Елементи теорії визначників

План

- *Визначники*
- *Мінори*
- *Алгебраїчні доповнення*

Визначники

Визначником (детермінантом) порядку n називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратичної матриціто́го ж порядку.

Позначається Δ або det A.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією.

Щоб знайти визначник другого порядку,

множимо елементи головної діагоналі та

віднімаємо добуток елементів побічної

діагоналі:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 1(-4) = 70.$$

Метод трикутників

Щоб знайти визначник третього порядку, будуємо шість добутків таким чином:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5\cdot 5 + 2\cdot(-3)\cdot(-2) + (-3)\cdot 3\cdot 6 -$$

$$-(-2)\cdot 5\cdot 6 - (-3)\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$$

Властивості визначників

1. Значення визначника незмінюється,

якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями. Така операція називається

транспонуванням.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на -1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{1} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

7. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

8. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інші другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінори

Означення.

Мінором M_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці, називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці викреслюванням і-го рядка та k-го стовпця.

Алгебраїчні доповнення

Означення. Алгебраїчним доповненням Аік, що відповідає елементу аік матриці, називається відповідний мінор, взятий зі знаком "+", якщо сума його індексів парна, і зі знаком "-", якщо сума його індексів непарна.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}.$$

Приклад: ***Дано матрицю***

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 2 & 5 & 3\\ 6 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}=10-18=-8;\ M_{22}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & 5\end{vmatrix}=20-(-12)=32;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}=(-1)^{3}\cdot(2\cdot 5-3\cdot 6)=-(10-18)=8;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & 5\end{vmatrix}=(-1)^{4}\cdot(4\cdot 5-6\cdot(-2))=20-(-12)=32.$$

Алгебраїчні доповнення: теореми.

<u>Теорема 1.</u> *Значення визначника n-го порядку, що визначає матрицю, дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.*

Для визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ***виконуються такі рівності:***

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

<u>Приклад:</u> Обчислити визначник розкладаючи

його за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot 1\cdot(-7\cdot 3 - 5\cdot(-2)) + 2\cdot(-1)\cdot(3\cdot 3 - 5\cdot 1) + (-11)\cdot 1\cdot(3\cdot(-2) - (-7)\cdot 1) = -44 -$$

$$- 8 - 11 = 63.$$

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка, чи стовпця дорівнюють нулю.

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) +$$

$$+ a_{12}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}\right) = 0.$$

Действия над матрицами

- *Нахождение обратной матрицы*

Обратной матрицей по отношению к данной невырожденной квадратной матрице A n - *ного* порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1}. Таким образом, согласно определению: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \to \det A \neq 0 \to A^{T} \to A^{+} \to \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+}}$$

Транспонированная матрица получается из матрицы А путем замены строк соответствующими столбцами

Присоединенная матрица получается путем замены каждого элемента матрицы A^{T} на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует