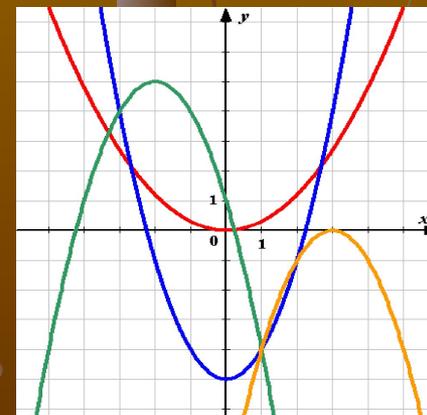
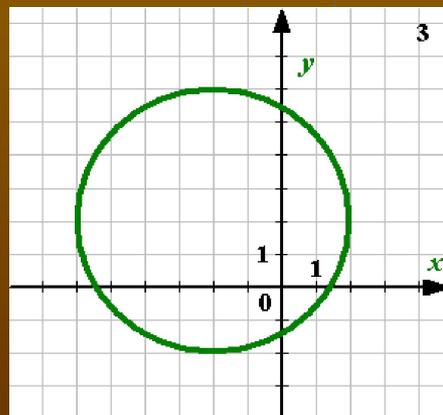


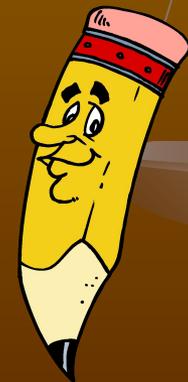
Функции



Исторические сведения

- Начиная лишь с 17 века, в связи с проникновением в математику идеи переменных, понятие функции явно и вполне сознательно применяется. Путь к появлению понятия функции заложили в 17 веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Введено было единое обозначение: неизвестных - последними буквами латинского алфавита - x, y, z , известных - начальными буквами того же алфавита - a, b, c, \dots и т.д. Под каждой буквой стало возможным понимать не только конкретные данные, но и многие другие; в математику пришла идея изменения. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы. Кроме того, у Декарта и Ферма (1601-1665) в геометрических работах появляется отчетливое представление переменной величины и прямоугольной системы координат. В своей «Геометрии» в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы; он систематически рассматривал лишь те кривые, которые можно точно представить спомощью уравнений, притом преимущественно алгебраических.

Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения - формулы. В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени (называл в «флюентой»). Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Эйлер (во «Введении в анализ бесконечного»): «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Так понимали функцию на протяжении почти всего 18 века Даламбер (1717-1783), Лагранж (1736-1813), Фурье (1768-1830) и другие видные математики. В 1936 году, 28-летний советский математик и механик С.Л. Соболев первым рассмотрел частный случай обобщенной функции, включающей и дельта-функцию, и применил созданную теорию к решению ряда задач математической физики. Важный вклад в развитие теории обобщенной функции внесли ученики и последователи Шварца - И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилев и др.



Великий математик -

Дирихле



**Дирихле Петер Густав Лежён
(13.02.1805 - 05.05.1859)**

Немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (с 22.12.1837), член Лондонского королевского общества (1855), Парижской АН (1854), Берлинской АН.

В 1831-1855 профессор Берлинского, с 1855 Гёттингенского университетов. Основные труды по теории чисел и математическому анализу. В области математического анализа Дирихле впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, установил признак сходимости ряда (т.н. признак Дирихле, 1862), дал (1829) строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов. Значительные работы Дирихле посвящены механике и математической физике (принцип Дирихле в теории гармонической функции).

Дирихле доказал теорему о существовании бесконечно большого числа простых чисел во всякой арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой - числа взаимно простые и изучал (1837) закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, в связи с чем ввел функциональные ряды особого вида (т.н. ряды Дирихле).

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.} \end{cases}$$

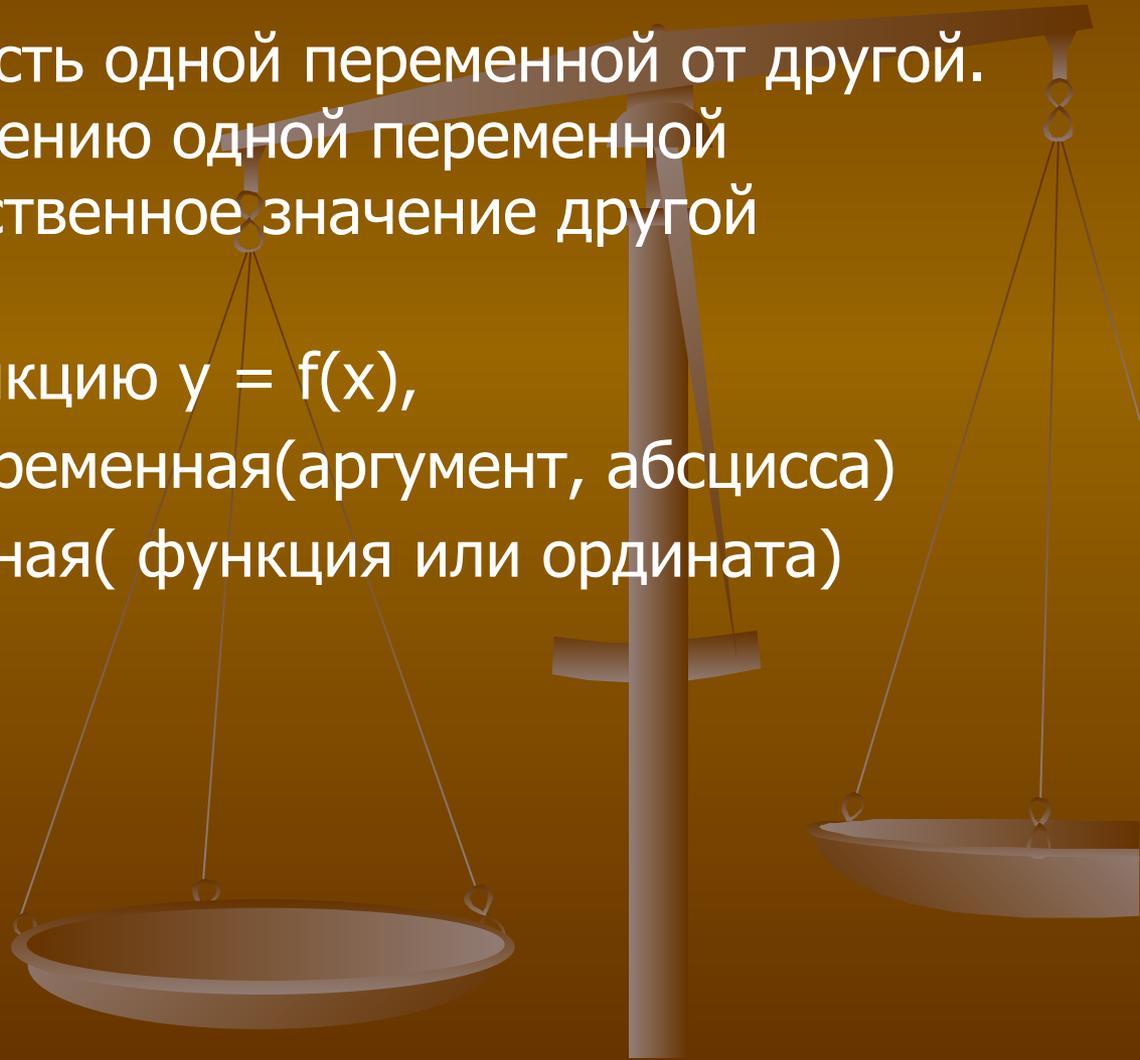
Что такое функция?

Функция-это зависимость одной переменной от другой.
Когда каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой переменной.

Обозначать будем функцию $y = f(x)$,

Где x - независимая переменная(аргумент, абсцисса)

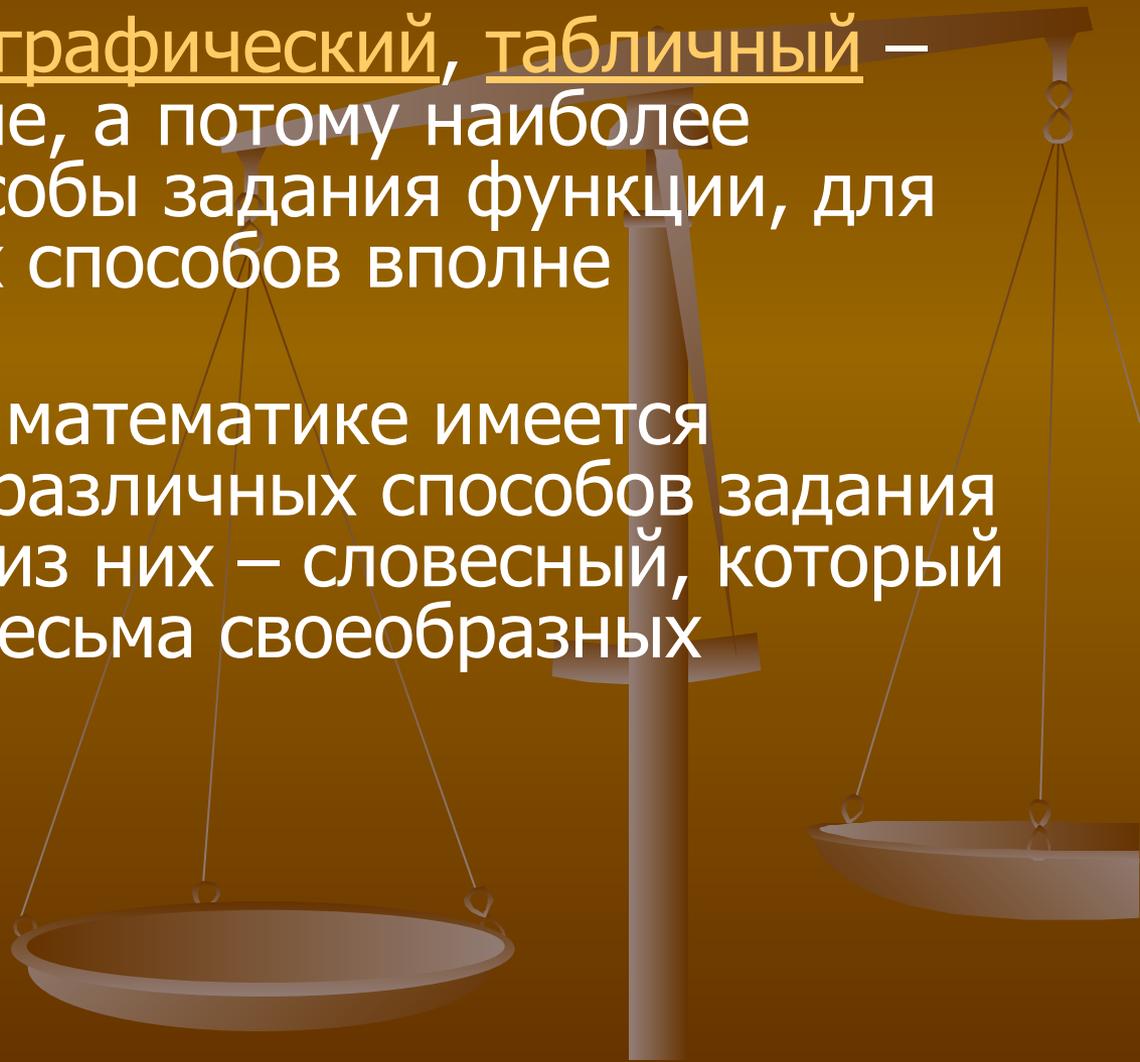
y –зависимая переменная(функция или ордината)



Различные способы задания функции

Аналитический, графический, табличный – наиболее простые, а потому наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно.

На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции и один из них – словесный, который используется в весьма своеобразных ситуациях.



Аналитический способ

Функция задана аналитически- это значит ,
указывается формула, позволяющая получить
значение зависимой переменной, подставив
конкретное значение аргумента.

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}, x = 2, \text{ тогда}$$

$$y = 7$$

Табличный способ

При табличном способе задания функции заполняется таблица, где в первой строчке указывается значение независимой переменной, а во второй строчке - значение зависимой. Чем больше значений в таблице, тем точнее будет график.

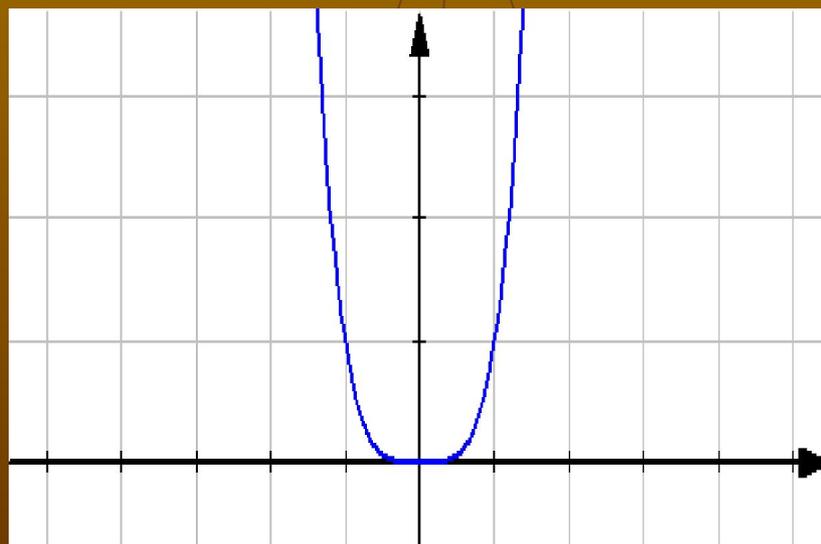
$$y=x^2$$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графический способ

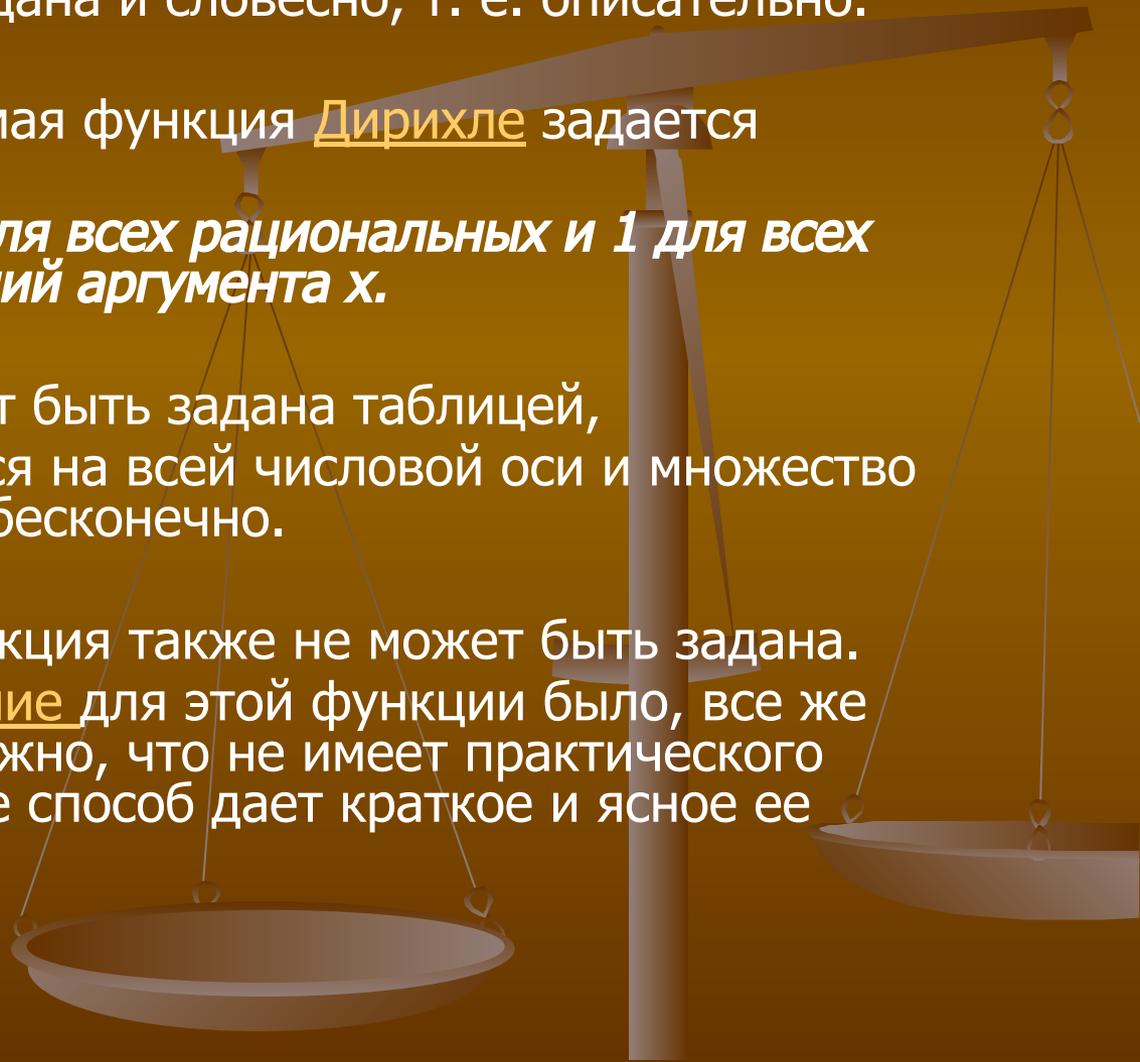
Функция задается графически при помощи графика (множество точек на координатной плоскости, соединенных плавной линией).

$$y=x^2$$



Словесный способ задания функции

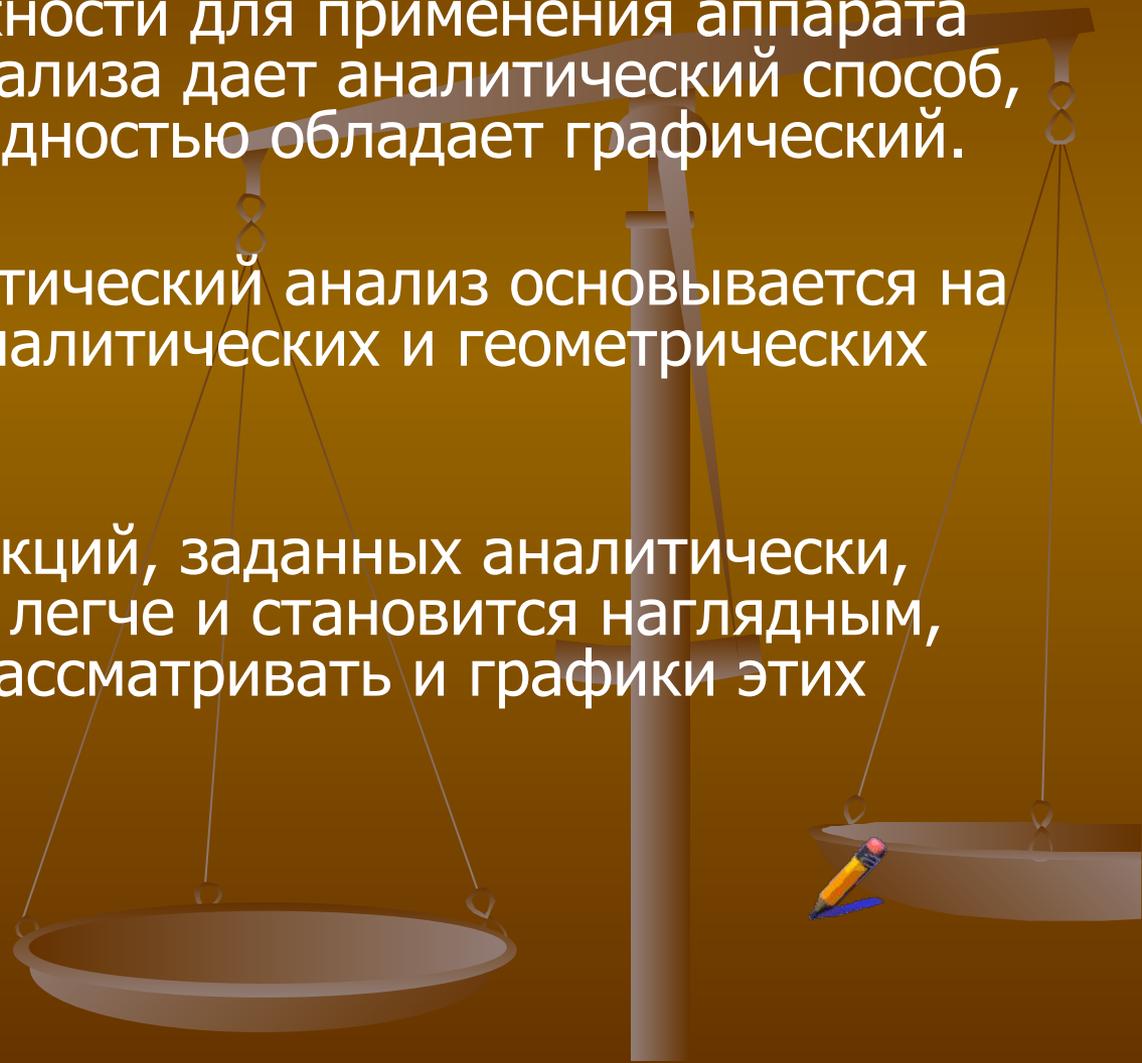
- Функция может быть задана и словесно, т. е. описательно.
- Например, так называемая функция Дирихле задается следующим образом:
 - *функция y равна 0 для всех рациональных и 1 для всех иррациональных значений аргумента x .*
- Такая функция не может быть задана таблицей,
- так как она определяется на всей числовой оси и множество значений ее аргумента бесконечно.
- Графически данная функция также не может быть задана.
- Аналитическое выражение для этой функции было, все же найдено, но оно так сложно, что не имеет практического значения. Словесный же способ дает краткое и ясное ее определение.



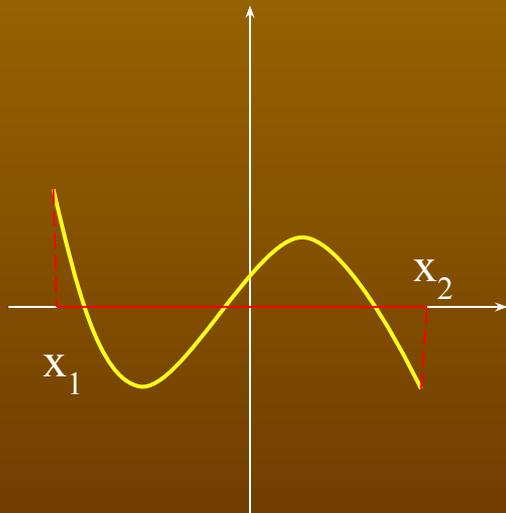
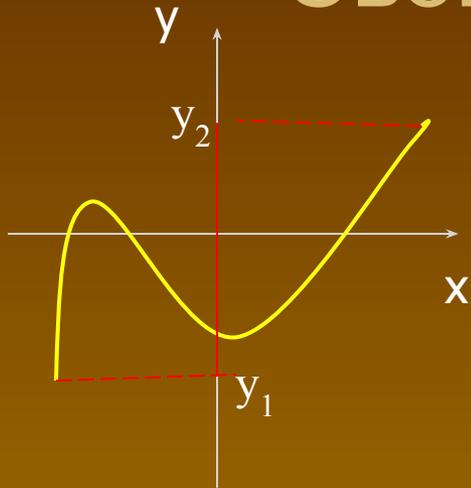
Из всех указанных способов задания функции наибольшие возможности для применения аппарата математического анализа дает аналитический способ, а наибольшей наглядностью обладает графический.

Вот почему математический анализ основывается на глубоком синтезе аналитических и геометрических методов.

Исследование функций, заданных аналитически, проводится гораздо легче и становится наглядным, если параллельно рассматривать и графики этих функций.



Свойства функций



- Область значения функции E (y) - множество значений переменной y , при которых функция существует или определена.

$$E(y)=[y_1; y_2]$$

- Область значения функции E (y) - множество значений переменной y , при которых функция существует или определена.

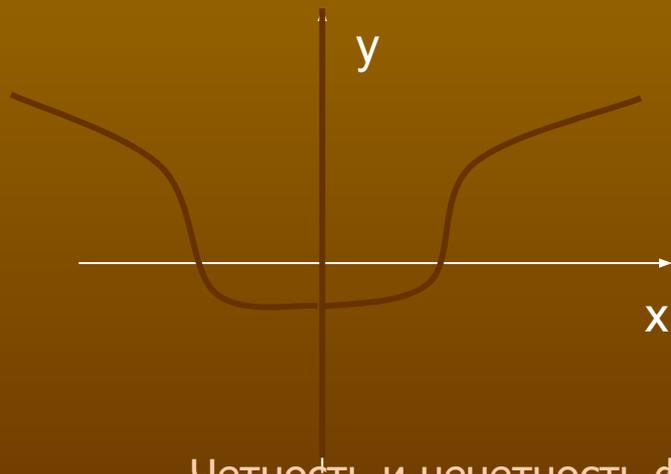
$$D(y)=[x_1; x_2]$$

Чётные и нечётные функции

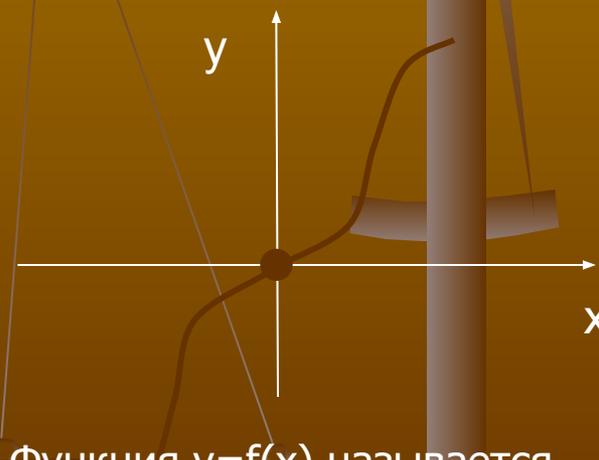


1. Область определения функции $D(f)$ – симметричное
2. Для любого x выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x)$$



$$f(-x) = -f(x)$$



Четность и нечетность функции. Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любого x выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Функция нечетная, если для любого x выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$

- Знакопостоянство функций.

Промежутками знакопостоянства называются такие промежутки, на которых функция не меняет своего знака, т.е. принимает либо только положительное, либо только отрицательное значение.

- Монотонность. Функция называется монотонной, если она только возрастает или только убывает.

Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1 > x_2$, x_1 и $x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$

Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

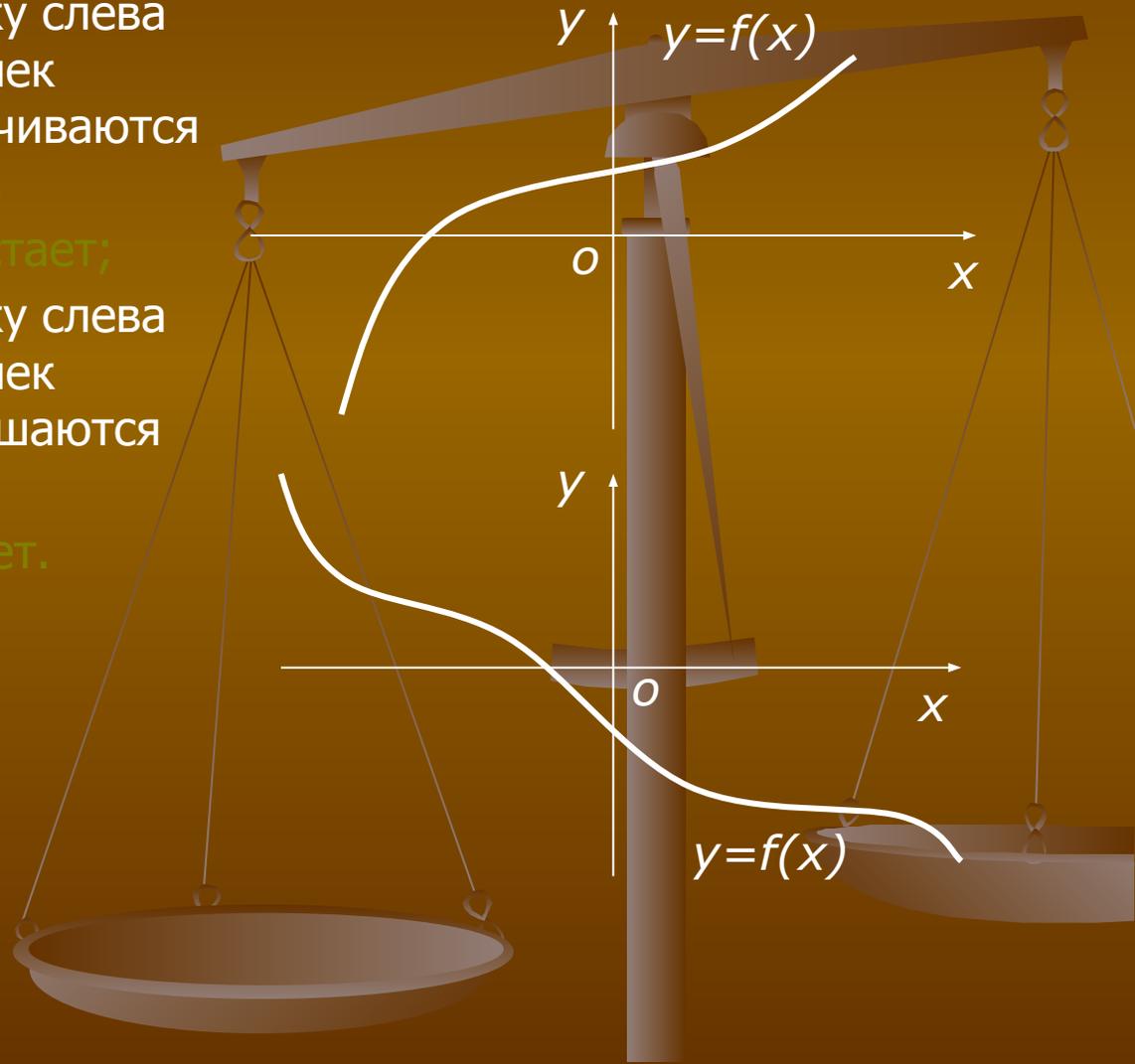
Исследование функций на МОНОТОННОСТЬ

а если двигаться по графику слева направо, то ординаты точек графика всё время увеличиваются («поднимаемся в горку»);

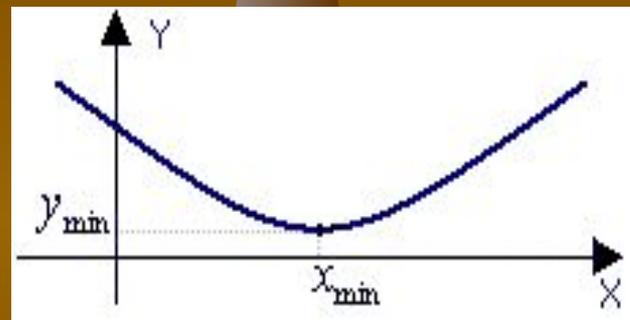
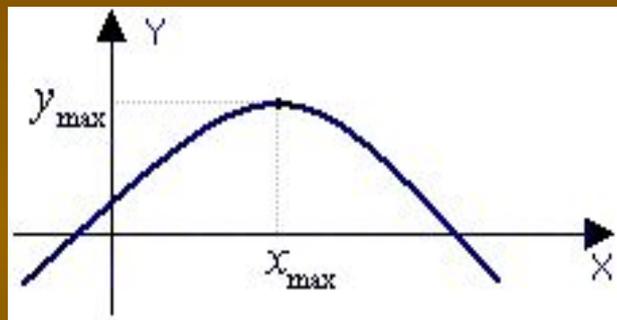
говорят, что функция возрастает;

а если двигаться по графику слева направо, то ординаты точек графика всё время уменьшаются («спускаемся с горки»);

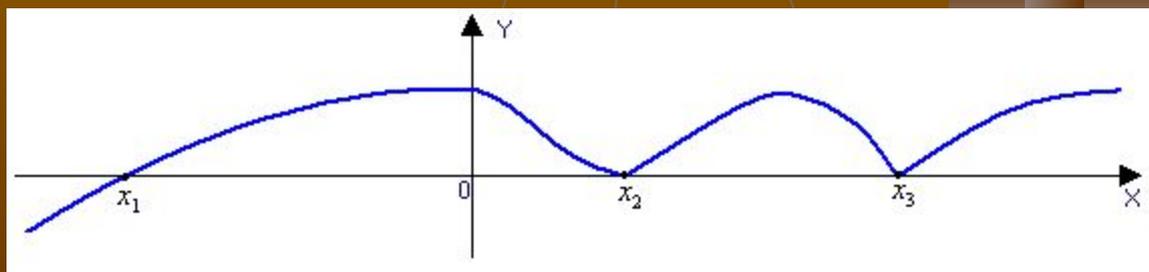
говорят, что функция убывает.



- Наибольшее и наименьшее значения функций.
Если функция задана графически, то ее наибольшее значение в самой верхней точке графика, а наименьшее значение в самой нижней точке.

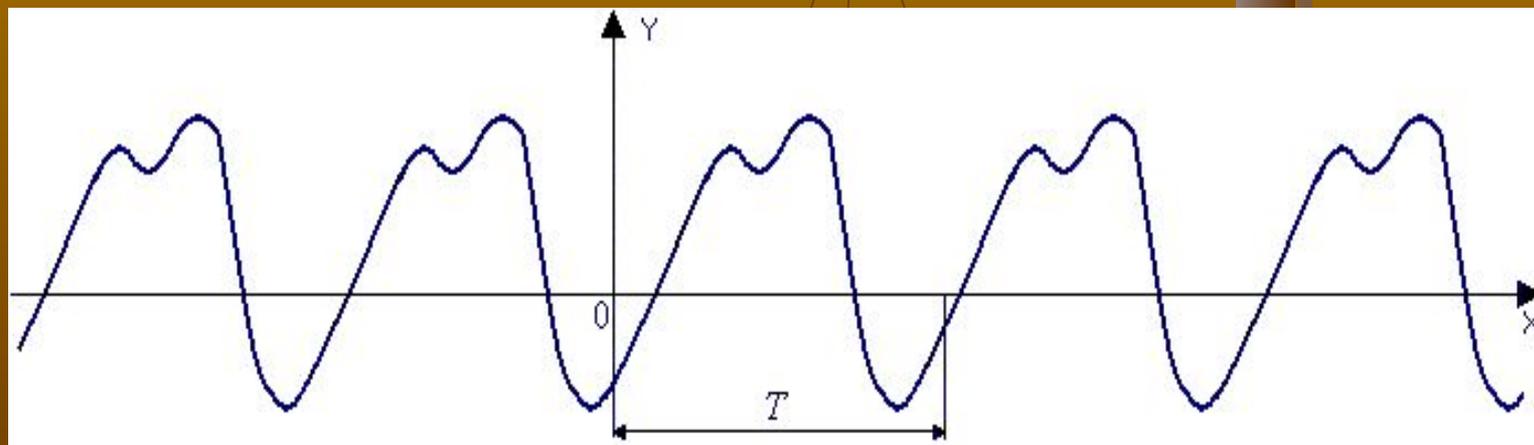


- Нули функции- это значения аргумента, при которых функция равна нулю.



x_1, x_2, x_3 - нули функции $y = f(x)$

- Периодичность. Если функция задана графически, то она является периодической, если график повторяется через определенный интервал(период).

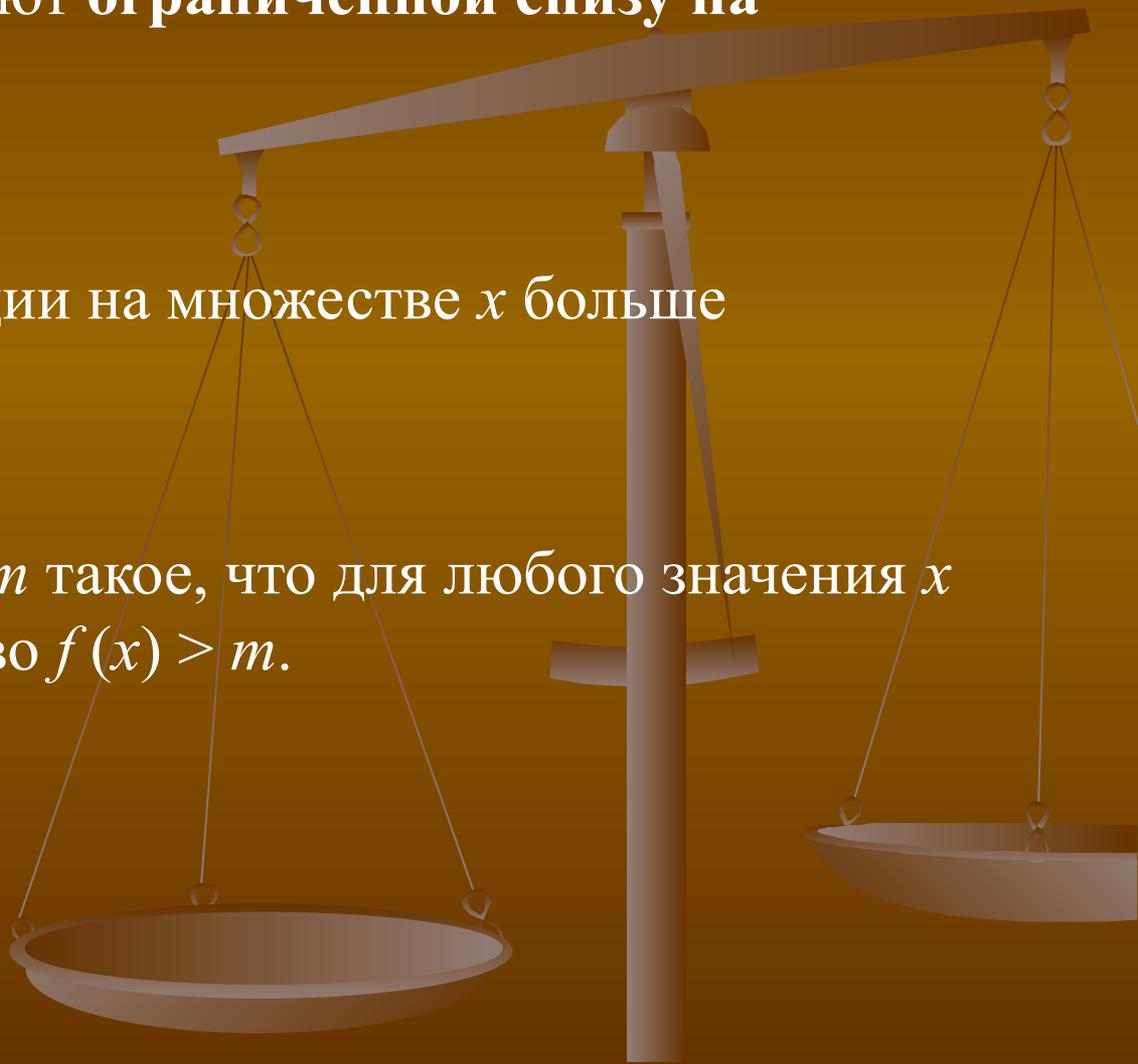


Ограниченность функции

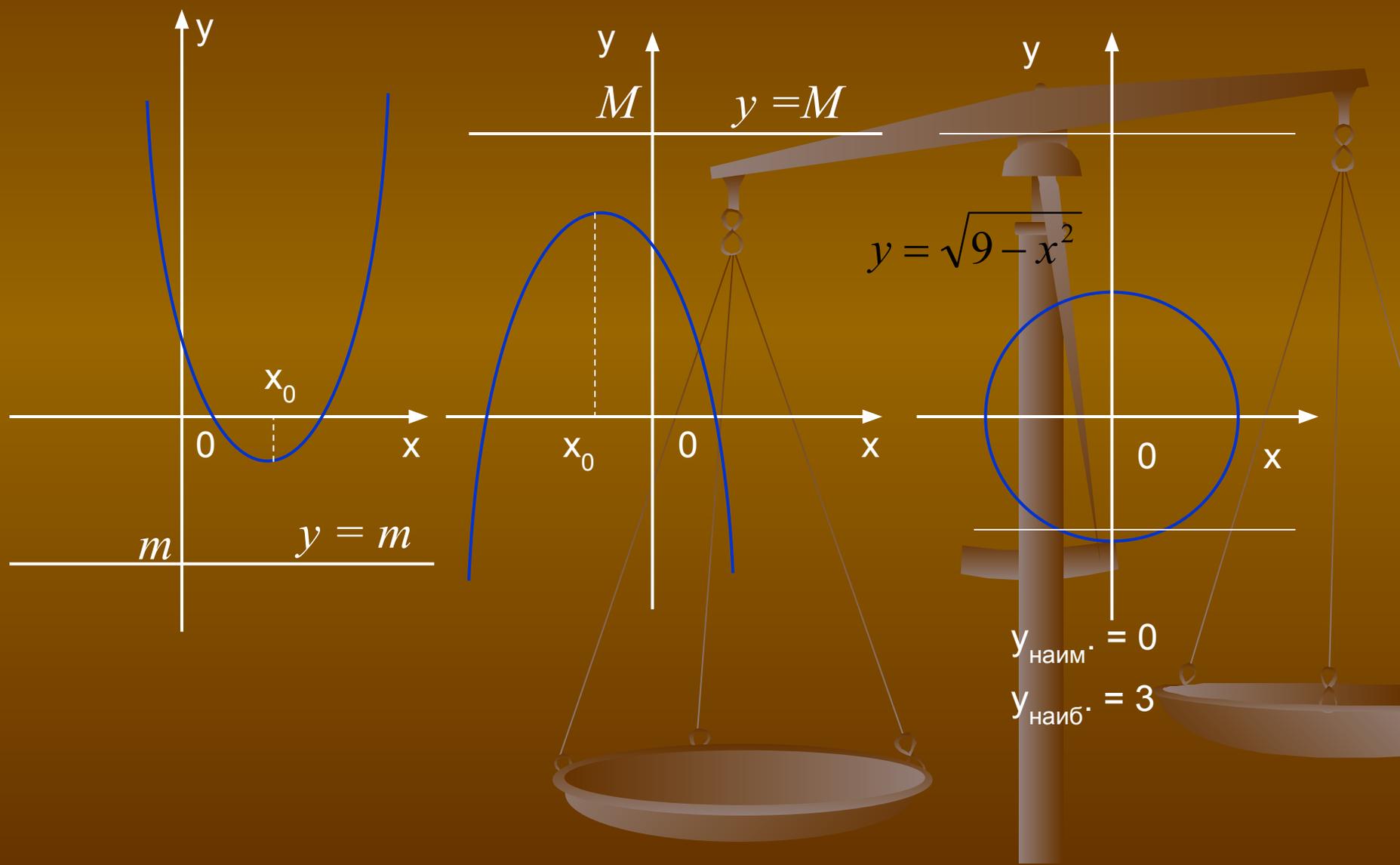
Функция $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве $X \subset D(f)$,

если все значения функции на множестве x больше некоторого числа.

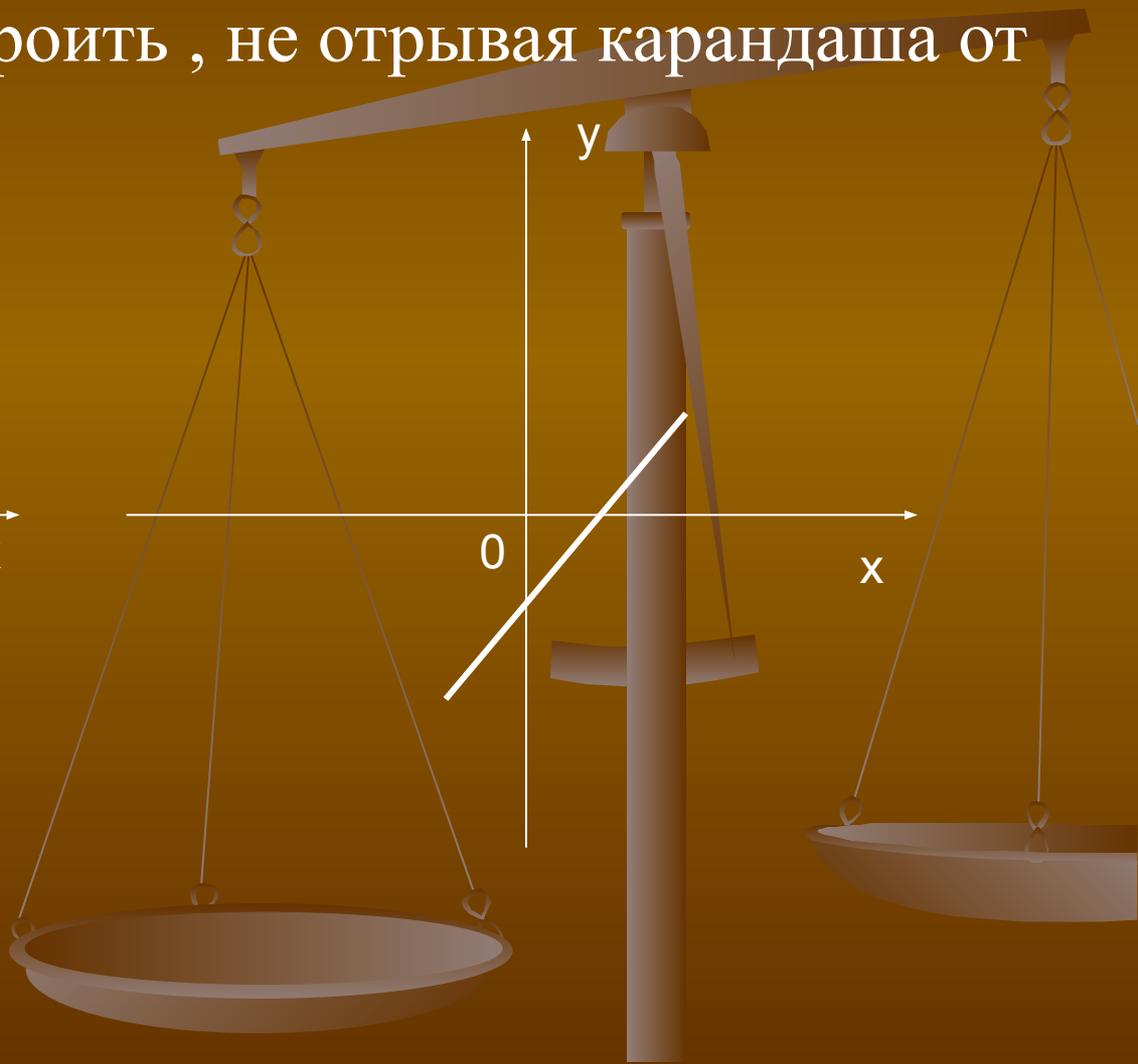
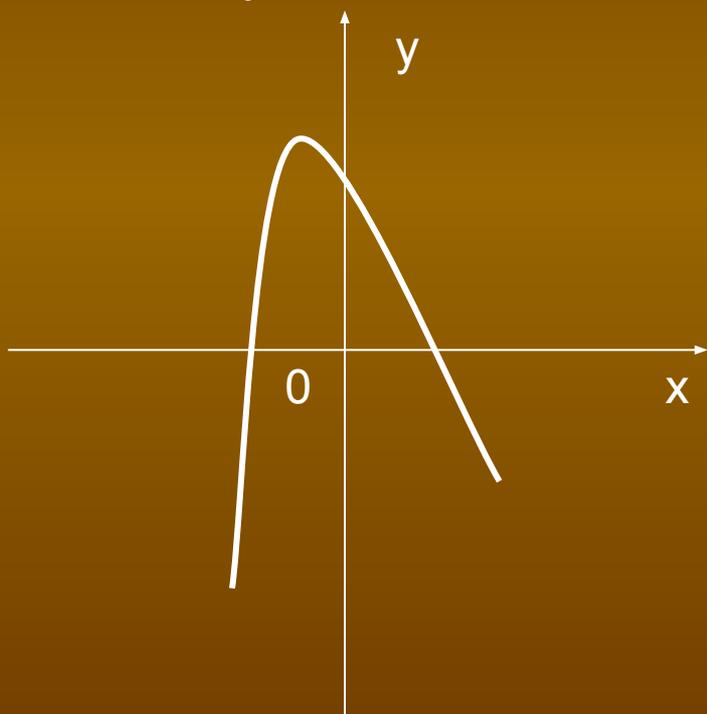
если существует число m такое, что для любого значения x выполняется неравенство $f(x) > m$.

