



**ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

***Множества и операции
над множествами.***

Челябинск, 2018



ЗНАНИЯ

МНОЖЕСТВО

ЭЛЕМЕНТ МНОЖЕСТВА

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ
МНОЖЕСТВАМИ

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

УМЕНИЯ

НАХОДИТЬ

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

НАХОДИТЬ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

ИЗОБРАЖАТЬ

С ПОМОЩЬЮ КРУГОВ

ЭЙЛЕРА

РЕШАТЬ ЗАДАЧИ С

ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ

ИМЕЮЩИХСЯ ЗНАНИЙ

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

основатель теории множеств – **Георг Кантор**



(1845-1918) — немецкий математик, логик, теолог, создатель теории бесконечных множеств, оказавшей определяющее влияние на развитие математических наук на рубеже 19-20 вв.



ПРИМЕРЫ МНОЖЕСТВ ИЗ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА



Например, множество дней недели состоит из элементов: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье.

Множество месяцев – из элементов: январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь.



Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие.

Объекты, из которых образованно множество, называются *элементами*.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: **A, B, C, ..., Z**.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: **a, b, c, ..., z**.

Множество, не содержащее ни одного объекта, называется *пустым* и обозначается так: **∅**



Множества

a, b, \dots, x, y, z – элементы множества

A, B, \dots, X, Y, Z – множества

$\{ ; \}$ – используется для перечисления элементов

$|$ – заменяет словосочетание «...таких, что ...»

$$A = \{x | x < 0\}$$

\in – знак принадлежности, $a \in A$

\subset – знак включённости, $A \subset B$

*«Множество – единое имя
для совокупности всех
объектов, обладающих
даннным свойством»*



МНОЖЕСТВО	ЭЛЕМЕНТ
Множество четырехугольников	Трапеция, параллелограмм, ромб, квадрат, прямоугольник
Пространственные тела	Шар, прямоугольный параллелепипед, призма, пирамида, октаэдр
Натуральные числа	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...
Квадраты чисел	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ..
Цифры десятичной системы счисления	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двузначные четные числа	10, 12, 14, 16 ... 96, 98



МНОЖЕСТВО

Словесное описание	Поэлементное описание	Перечисление элементов
Цифры десятичной системы счисления	Множество состоит из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Гласные буквы латинского алфавита	Множество состоит из букв $A, E, \ddot{E}, I, O, U, Y, \ddot{A}, \ddot{O}, \ddot{U}$	$\{A, E, \ddot{E}, I, O, U, Y, \ddot{A}, \ddot{O}, \ddot{U}\}$



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

Множество	Словесное описание множества
$\{10,15,20,\dots,90,95\}$	Множество всех двузначных чисел, кратных 5
$\{1,4,9,16,25,36,\dots\}$	Множество всех квадратов натуральных чисел
N	Множество натуральных чисел
Q	Множество рациональных чисел
$\{x 2 < x < 7\}$	Множество всех чисел, которые больше 2 и меньше 7

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\};$

$\{x \mid 5 < x < 12\}$

**Конечные
множества**

$\{1; 4; 9; 16; 25; \dots\};$

$\{10; 20; 30; 40; 50; \dots\};$

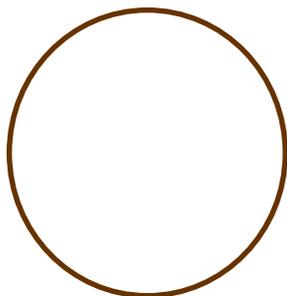
**Бесконечные
множества**

ВИДЫ МНОЖЕСТВ

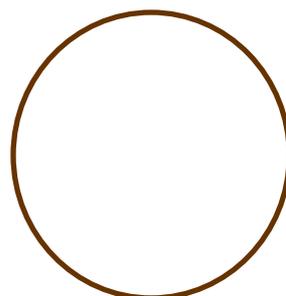
Запишите множества букв слов

КОНИ И КИНО

{К, О, Н, И}



{К, И, Н, О}



Равные множества





Обозначения некоторых числовых множеств:

\mathbb{N} – множество натуральных чисел;

\mathbb{Z} – множество целых чисел;

\mathbb{Q} – множество рациональных чисел;

\mathbb{I} – множество иррациональных чисел;

\mathbb{R} – множество действительных чисел.



Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Например, множество $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ можно задать через характеристическое свойство – множество однозначных, нечетных натуральных чисел.

Так множества обычно задают в том случае, когда множество содержит большое количество элементов или множество бесконечно.



Отношения между множествами

- Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно A и B , то говорят, что эти множества пересекаются.
- Если множества A и B не имеют общих элементов, т.е. нет элементов, принадлежащих одновременно A и B , то говорят, что эти множества не пересекаются.
- Множество B называется подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является также элементом множества A . ($B \subset A$)

Пустое множество считают подмножеством любого множества. ($\emptyset \subset A$)

Любое множество является подмножеством самого себя. ($A \subset A$)

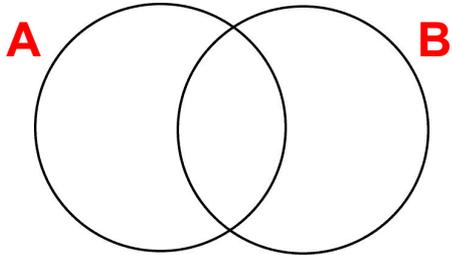
Если число элементов множества B равно n , то число различных подмножеств данного множества 2^n .

- Множества A и B называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$. ($A=B$)

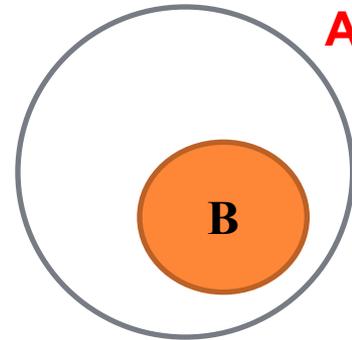
Задача. В каком отношении находятся множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$, $C = \{7, 9\}$ $D = \{7, 9, 5, 1\}$?

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

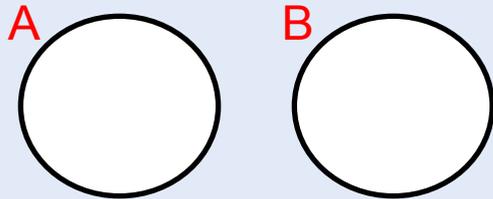
1.



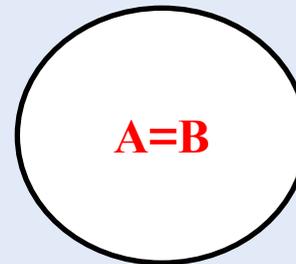
3.



2.



4.



Множество

a, b, \dots, x, y, z – элементы множества

A, B, \dots, X, Y, Z – множества

\in – знак принадлежности, $a \in A$

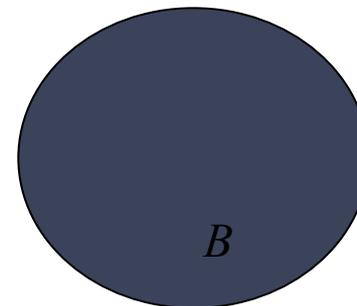
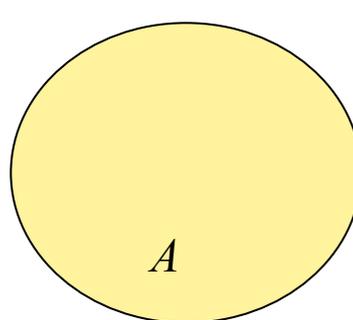
\subset – знак включённости, $A \subset B$

$\{ ; \}$ – используется для перечисления элементов

$|$ – заменяет словосочетание «...таких, что ...»



Леонард Эйлер
(1707 – 1783)



*«Множество – единое имя
для совокупности всех
объектов, обладающих
даннным свойством»*

Множество

a, b, \dots, x, y, z – элементы множества

A, B, \dots, X, Y, Z – множества

\in – знак принадлежности, $a \in A$

\subset – знак включённости, $A \subset B$

$\{ ; \}$ – используется для перечисления элементов

| – заменяет словосочетание «...таких, что ...»

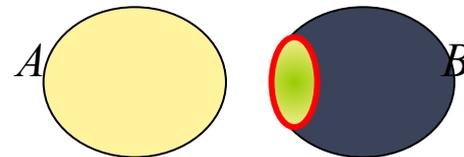
Пересечение множеств \cap

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

«Множество – единое имя
для совокупности всех
объектов, обладающих
даннным свойством»

Пересечение множеств \cap

Пересечением множеств A и B называют множество,
состоящее из всех **общих**
элементов множеств A и B



