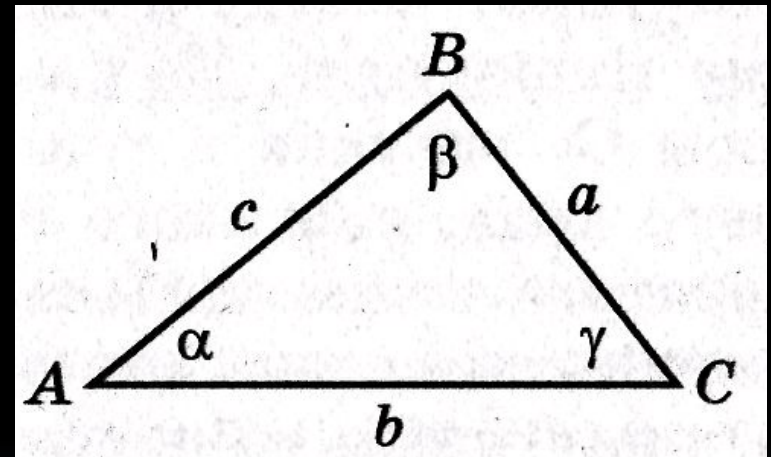


СИСТЕМА ОПОРНИХ ФАКТІВ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

Трикутник

Трикутником

називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки.



З трьох відрізків можна утворити трикутник тоді і тільки тоді, коли будь-яка його сторона більша за різницю і менша за суму двох інших його сторін.

Периметр трикутника дорівнює сумі усіх його сторін. **$P = a + b + c$**

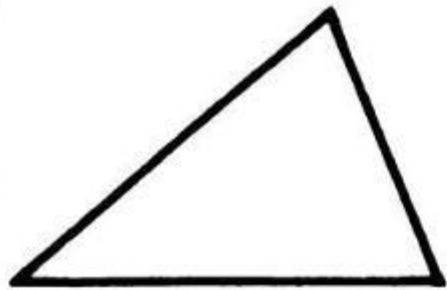
Види трикутників

- Трикутник називається *тупокутним*, *прямокутним* або *гострокутним*, якщо його найбільший внутрішній кут відповідно більший, дорівнює або менший за 90° .

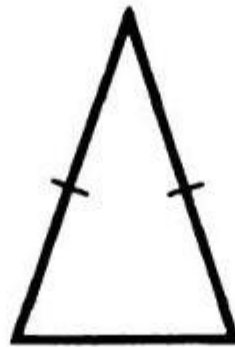


Види трикутників

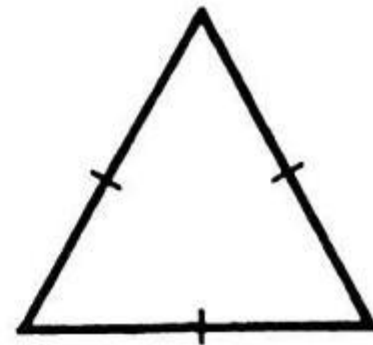
- Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні (бічні сторони).
- Трикутник, усі сторони якого рівні, називається *рівностороннім*, або *правильним*.



Разносторонний
(нет равных сторон)



Равнобедренный
(две стороны равны)



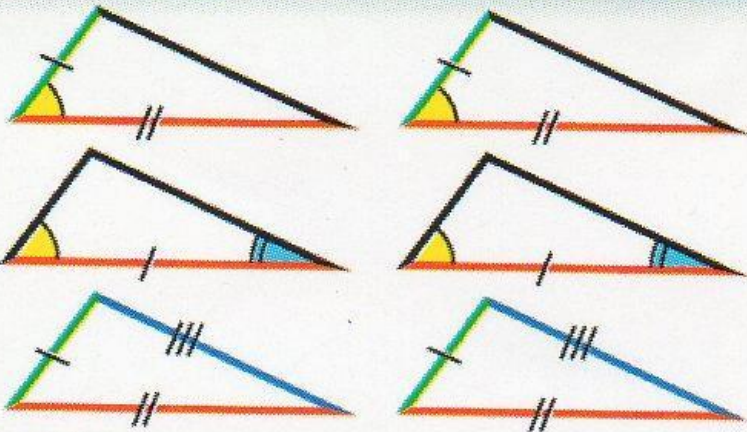
Равносторонний
(все стороны равны)

Ознаки рівності

трикутників

- Трикутник можна визначити будь-якою трійкою таких основних елементів: або двома сторонами і кутом між ними, або однією стороною і двома кутами, або трьома сторонами.