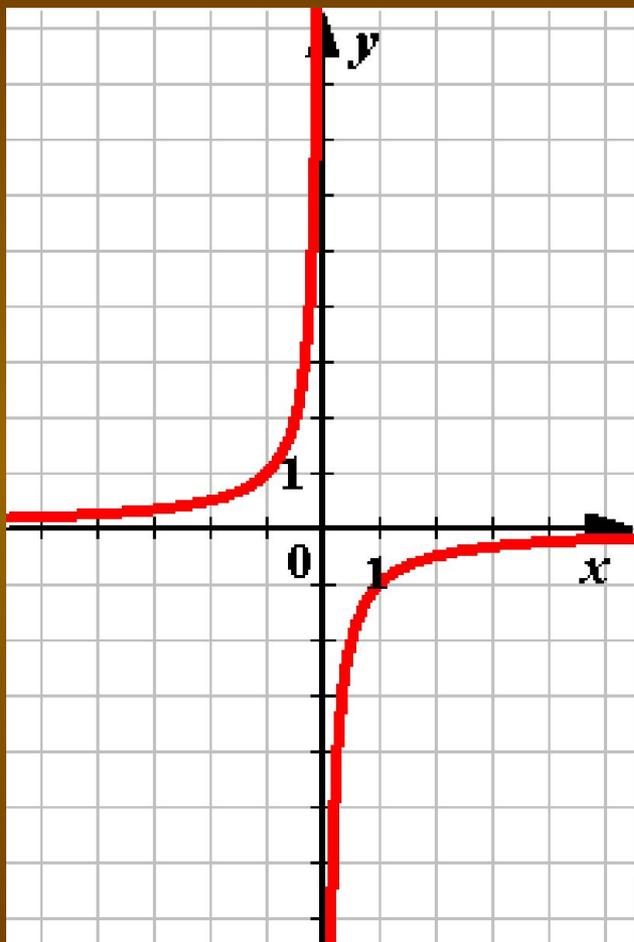


Ограниченность функции



- **Непрерывность функции.** Если функция задана графически, то она непрерывна, если ее график представляет собой непрерывную линию, т.е. линию, которую можно построить, не отрывая карандаша от листа бумаги.



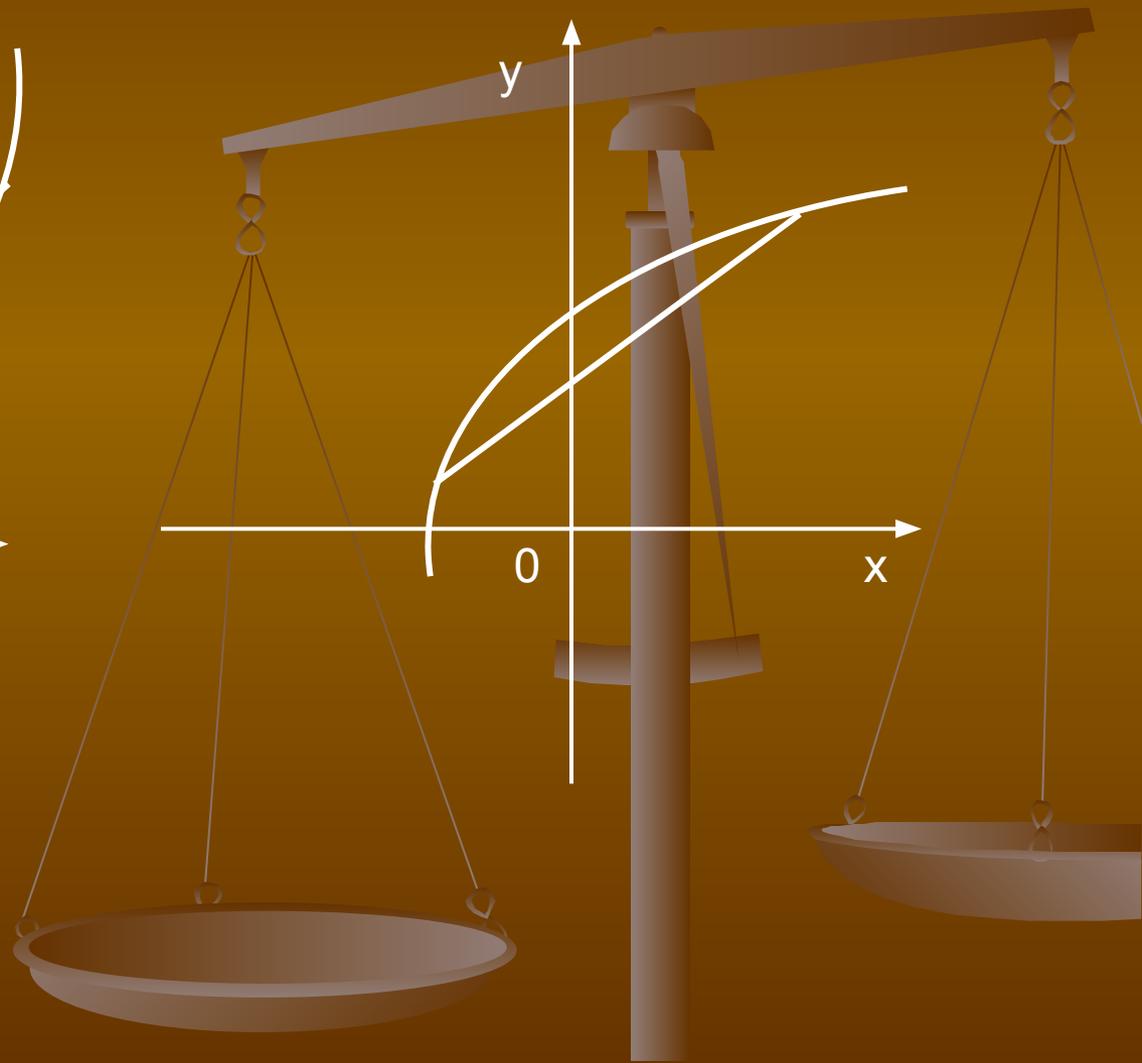
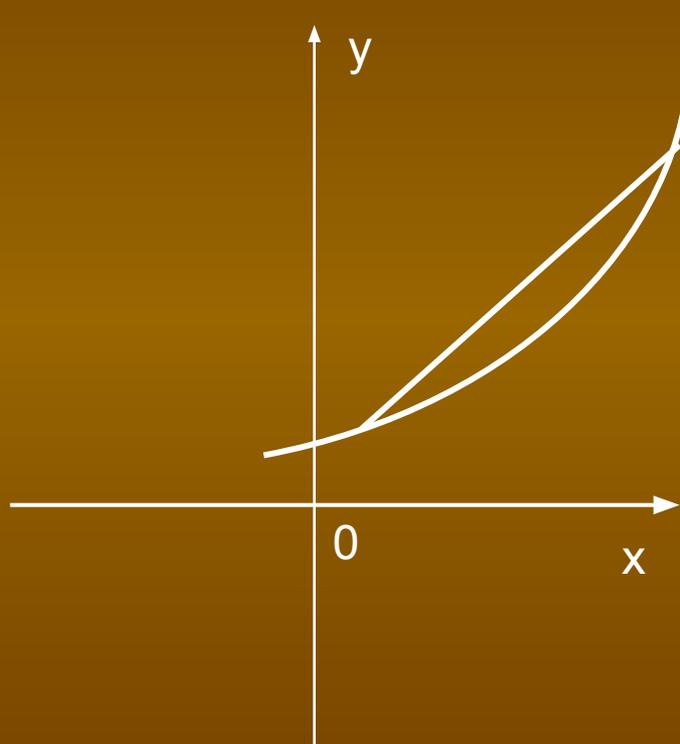


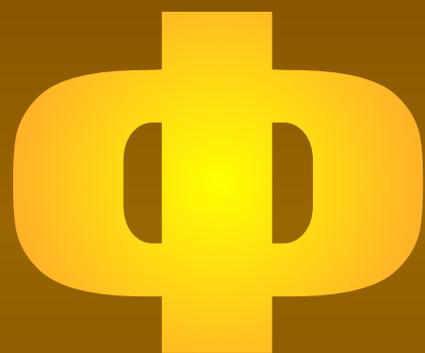
ЭТА ФУНКЦИЯ
РАЗРЫВНАЯ, Т.К. ЕЁ
ГРАФИКИ НАХОДЯТСЯ В РАЗНЫХ
ЧЕТВЕРТЯХ.



Выпуклость функции

Выпуклая функция — функция, у которой надграфик является выпуклым множеством.

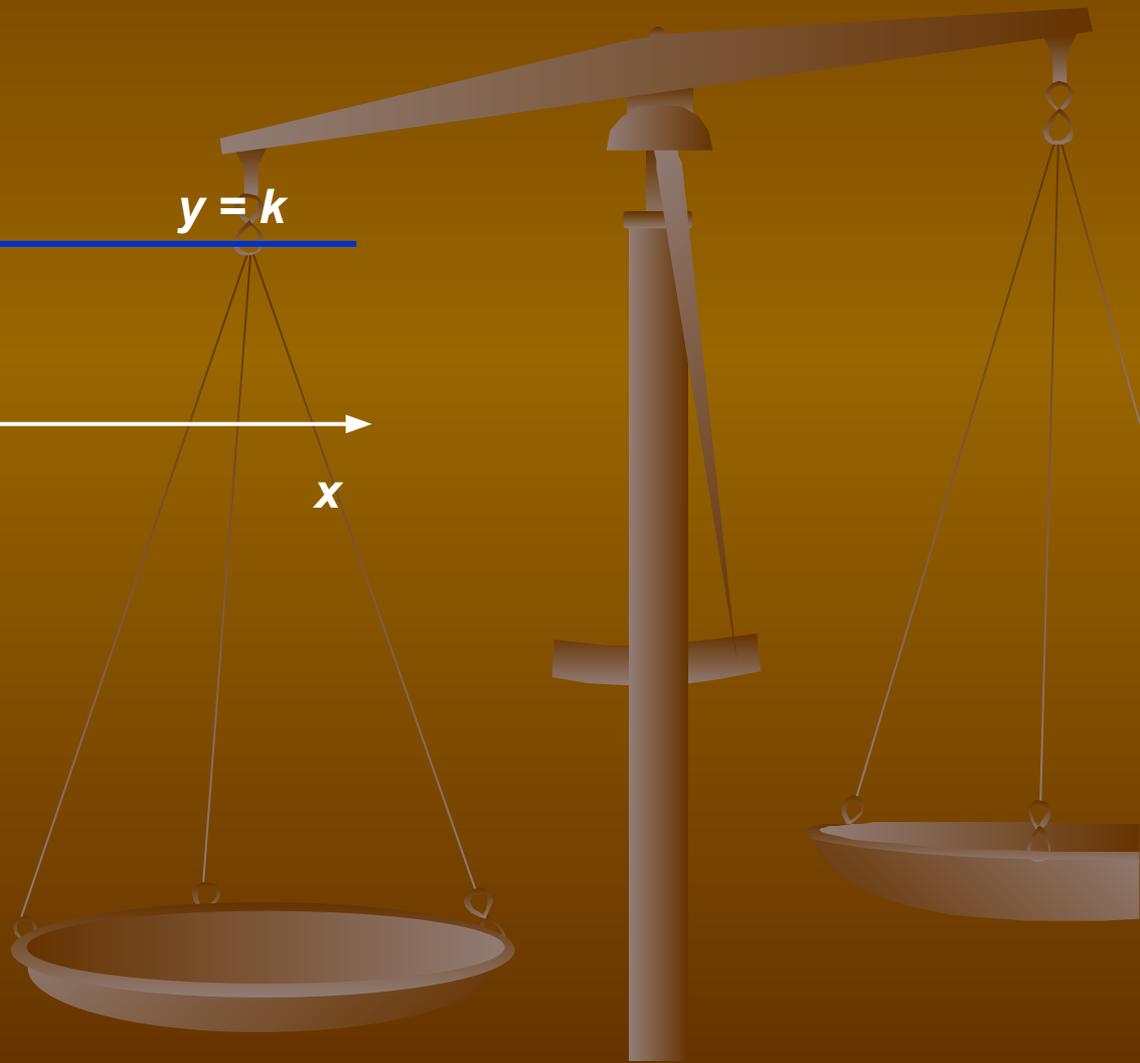
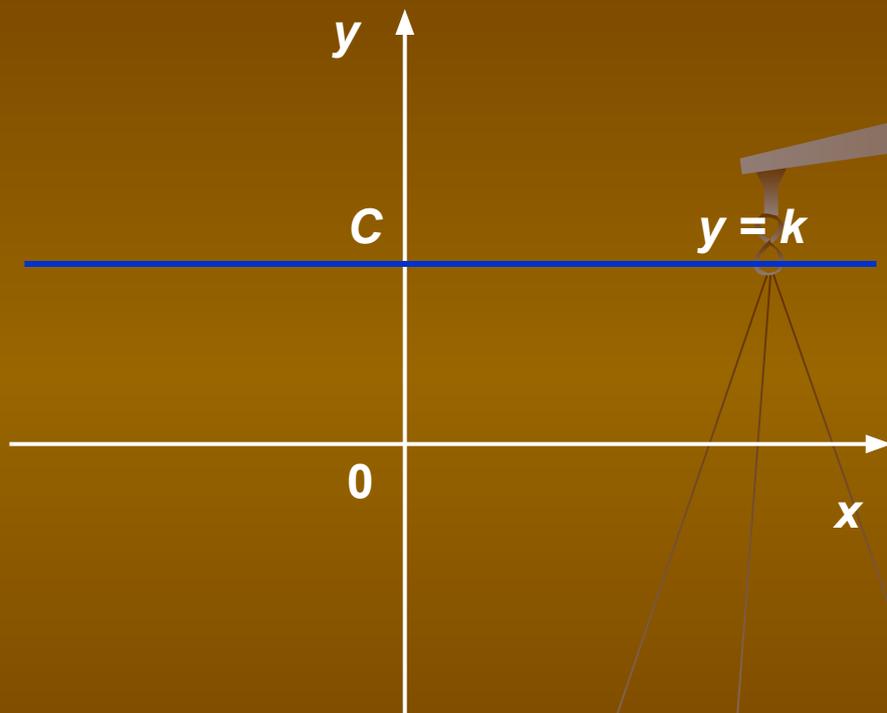




УНКЦИИ

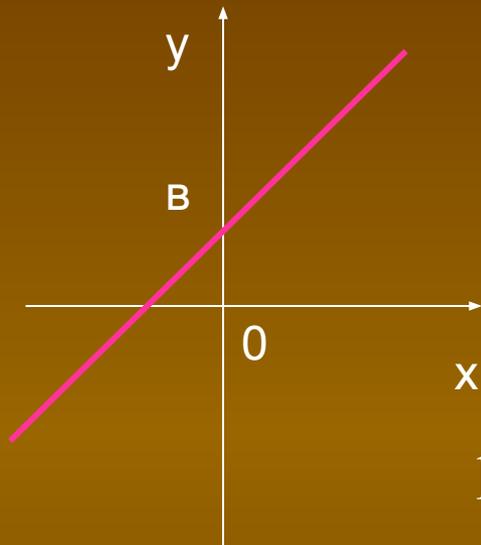


График постоянной функции



Линейная функция

$$y = kx + b$$



1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2. $E(f) = (-\infty; +\infty)$

3. Монотонность

$k > 0$

возрастающая

$k < 0$

убывающая

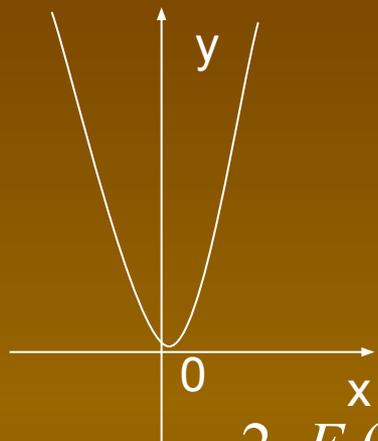
4. Не ограничена ни сверху, ни снизу.

5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

6. Функция непрерывна.



Функция $y = kx^2$



1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$

$k > 0$



2. $E(f) = [0; +\infty)$

3. Промежутки монотонности

убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$

4. Ограничена снизу.

5. $y_{\text{наим}} = 0$; $y_{\text{наиб}}$ — не существует.

6. Непрерывна.

7. Выпукла вниз.

$k < 0$



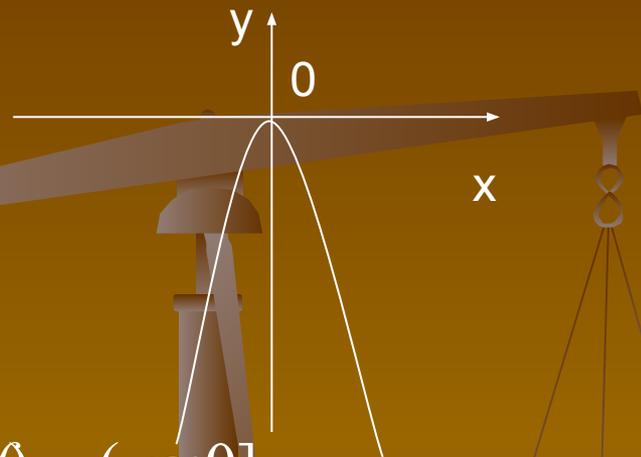
2. $E(f) = (-\infty; 0]$

убывает на луче $[0; +\infty)$, возрастает на луче $(-\infty; 0]$

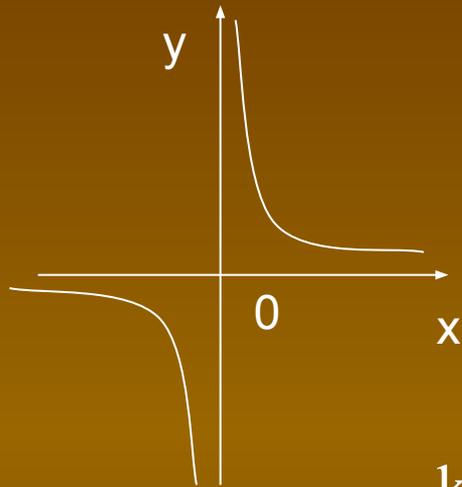
4. Ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}}$ — не существует; $y_{\text{наиб}} = 0$.

7. Выпукла вверх.



Функция $y = \frac{k}{x}$



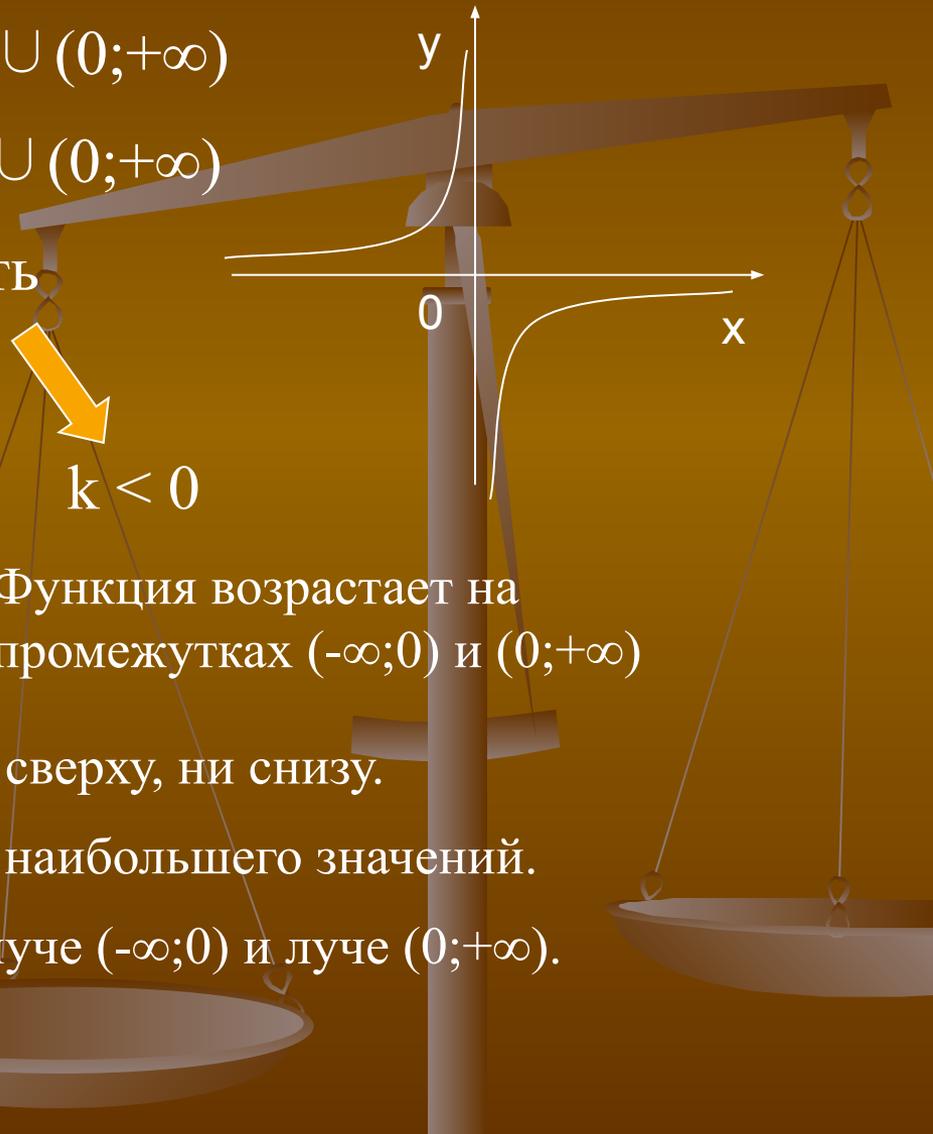
1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

3. Монотонность

$k > 0$

Функция убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$



$k < 0$

Функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

4. Не ограничена ни сверху, ни снизу.

5. Нет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

6. Функция непрерывна на луче $(-\infty; 0)$ и луче $(0; +\infty)$.

Доказательство :

1. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = kx + m$.

1) Если $x_1 < x_2$ и $k > 0$, то $kx_1 < kx_2$ (по свойству 3).

2) Прибавим к левой и правой части неравенства число m :

$kx_1 + m < kx_2 + m$ (по свойству 2), т.е. $f(x_1) < f(x_2)$.

3) Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, значит функция $y = kx + m$ возрастает.

2. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = kx + m$.

1) Если $x_1 < x_2$ и $k < 0$, то $kx_1 > kx_2$ (по свойству 3).

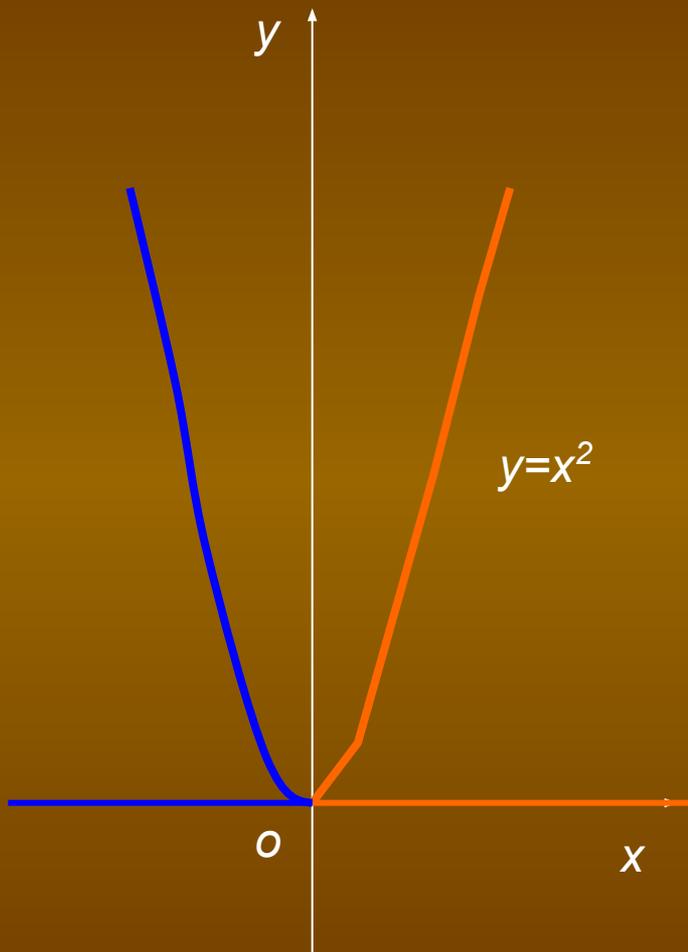
2) Прибавим к левой и правой части неравенства число m :

$kx_1 + m > kx_2 + m$ (по свойству 2), т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

3) Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция $y = kx + m$ убывает.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) по всей своей области определения, то её можно назвать возрастающей(убывающей), не указывая промежутков.

Функция $y = x^2$



1. $y = x^2, x \in [0, +\infty)$

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \text{ (по свойству 6),}$$

т.е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, значит функция $y=x^2$ возрастает на луче $[0, +\infty)$.

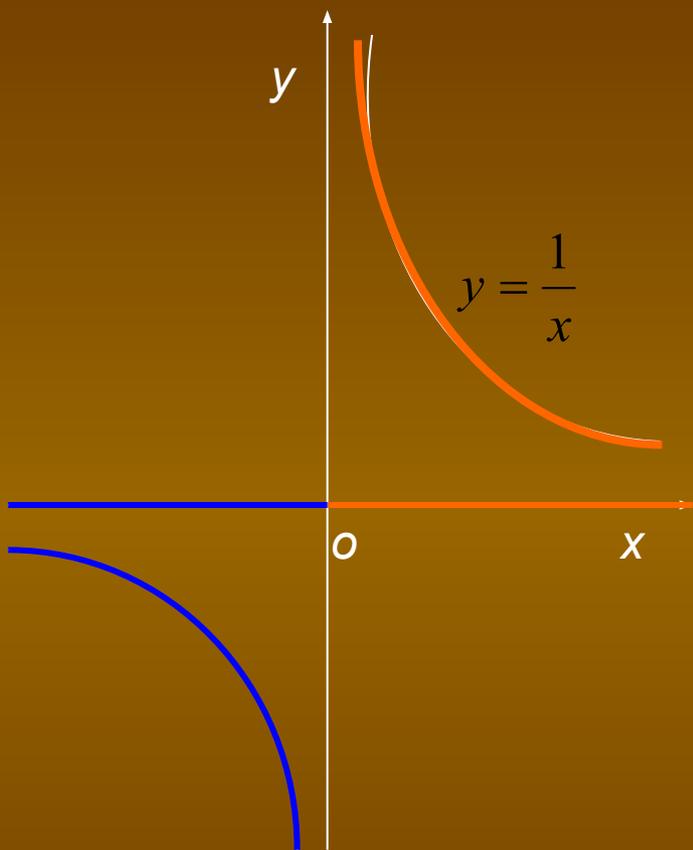
2. $y = x^2, x \in (-\infty, 0]$

$x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ и $x_1 < x_2$, тогда $-x_1 > -x_2$ (по свойству 3), но $-x_1 \geq 0, -x_2 \geq 0$

Тогда $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, т.е. $x_1^2 > x_2^2$.

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция $y=x^2$ убывает на луче $(-\infty, 0]$.

Функция $y = \frac{1}{x}$



1. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$
 $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция убывает на открытом луче $(0, +\infty)$

2. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$
 $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $x_1 < x_2$, тогда $-x_1 > -x_2 \Rightarrow$
 $\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$

Кубическая парабола

График функции $y = x^3$ (кубическая парабола)

Построим график функции $y = x^3$. Составим таблицу соответственных значений x и y , округляя значения y до сотых.

Построим точки, координаты которых указаны в этой таблице.

Из таблицы видно, что график функции в начале координат почти сливается с осью x .