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

$$X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

$$Y = \{3; 6; 9; 12; 15\}$$

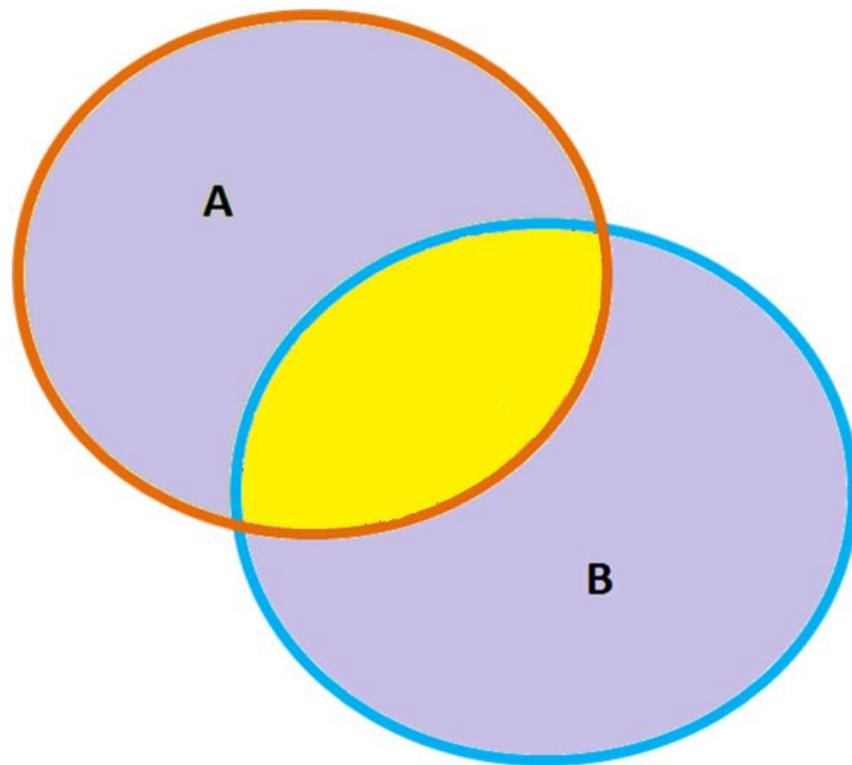
$$X \cap Y = ?$$

$$X \cap Y = \{3; 9\}$$



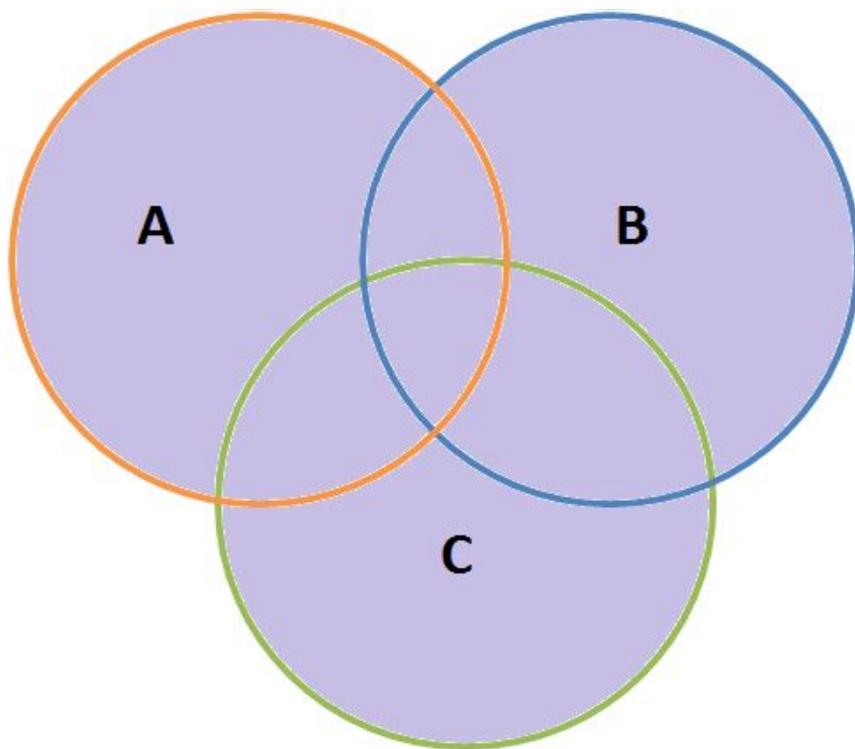
ВНЕОСТАТЬ

$$A \cap B = B \cap A$$



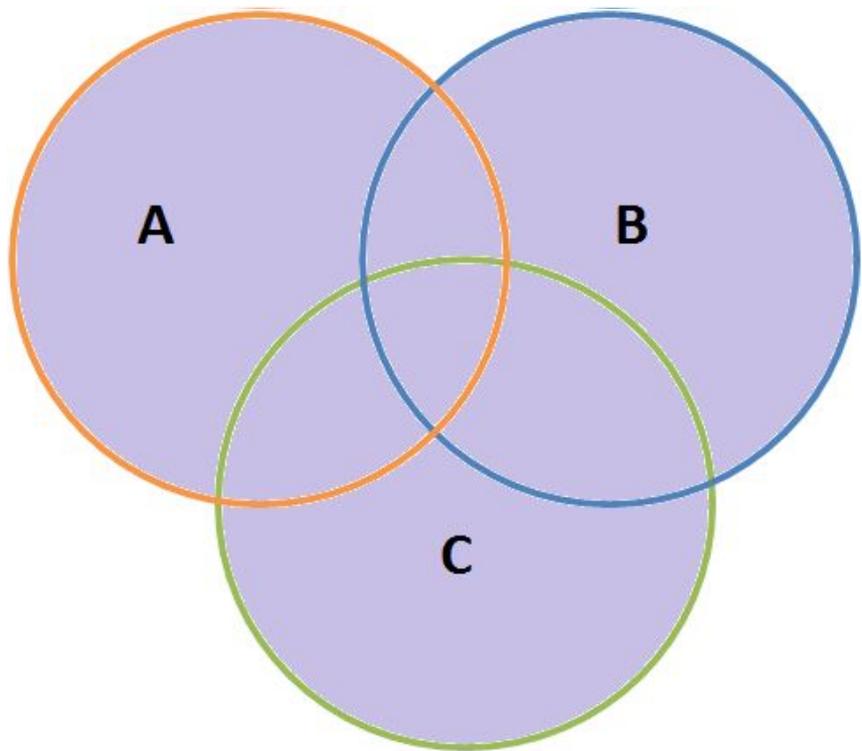
НОСТЬ

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



УБЕДИТЕСЬ

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



Множество

a, b, \dots, x, y, z – элементы множества

A, B, \dots, X, Y, Z - множества

\in - знак принадлежности, $a \in A$

\subset - знак включённости, $A \subset B$

$\{ ; \}$ – используется для перечисления элементов

$|$ - заменяет словосочетание «...таких, что ...»

Пересечение множеств



$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ И } x \in B\}$$

Пустое множество



Объединение множеств



$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ИЛИ } x \in B\}$$

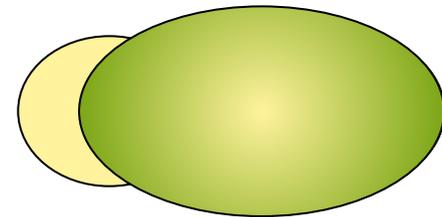
«Множество – единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством»

Объединение множеств



Объединением множеств A и B называют множество,