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



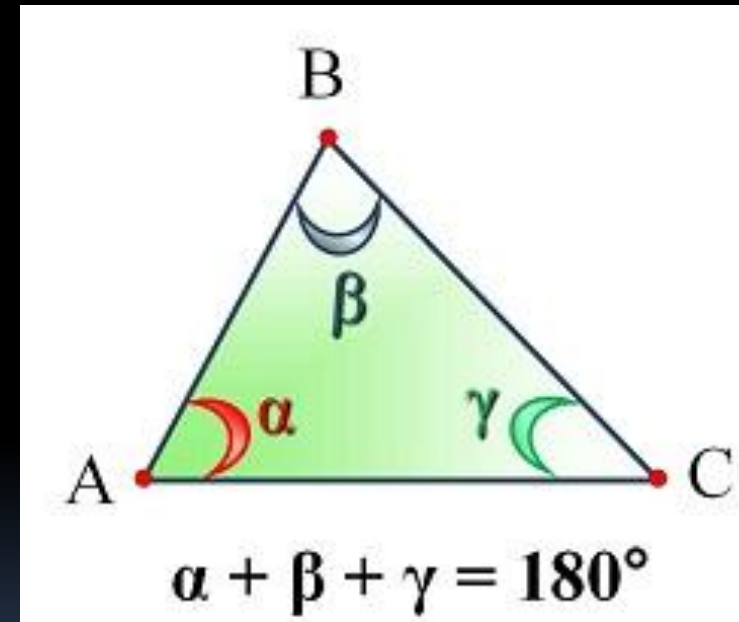
1. За двома сторонами і кутом між ними

2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами

3. За трьома сторонами

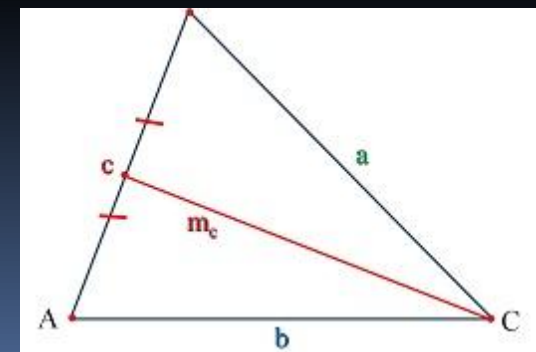
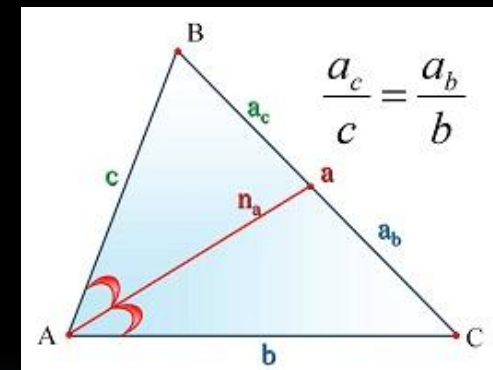
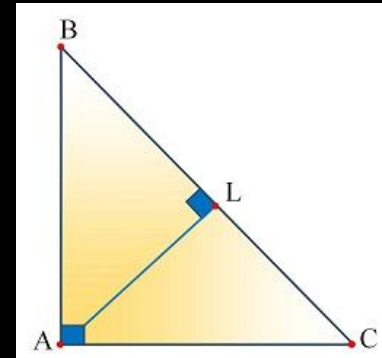
Кути трикутника

- **Теорема:** Сума кутів трикутника дорівнює 180° .
- **Наслідки:**
- У будь-якому трикутнику хоча б два кути гострі;
- Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60° ;
- Якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60° , то цей трикутник є рівностороннім.