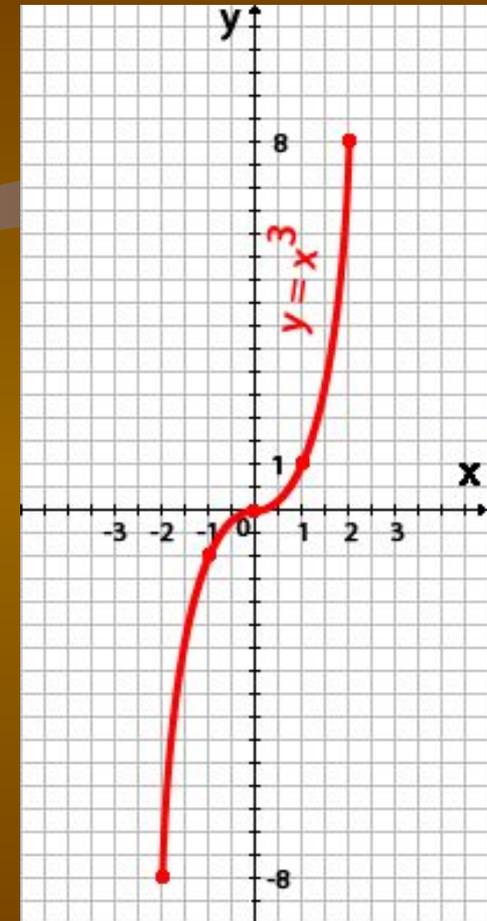
Выясним некоторые свойства функции $y = x^3$:

График функции **неограниченно продолжается вверх справа от оси y и неограниченно продолжается вниз слева от оси y .**

Если $x = 0$, то $y = 0$. То есть график функции проходит через начало координат

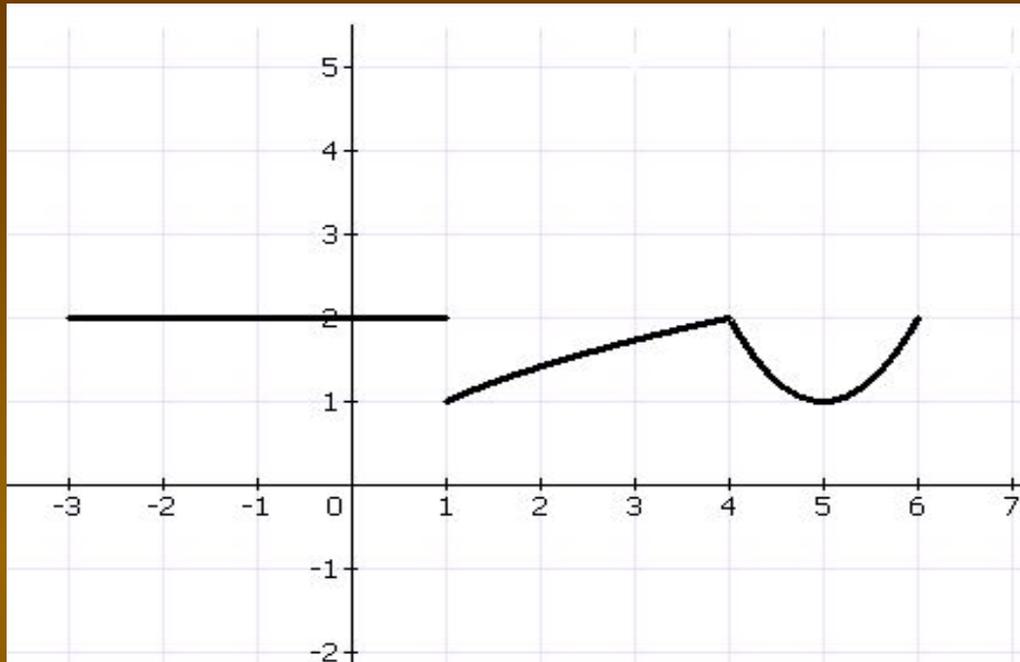
Если $x > 0$, то $y > 0$, если $x < 0$, то $y < 0$, . Так как куб положительного числа - положительное число, а куб отрицательного числа - отрицательное число. Значит график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.

Противоположным значениям x соответствует противоположные значения y . Это следует из того, что $(-x)^3 = -x^3$ для любого значения x . Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, **симметричны** относительно начала координат.



x	-2	-1.5	-1	0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-8	-3.38	-1	0.13	0	0.13	1	3.38	8

График кусочной функции

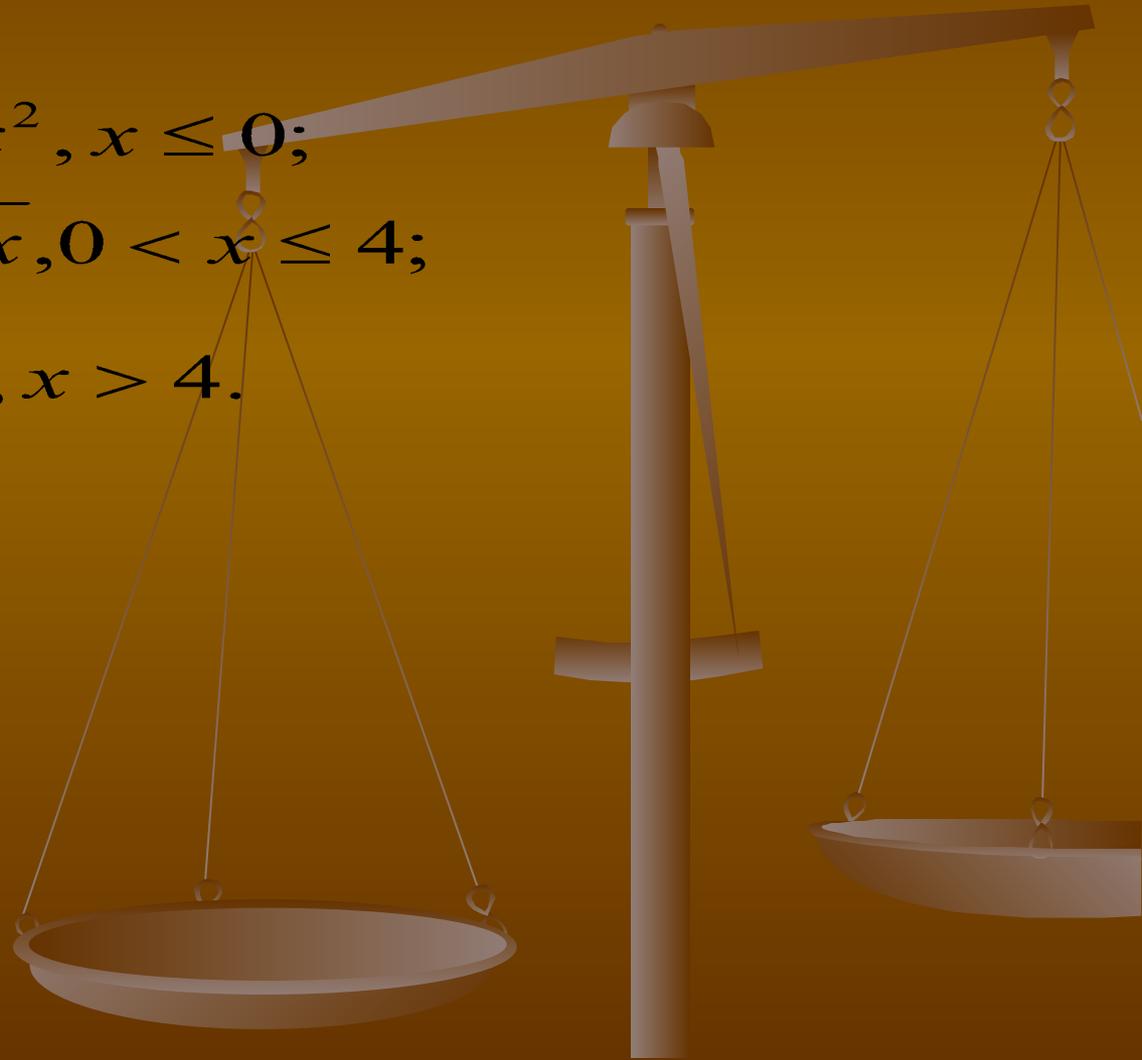


$$y = \begin{cases} 2; & -3 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x}; & 1 < x \leq 4; \\ (x-5)^2 + 1; & 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

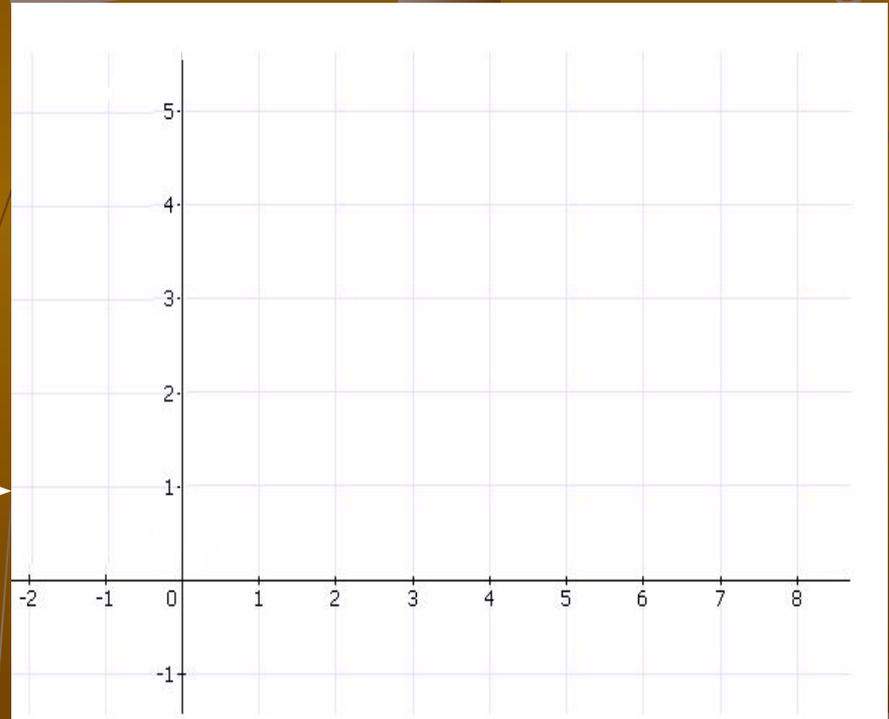
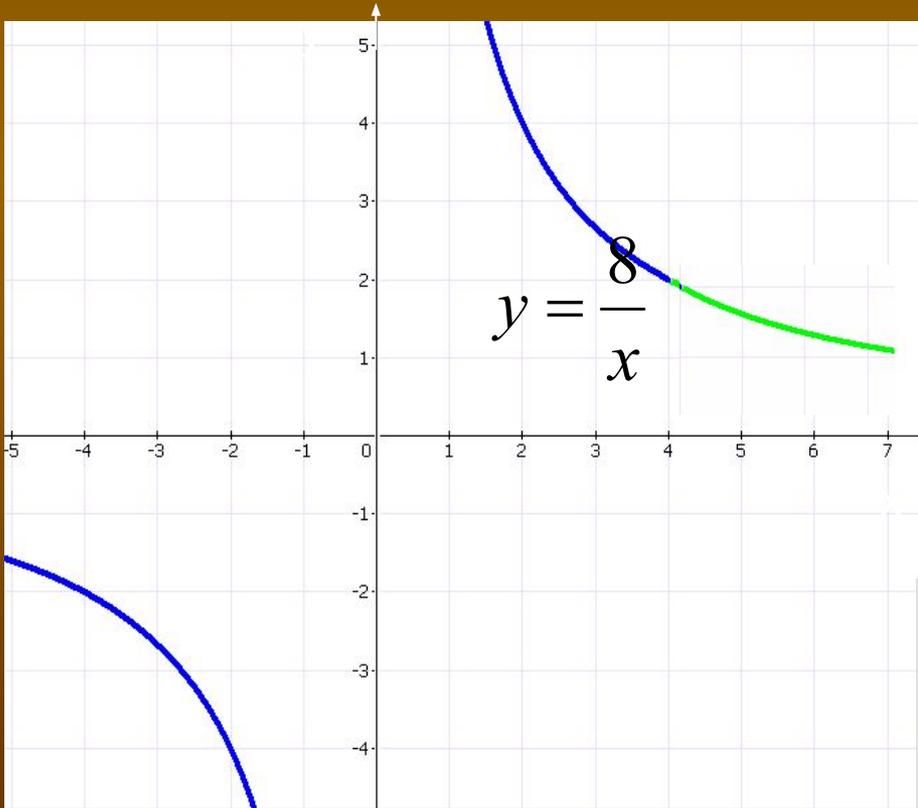
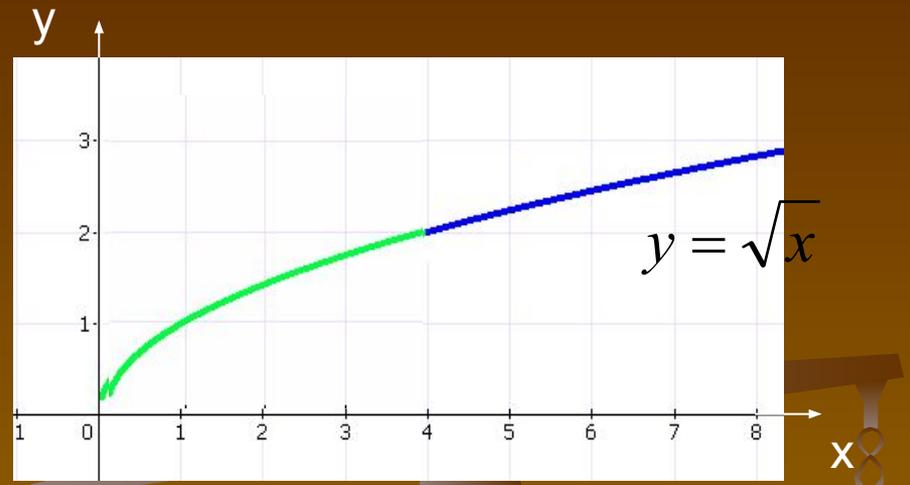
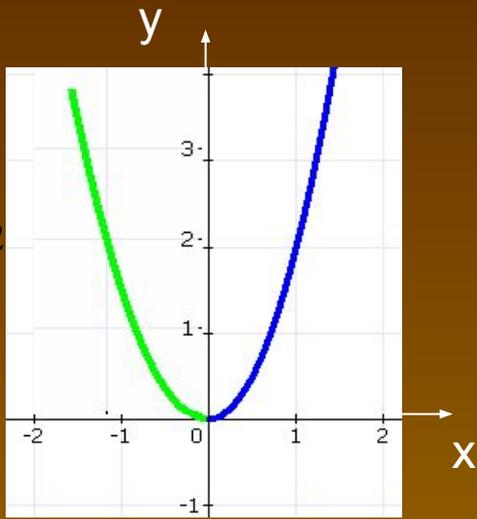
1. $D(f) = [-3; 6]$
2. $E(f) = [1; 2]$
3. Постоянна на $[-3; 1]$, возрастает на $(1; 4]$ и $[5; 6]$, убывает на $(4; 5]$
4. Ограничена и сверху, и снизу.
5. $y_{\text{наим}} = 1; y_{\text{наиб}} = 2$
6. Непрерывна на $[-3; 1]$ и $(1; 6]$, претерпевает разрыв в точке $x = 1$
7. Выпукла вверх на $(1; 4]$, выпукла вниз на $(4; 6]$

Построить график функции

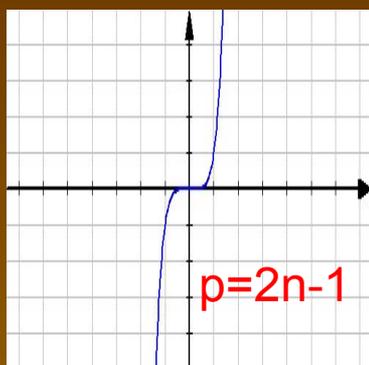
$$y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4; \\ \frac{8}{x}, & x > 4. \end{cases}$$