состоящее из **всех** элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств – или множеству A или множеству B



$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ИЛИ } x \in B\}$$

$$X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

$$Y = \{3; 6; 9; 12; 15\}$$

$$X \cup Y = ?$$

$$X \cup Y = \{1; 3; 5; 7; 9; 6; 12; 15\}$$

Свойства объединения

МНОЖЕСТВ

1. Коммутативность $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$
4. Для любых множеств A , B и C справедливо равенство:

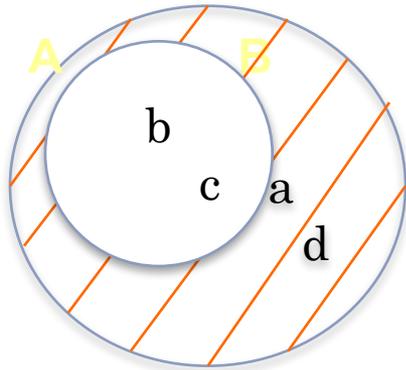
а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Вычитание множеств

Разностью множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее те и только те элементы множества A , которые не принадлежат множеству B .

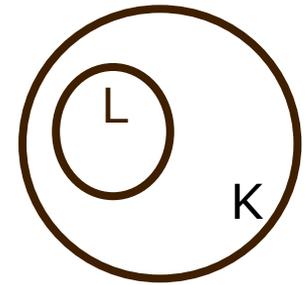


РАЗНОСТИ

$$\text{a) } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

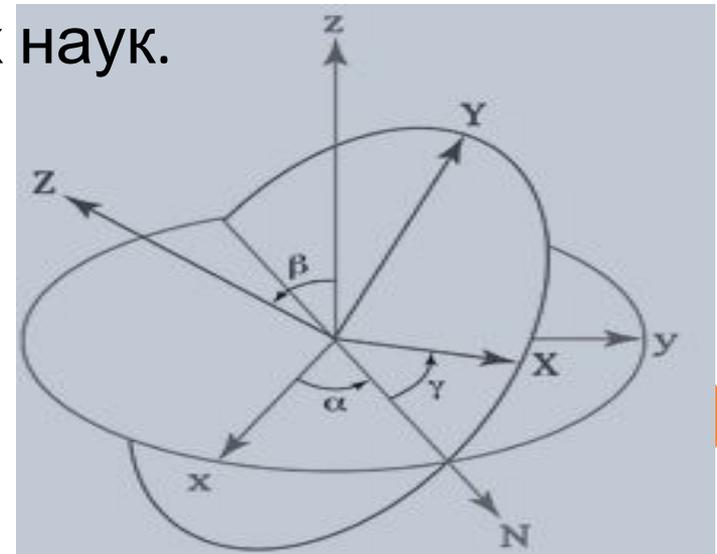
$$\text{б) } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

Решение задачи с помощью кругов Эйлера



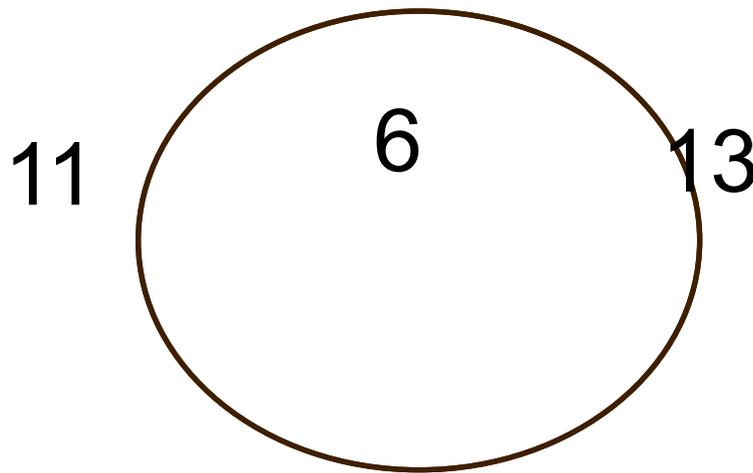
Леона́рд Э́йлер — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11