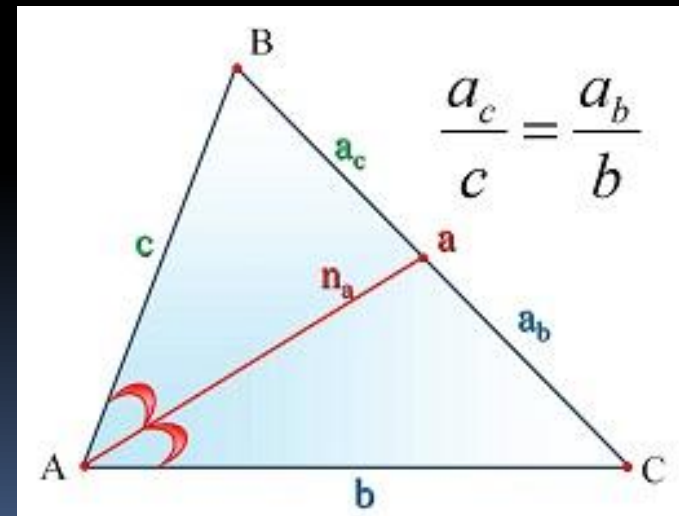
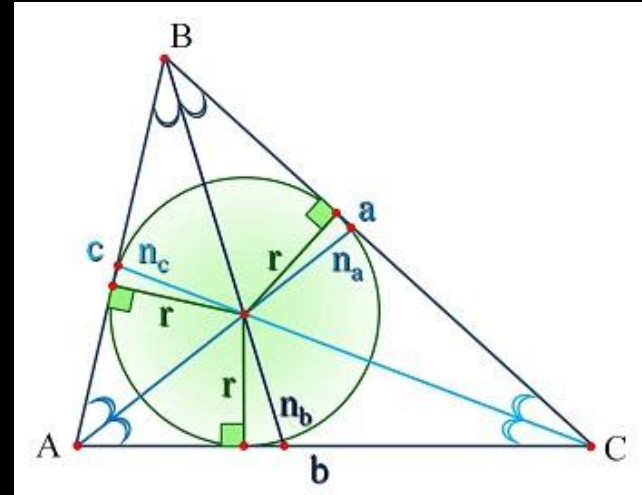
Висота, бісектриса медіана трикутника

- **Висотою** трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.
- **Бісектрисою** трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.
- **Медіаною** трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.
- У будь-якому трикутнику можна провести три медіани, три бісектриси і три висоти.



Властивості бісектриси кута трикутника

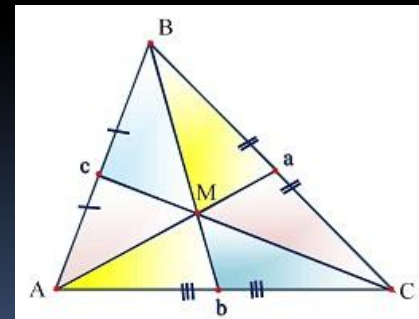
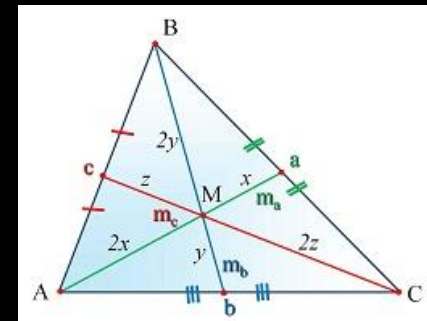
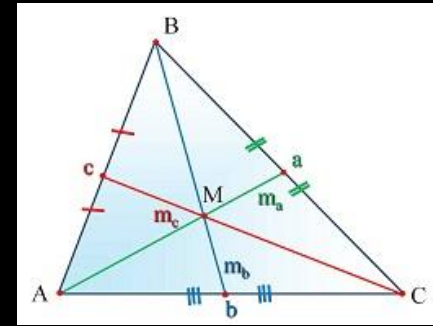
- У будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці (вона називається **інцентром**), яка лежить усередині трикутника і є центром вписаного в трикутник кола.
- Бісектриса ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим до неї сторонам.



Властивості медіани трикутника

- У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (вона називається **центроїдом** трикутника) і в цій точці поділяються у відношенні 2:1, починаючи від вершини.
- Медіана ділить трикутник на два трикутника, площі яких рівні.
- Три медіани трикутника ділять трикутник на шість трикутників, площі яких рівні.
- Медіана трикутника, проведена до сторони, визначається через сторони трикутника за формулою:

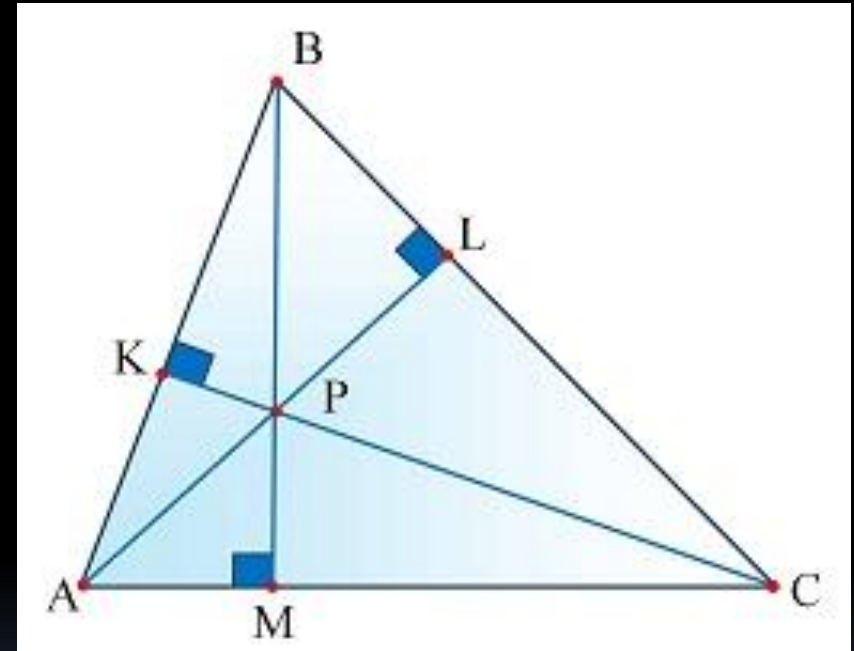
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$



Властивості висоти трикутника

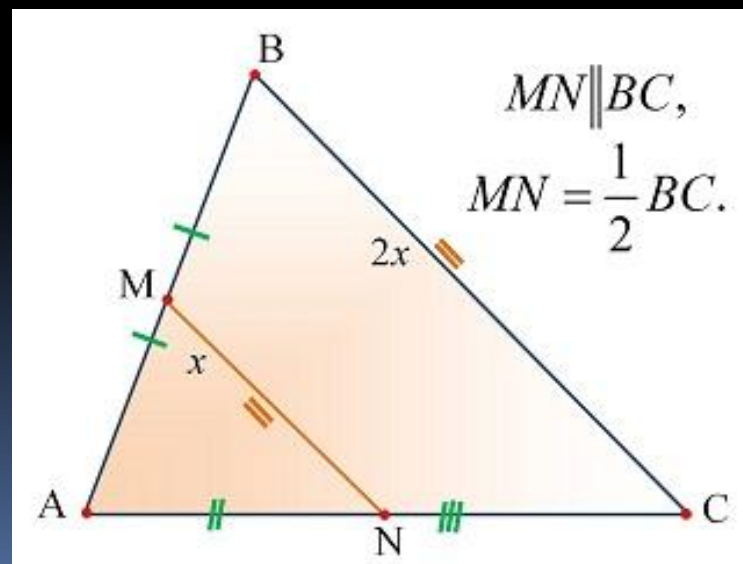
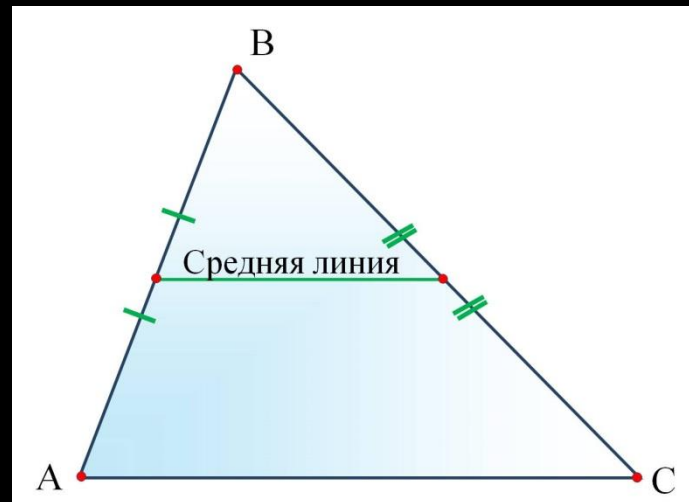
- У будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці (вона називається **ортоцентром** трикутника).
- Висоти трикутника, проведені до сторін трикутника, a, b і c , позначаються h_a, h_b і h_c відповідно. Висота трикутника визначається через сторони трикутника за формулою: , де p - півпериметр.

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$



Середня лінія трикутника

- У кожному трикутнику можна побудувати три середні лінії – відрізки, які сполучають середини двох сторін трикутника.
- Середня лінія трикутника паралельна третій стороні трикутника та дорівнює її половині.
- Середня лінія трикутника відтинає від трикутника подібний трикутник.
- Площа меншого трикутника відноситься до площі основного трикутника як 1:4.