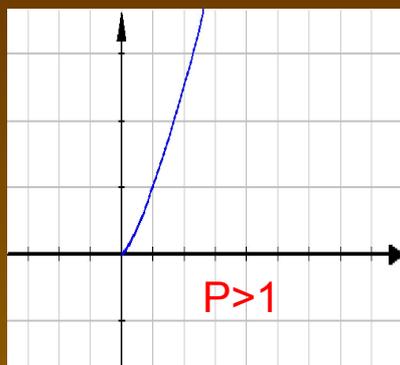
$$y = 2x^2$$



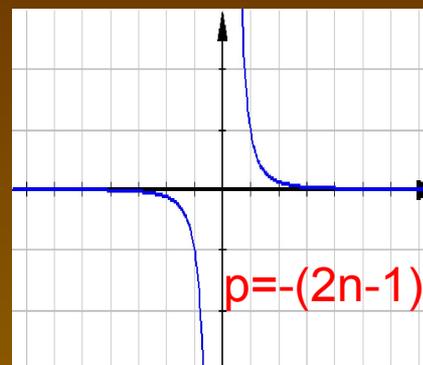
Степенная функция и её график



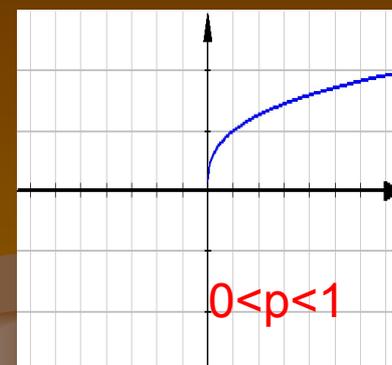
①



②



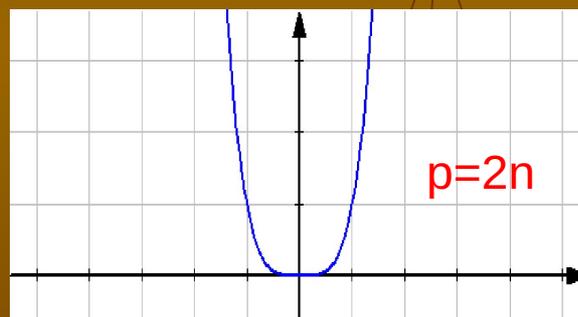
③



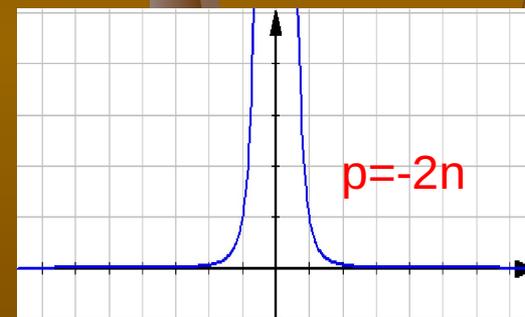
④



⑤



⑥



⑦

$$y = x^{-3}$$

$$y = x^8$$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y = x^5$$

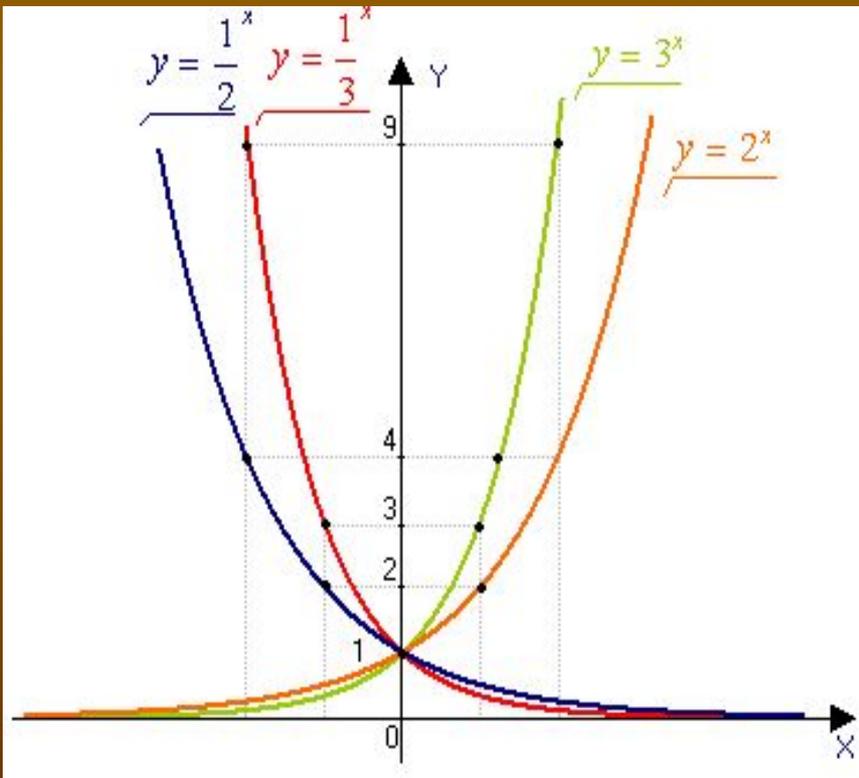
$$y = x^{-4}$$

$$y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$y = x^{\frac{3}{5}}$$

Показательная функция

Функция вида $y=a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется показательной.



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ: \mathbb{R}

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ: $(0; +\infty)$

ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ:

функция является ни четной, ни нечетной

НУЛЕЙ НЕТ

ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА:

$y > 0$ при $x \in \mathbb{R}$

ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ:

при $0 < a < 1$ функция убывает

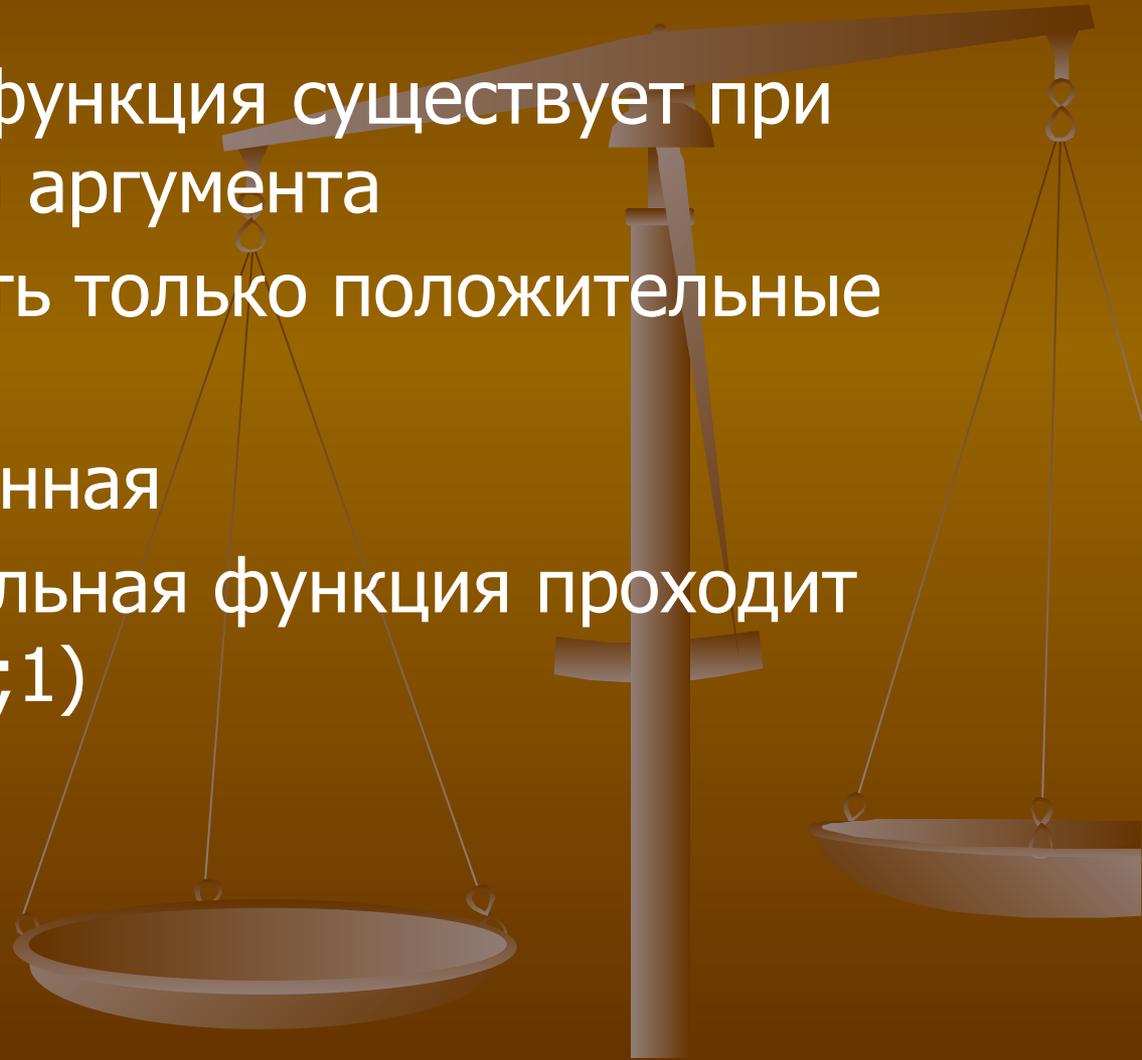
при $a > 1$ функция возрастает

ГРАФИК ФУНКЦИИ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ

ТОЧКУ: $(0; 1)$

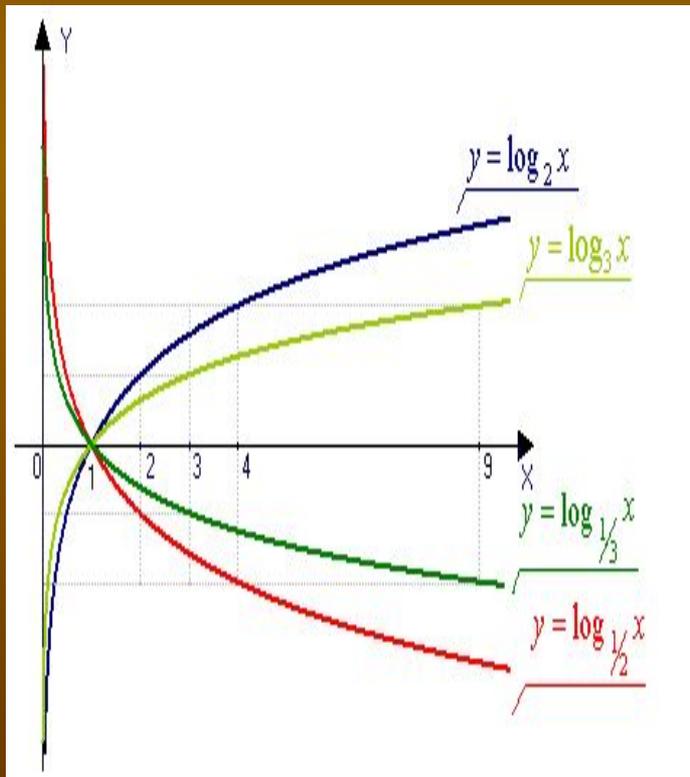
Свойства показательной функции

- Показательная функция существует при любом значении аргумента
- Может принимать только положительные значения
- Функция монотонная
- Любая показательная функция проходит через точку $M(0;1)$



Логарифмическая функция

Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется логарифмической.



Свойства функции

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $(0; \infty)$

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ \mathbb{R}

ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ:

функция ни четная, ни нечетная

НУЛИ: $y = 0$ при $x = 1$

ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА:

если $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $x \in (1; \infty)$

если $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$

ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ:

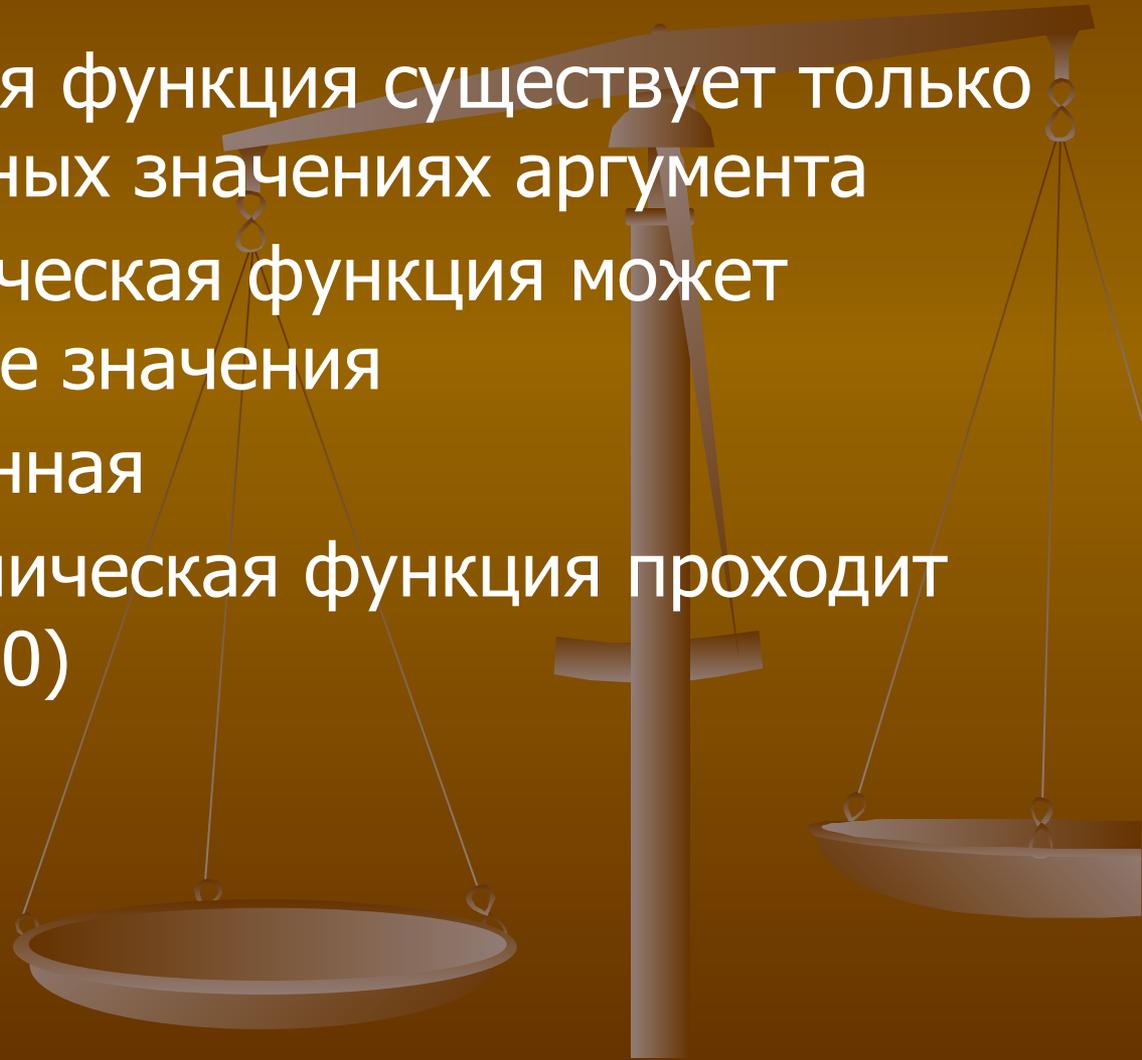
при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$

при $a > 1$ функция возрастает при $x \in (0; \infty)$

ГРАФИК ФУНКЦИИ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ:
 $(1; 0)$

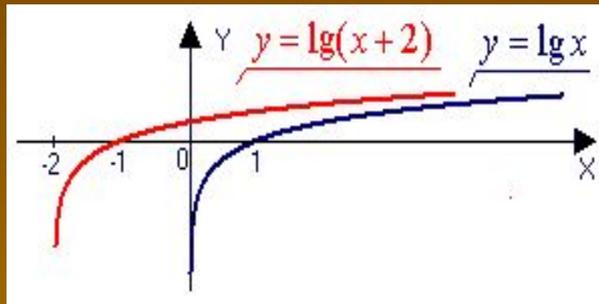
Свойства логарифмической функции

- Логарифмическая функция существует только при положительных значениях аргумента
- Сама логарифмическая функция может принимать любые значения
- Функция монотонная
- Любая логарифмическая функция проходит через точку $M(1;0)$

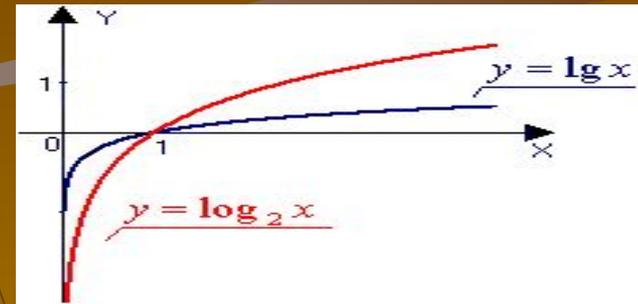


Преобразование графиков функций

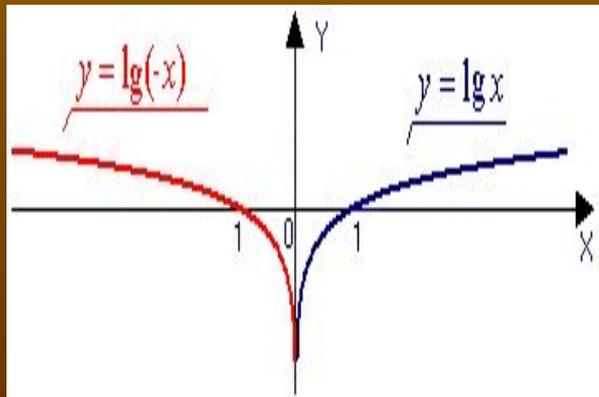
1. Параллельный перенос вдоль оси x



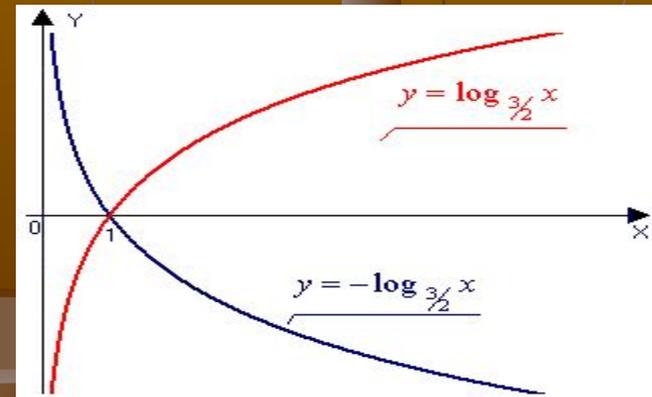
3. Сжатие и растяжение вдоль оси y



2. Симметричное преобразование относительно оси y

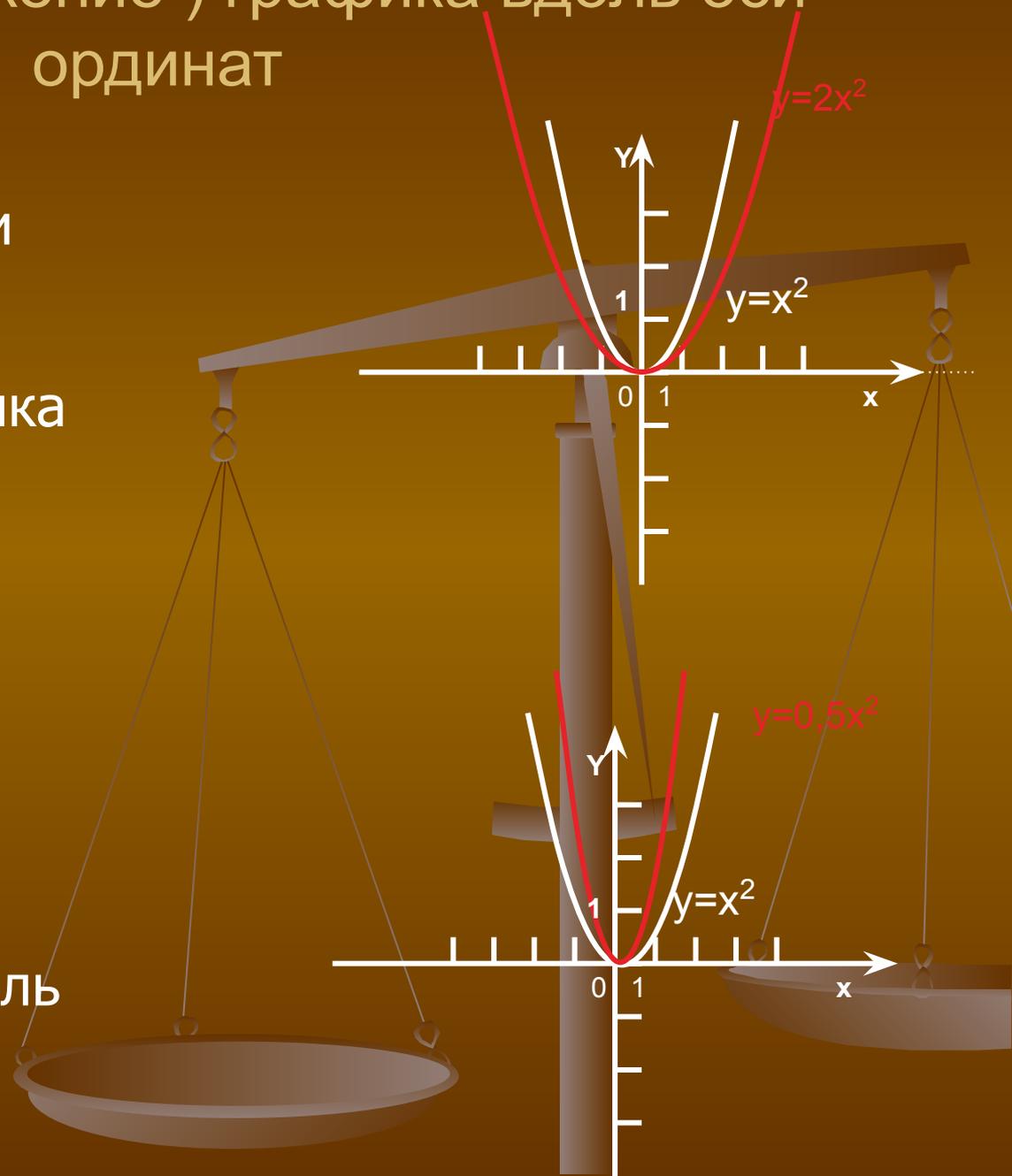


4. Симметричное преобразование относительно оси x



Сжатие (растяжение) графика вдоль оси ординат

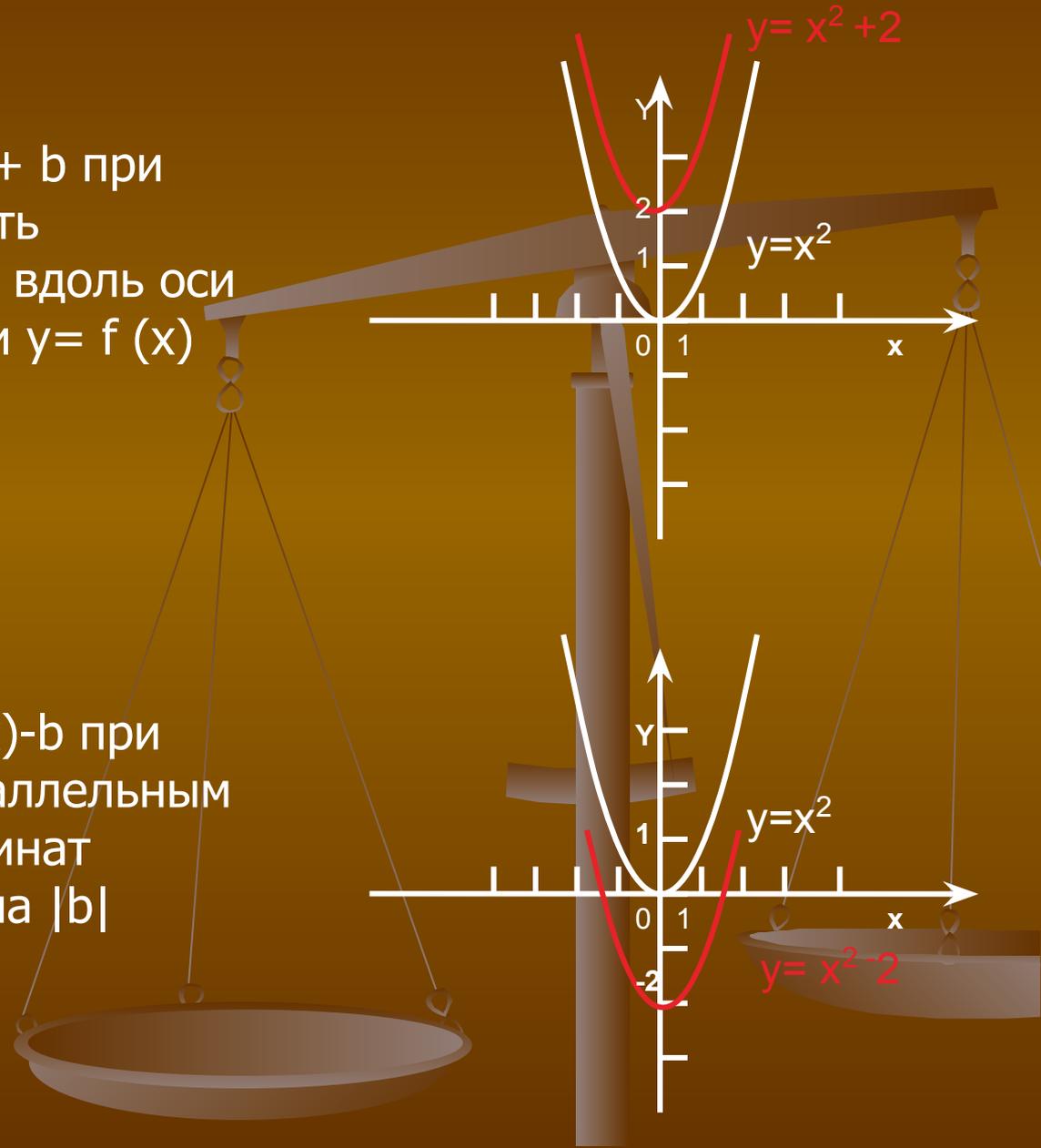
- График функции $y = b f(x)$ при $b > 1$ можно получить растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат
- График функции $y = b f(x)$ при $0 < b < 1$ можно получить сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат



Перенос вдоль оси ординат

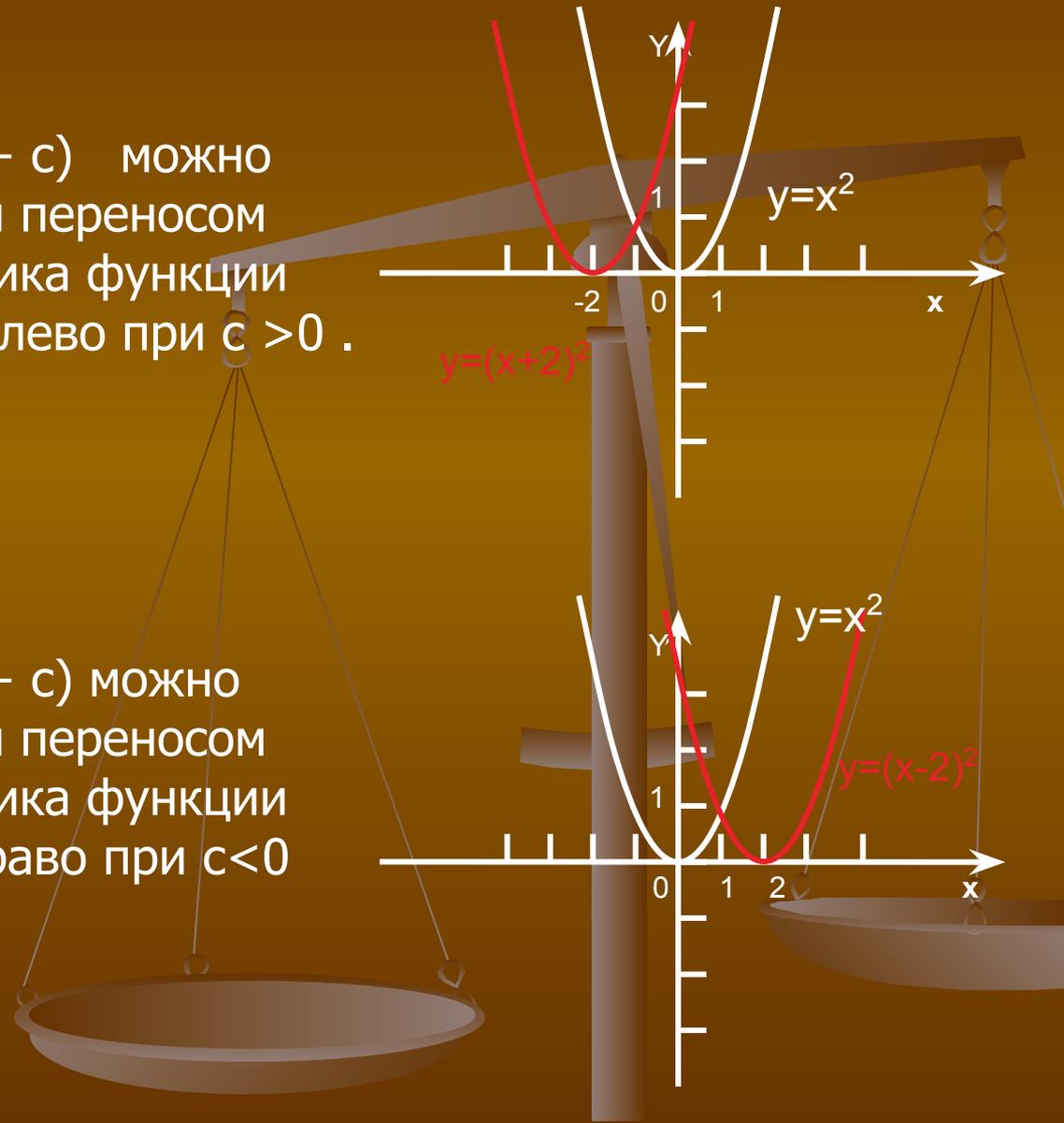
- График функции $y = f(x) + b$ при $b > 0$ можно получить параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции $y = f(x)$ на $|b|$ единиц вверх.

- График функции $y = f(x) - b$ при $b > 0$ можно получить параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции $y = f(x)$ на $|b|$ единиц вниз



Перенос вдоль оси абсцисс

-
- График функции $y=f(x+c)$ можно получить параллельным переносом вдоль оси абсцисс графика функции $y=f(x)$ на $|c|$ единиц влево при $c > 0$.
- График функции $y=f(x+c)$ можно получить параллельным переносом вдоль оси абсцисс графика функции $y=f(x)$ на $|c|$ единиц вправо при $c < 0$



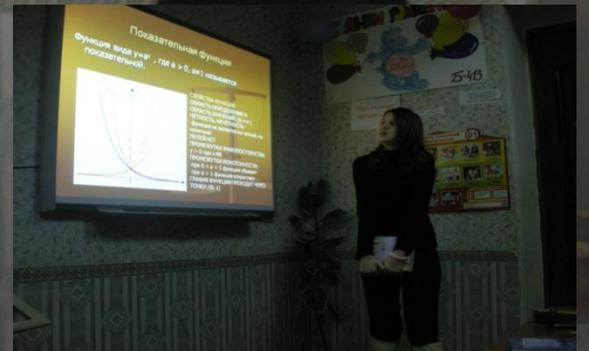
Симметрия относительно оси абсцисс

Чтобы построить график функции $y = -f(x)$:

1. Строим график функции $y = f(x)$
2. Отражаем его симметрично относительно оси абсцисс.



ФОТО ОТЧЕТ





Над презентацией старались:
Мухаметшина Регина
Насырова Эльвира
Собагатовая Лейля



*Спасибо
за внимание!*