В классе 30 человек, каждый из которых поёт или танцует. Известно, что поют 17 человек, а танцевать умеют 19 человек. Сколько человек поёт и танцует одновременно?

Всего 30



поют 17

танцуют 19

$$17+19=36, \text{ всего } 30 \quad 36-30=6$$



РЕШЕНИЕ

Пусть A - это множество учеников, умеющих петь. Количество элементов в нём по условию равно $n = 17$. Пусть B - множество учеников, умеющих танцевать. Количество элементов в нём - $m = 18$. Множество совпадает со всем классом, т.к. каждый ученик в классе поёт или танцует. $A \cap B$ - это множество тех учеников класса, которые поют и танцуют одновременно. Пусть их количество равно k . Согласно формуле доказанной выше $n + m - k = 17 + 19 - k = 30$ $k = 6$.
Ответ: 6 учеников в классе поют и танцуют одновременно.



На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык, а 23 - оба языка. Сколько человек в фирме не знают ни английского, ни немецкого языков?

Английский 47

Всего 67

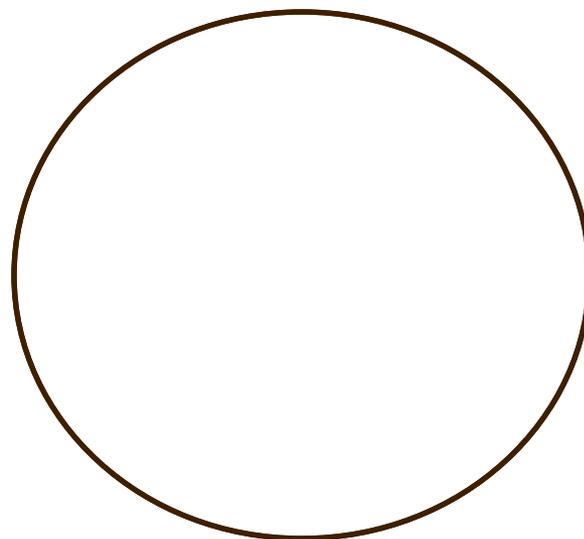
Немецкий 35

$$47 - 23 = 24$$

$$35 - 23 = 12$$

24

12



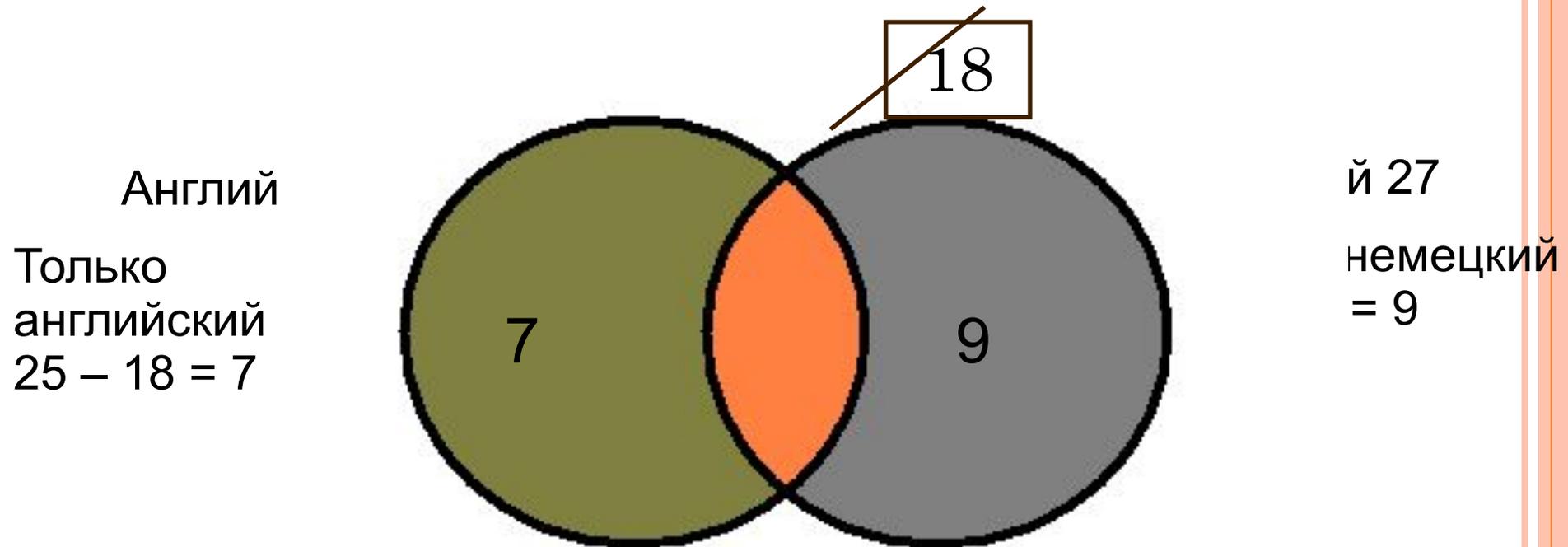
— 23

$$24 + 12 + 23 = 59$$

$$67 - 59 = 8$$



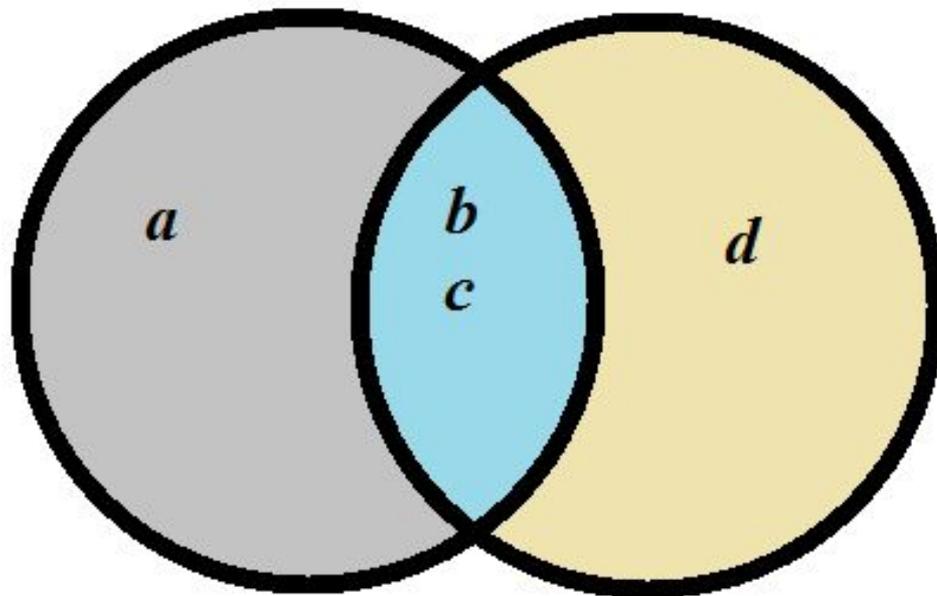
КАЖДЫЙ УЧАЩИЙСЯ В КЛАССЕ ИЗУЧАЕТ АНГЛИЙСКИЙ ИЛИ ФРАНЦУЗСКИЙ ЯЗЫК. АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК ИЗУЧАЮТ 25 УЧАЩИХСЯ, ФРАНЦУЗСКИЙ — 27 УЧАЩИХСЯ, А ДВА ЯЗЫКА — 18 УЧАЩИХСЯ. СКОЛЬКО УЧАЩИХСЯ В КЛАССЕ?



Ответ: в классе 34 ученика

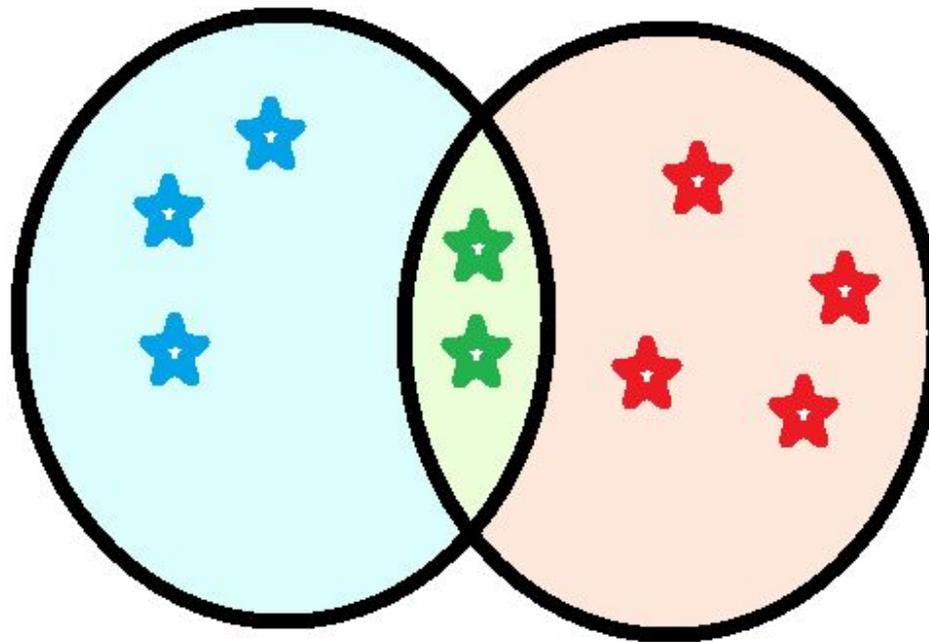


Расположите 4 элемента в двух множествах так, чтобы в каждом из них было по 3 элемента.





Множества A и B содержат соответственно 5 и 6 элементов, а множество $A \cap B$ – 2 элемента. Сколько элементов в множестве $A \cup B$?



Объединение содержит 9 элементов

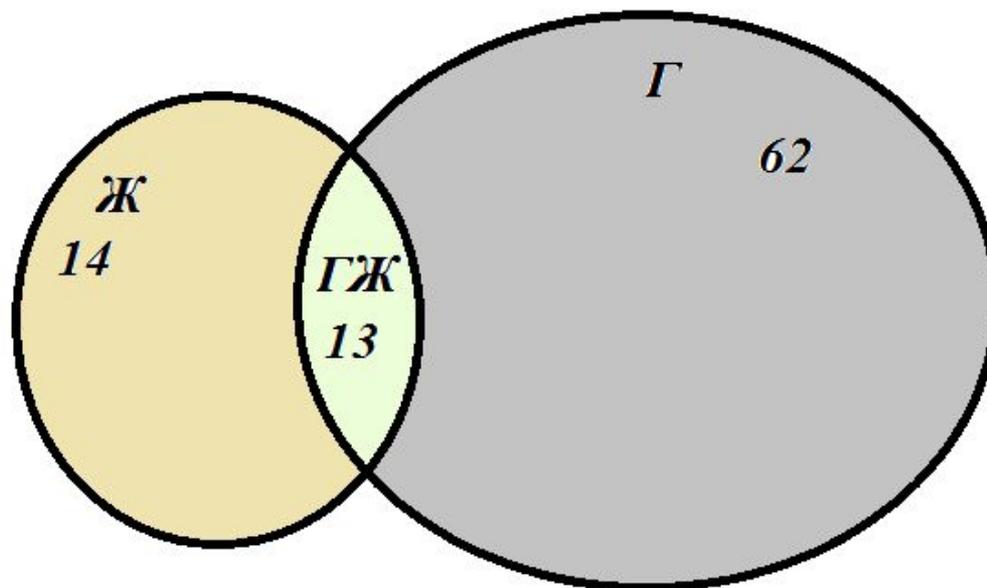




Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или

газету, или журнал, или и то и другое вместе. 75 семей выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету.

Сколько семей живет в нашем доме?



Всего: $14 + 13 + 62 = 89$





На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9 – го

класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 7 человек, а 11 учеников выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив по прыжкам в высоту.

Сколько учеников выполнили норматив: а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) по прыжкам при условии, что не выполнен норматив по бегу?





Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекаются коллекционированием?



ЗАПИШИ
В ТЕТРАДЬ



Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, посмотрев спектакли А, В или С. При этом спектакли А, В, С видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе?





В воскресенье 19 учеников нашего класса побывали в планетарии, 10 – в цирке и 6 – на стадионе. Планетарий и цирк посетили 5 учеников; планетарий и стадион - 3; цирк и стадион - 1. Сколько учеников в нашем классе, если никто не успел посетить все три места, а три ученика не посетили ни одного места?



Задача

В первом пенале лежат лиловая ручка, зелёный карандаш и красный ластик; во втором — синяя ручка, зелёный карандаш и жёлтый ластик; в третьем — лиловая ручка, оранжевый карандаш и жёлтый ластик. Содержимое этих пеналов характеризуется такой закономерностью: в каждом двух из них ровно одна пара предметов совпадает и по цвету, и по назначению. Что должно лежать в четвёртом пенале, чтобы эта закономерность сохранилась?

Подсказка

Подумайте, может ли в четвёртом пенале лежать лиловая ручка.

Решение

В четвёртом пенале должны лежать предметы, которые уже встречаются в первых трех пеналах, но только по одному разу. Это синяя ручка, оранжевый карандаш и красный ластик.

Ответ

Синяя ручка, оранжевый карандаш, красный ластик.



№ 5

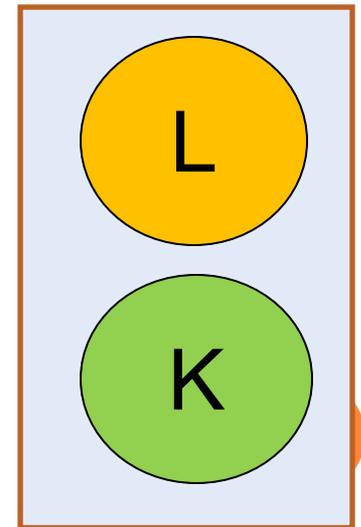
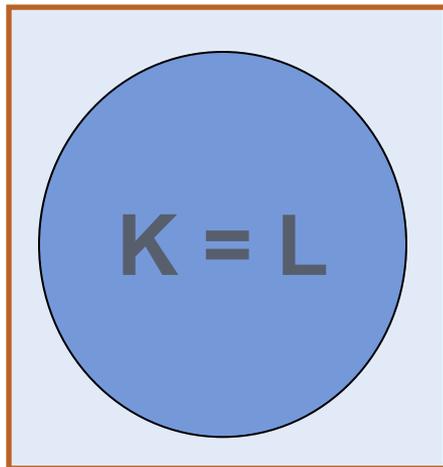
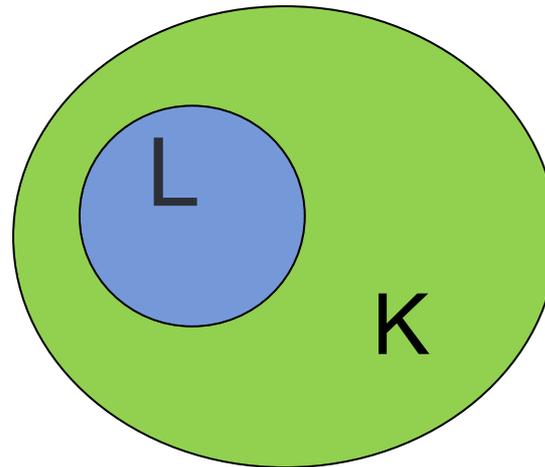
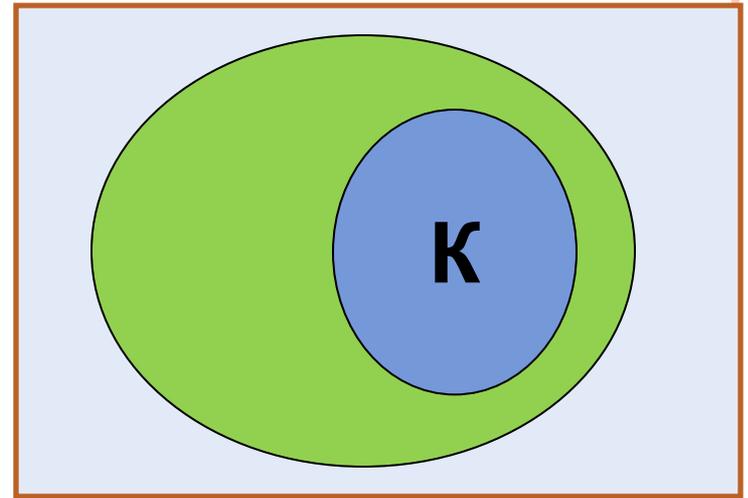
Изобразите с помощью кругов Эйлера пересечение множеств K и L , если:

а) $K \subset L$

б) $L \subset K$

в) $K = L$

г) $K \cap L = \emptyset$



Задача

Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

Подсказка

Рассмотрите людей, являющихся математиками и философами одновременно.

Решение: Обозначим через x число людей, являющихся математиками и философами одновременно. Тогда число математиков равно $7x$, а число философов — $9x$.

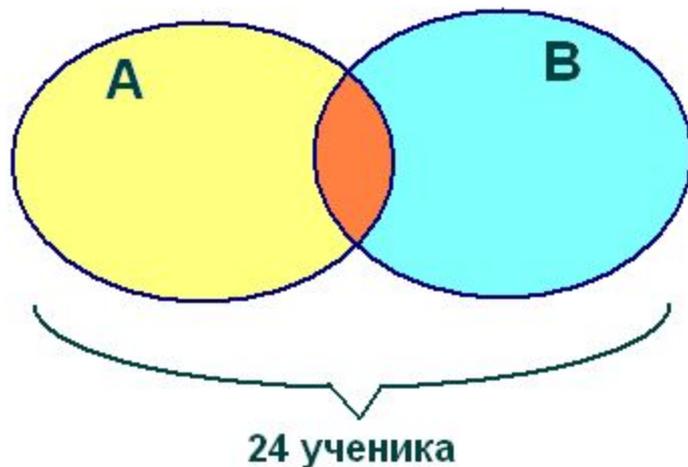
Если $x = 0$, то философов больше. А что значит, что $x = 0$? Это значит, что ни тех, ни других нет вообще, то есть их "поровну". Это правильный ответ, формально удовлетворяющий условию задачи. И те, кто его указал, вдвойне молодцы! Хотя решение засчитывалось и тем, кто разобрал только случай, когда математики всё-таки есть.

Ответ: Если есть хотя бы один философ или математик, то философов больше.

Домашнее задание:

В киоске около школы продается мороженое двух видов: «Спортивное» и «Мальвина». На перемене 24 ученика успели купить мороженое. При этом 15 из них купили «Спортивное», а 17 – мороженое «Мальвина». Сколько человек купили мороженое обоих сортов?

САМОПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ



A = «Спортивное»

B = «Мальвина»

1) $15 + 17 = 32$

2) $32 - 24 = 8$

Ответ: 8