Прямокутний трикутник

- Прямокутний трикутник має сторону, яка лежить проти прямого кута, - *гіпотенузу* (c) та дві сторони, які утворюють прямий кут, - *катети* (a і b).
- **Теорема Піфагора:** квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів. $c^2 = a^2 + b^2$

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК
ТЕОРЕМА ПІФАГОРА



катет b гіпотенуза c катет a α

Наслідки:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{проти́лежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$

$\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$

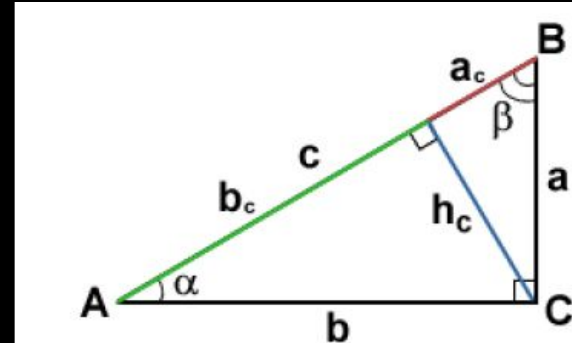
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{проти́лежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{проти́лежний катет}}$

Властивості прямокутного

трикутника:

- Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .
- Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який його катет.
- Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.
- У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.
- Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$.
- Висота проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.
- Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи.
- Для сторін прямокутного трикутника істинні відношення: $\frac{a}{b} = \frac{a_c}{b_c} = \frac{h_c}{c}$.



a, b – катети

c – гіпотенуза

Теорема Піфагора:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Наслідки:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c} \Leftrightarrow h_c^2 = a_c \cdot b_c$$

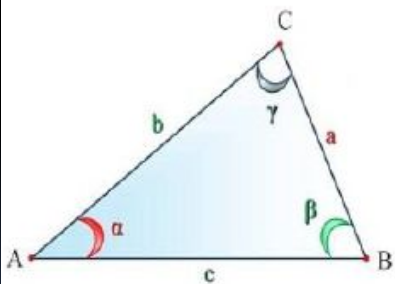
$$a = \sqrt{c \cdot a_c} \Leftrightarrow a^2 = c \cdot a_c$$

$$b = \sqrt{c \cdot b_c} \Leftrightarrow b^2 = c \cdot b_c$$

$$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$$

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

- проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки;
- проти рівних сторін лежать рівні кути;
- **Теорема косинусів:** квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.
- **Теорема синусів:** в трикутнику відношення довжини сторони до синусу протилежного кута рівні.



Теорема синусів : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

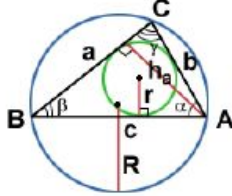
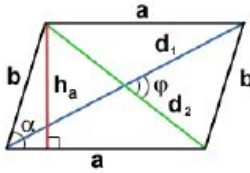
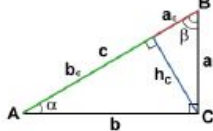
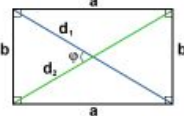
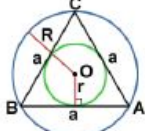
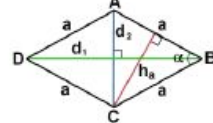
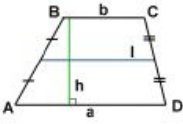
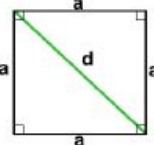
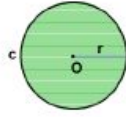
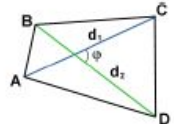
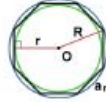

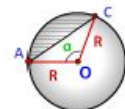
Теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

Площі фігур

<p>Довільний трикутник</p>  $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2}$ $S = \frac{abc}{4R}$ $S = pr$	<p>Паралелограм</p> $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ $S = a \cdot h_a$ $S = ab \sin \alpha$ 
<p>Прямокутний трикутник</p>  $S = \frac{1}{2} ab$ $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$	<p>Прямокутник</p> $S = a \cdot b$ $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$ 
<p>Правильний трикутник</p> $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ 	<p>Ромб</p> $S = a^2 \sin \alpha$ $S = a \cdot h_a$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ 
<p>Трапеція</p> $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ 	<p>Квадрат</p> $S = a^2$ $S = \frac{1}{2} d^2$ 
<p>Круг</p> $S = \pi R^2$ $S = \frac{1}{4} \pi d^2$ $l = 2\pi R$ $l = \pi d$ 	<p>Довільний чотирикутник</p> $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ 
<p>Правильний багатокутник</p> $S = \frac{na_n r}{2}$ $S = \frac{1}{2} R^2 n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$ $S = \frac{1}{2} r^2 n \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n}$ 	<p>Правильний шестикутник</p> $S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ 
<p>Сегмент</p> $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \pm S_{\Delta}$ 	<p>Сектор</p> $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ 