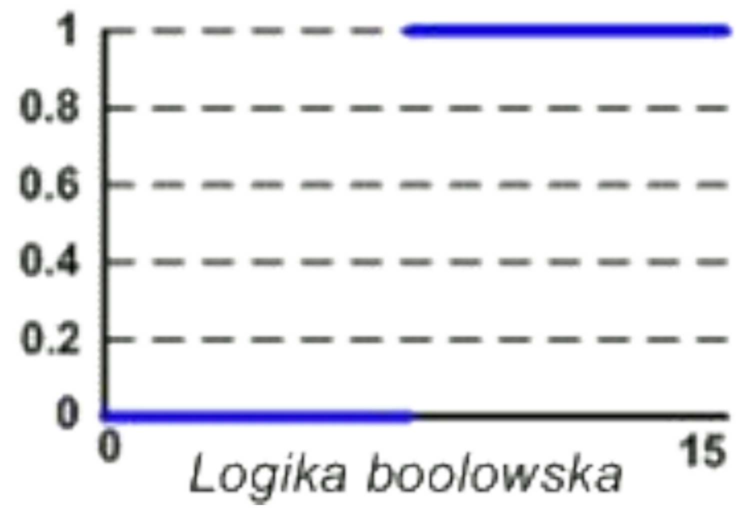
Logika rozmyta

Została rozwinięta przez Lotfi A. Zadeh w latach 60 ubiegłego wieku w celu zapewnienia matematycznych zasad i funkcji które były by podobne do ludzkiego języka

Logika rozmyta

Logika rozmyta wprowadza obliczoną wartość średnią między absolutną prawdą i absolutnym fałszem z rezultatem spomiędzy zakresu 0,0 i 1,0. Wprowadza ona odcienie szarości między czarny/biały i prawdę/fałsz.

