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$

— одна из первообразных функции $f(x)$

. Найдите площадь закрашенной фигуры.





$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$$

1 способ

$$S=\int_{-11}^{-9} f(x)dx=\left(x^3+30x^2+302x\right)\Big|_{-11}^{-9}=$$

$$=\left((-9)^3+30(-9)^2+302(-9)\right)-\left((-11)^3+30(-11)^2+302(-11)\right)=$$

$$=(-9)^3+30(-9)^2+302(-9)-(-11)^3-30(-11)^2-302(-11)=$$

$$=\underline{-9^3}+\underline{\underline{30\cdot 9^2}}-302\cdot 9+\underline{11^3}\underline{\underline{-30\cdot 11^2}}+302\cdot 11=$$

$$=(11^3-9^3)+(30\cdot 9^2-30\cdot 11^2)+(302\cdot 11-302\cdot 9)=$$

$$=(11-9)(11^2+11\cdot 9+9^2)+30(9^2-11^2)+302(11-9)=$$

$$=2(11(11+9)+81)+30(9-11)(9+11)+302\cdot 2=$$

$$=2(11\cdot 20+81)-30\cdot 2\cdot 20+604=\ 2(220+81)-1200+604=$$

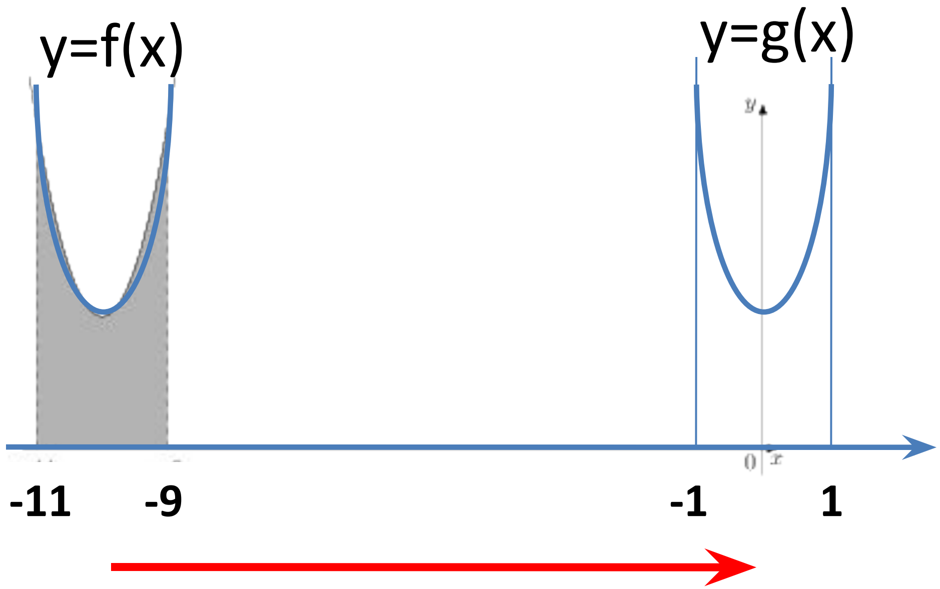
$$=2\cdot 301-1200+604=\ 602-1200+604=1206-1200=6$$

2 способ $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$

$f(x)=F'(x)=3x^2+60x+302=3(x^2+20x+100)+2=3(x+10)^2+2$

$g(x)=3x^2+2$

$G(x)=3\cdot x^3/3+2x+C=x^3+2x+C$



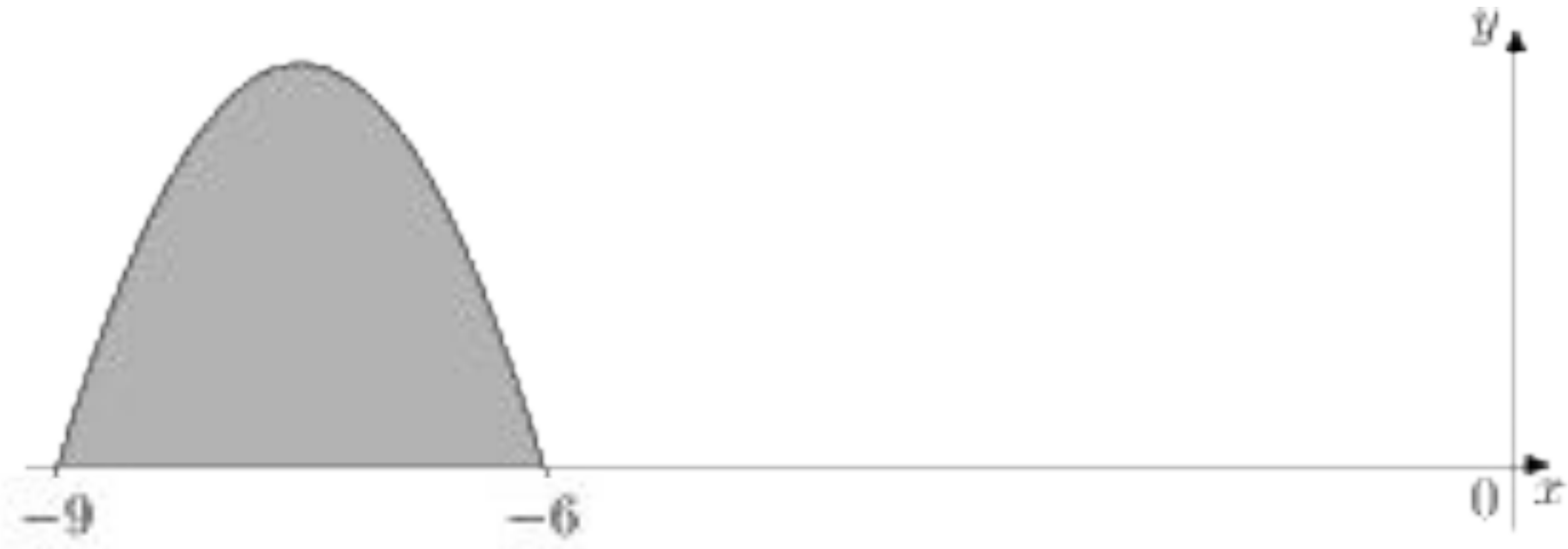
$G(x)=x^3+2x$

$S=G(1)-G(-1)=(1^3+2\cdot 1)-((-1)^3+2\cdot(-1))=3+3=6$

№ 323389 На рисунке изображён график некоторой функции y=f(x).

Функция $F(x)=-11/30\cdot x^3-33/4\cdot x^2-297/5\cdot x-1/2$ — одна из первообразных функции y=f(x).

Найдите площадь закрашенной фигуры.



Домашнее задание с урока

знать правила и формулы нахождения первообразных, определение первообразной функции,
формулу Ньютона-Лейбница,
геометрический смысл определенного интеграла,
с сайта РЕШУ ЕГЭ выполнить 4 задачи на первообразную:
№ 323085, 323187, 323291, 323387.

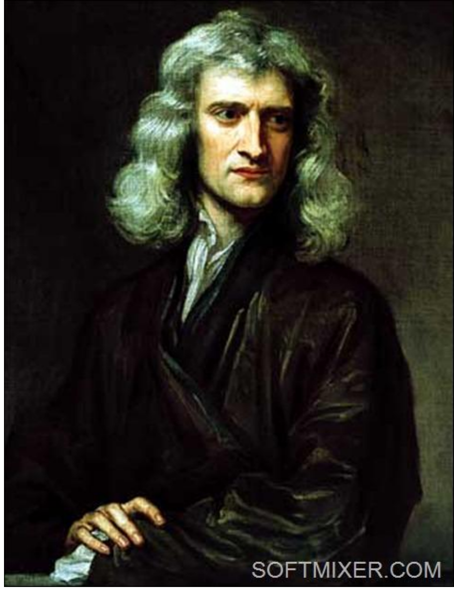
Вольтер о Лейбнице

Весь мир его узнал по изданным трудам,
Был даже край родной с ним вынужден считаться,
Уроки мудрости давал он мудрецам,
Он был мудрее их: умел он сомневаться

Интеграл

* * *

Весь мир вопрос интриговал:
Кто первым вывел интеграл?
Герр Лейбниц был уверен в том,
Что первый «герр»,
А «сэр» потом.



Г.В. фон Лейбниц И. Ньютон

Сэр Ньютон был уверен в том,
Что первый «сэр»,
А «герр» потом.

Собрали в Лондоне совет:
– Сэр Ньютон – да!
Герр Лейбниц – нет!
Собрали в Лейпциге совет:
– Герр Лейбниц – да!
Сэр Ньютон – нет!

А велся спор, наверно, зря
В таком ключе и стиле.
Так интеграл делить нельзя:
Он – сумма всех усилий!

Е. Ефимовский