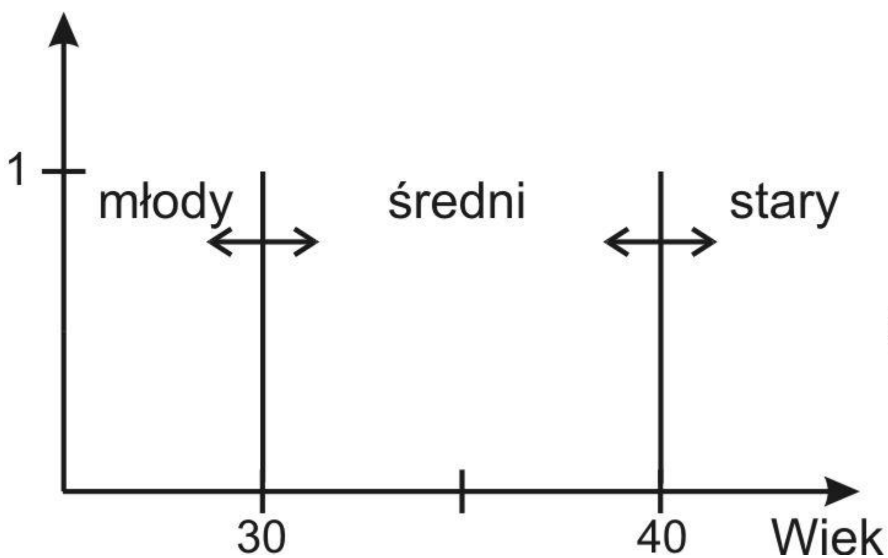
Logika rozmyta a logika boolowska



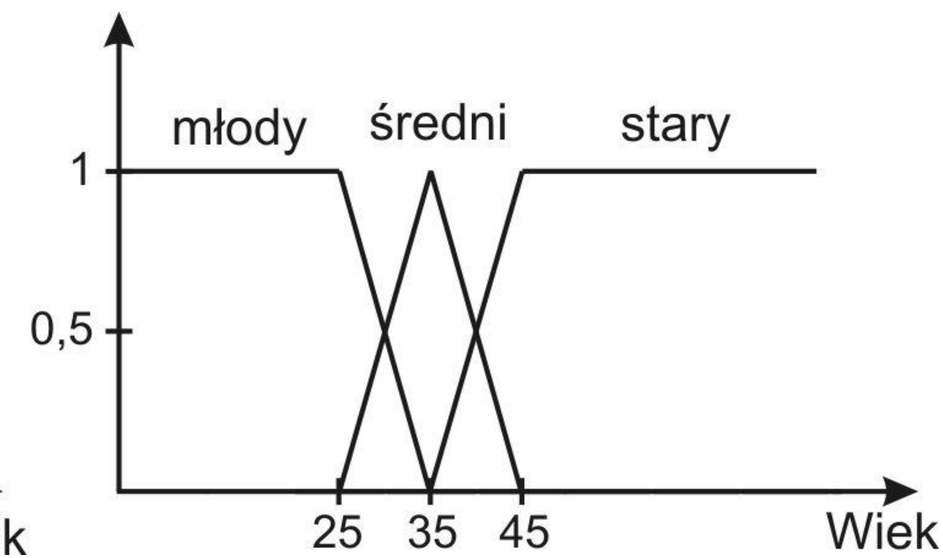
Logika rozmyta a logika boolowska

Przykład: wiek ludzi

Logika boolowska



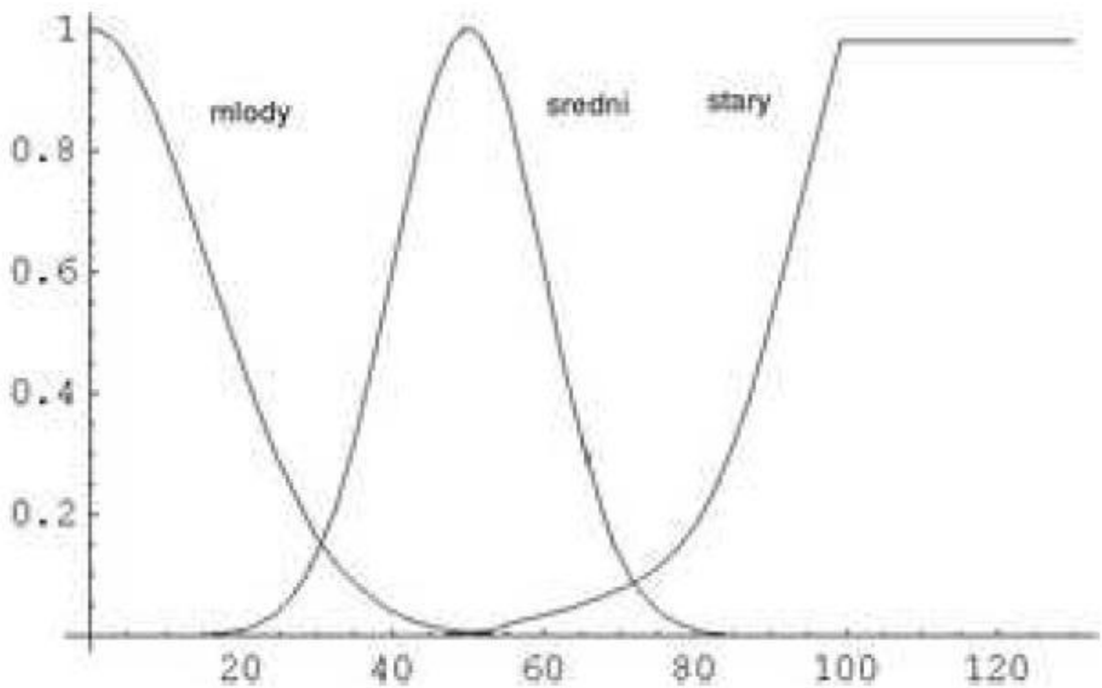
Logika rozmyta



Zmienna lingwistyczna

Zmienna lingwistyczna jest czwórką (*N;T;X;MN*)*, gdzie*

- *N nazwa zmiennej np. wiek*
- *T zbiór wartości lingwistycznych np. {młody, średni, stary}*
- *X przestrzeń rozważań np.* [0*;* 125] *lat*
- *MN funkcja semantyczna MN* : *T* → *zbiór funkcji przynależności*



Zbiory rozmyte

1. Należy ustalić obszar rozważań X nazywany przestrzenią – zakres zmian rozważanych wielkości

Zbiorem rozmytym A w pewnej (niepustej) przestrzeni X nazywamy zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x); x \in X)$$

w którym

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

Zbiory rozmyte – zapis symboliczny

$$\mathrm{A} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

Elementami zbioru X mogą być nie tylko liczby, ale również inne przedmioty, osoby lub pojęcia. Zapis ten ma charakter symboliczny. Kreska ułamkowa nie oznacza dzielenia a przyporządkowanie poszczególnym elementom zbioru stopni przynależności. Podobnie znak „+” nie oznacza dodawania, a sumę mnogościową elementów.

Zbiory rozmyte

Funkcja przynależności każdemu elementowi x przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A, przy czym można wyróżnić 3 przypadki:

$\mu_A(x) = 1$ oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A

$\mu_A(x) = 0$ oznacza brak przynależności elementu x do zbioru rozmytego A

$0 < \mu_A(x) < 1$ oznacza częściową przynależność elementu x do zbioru rozmytego A

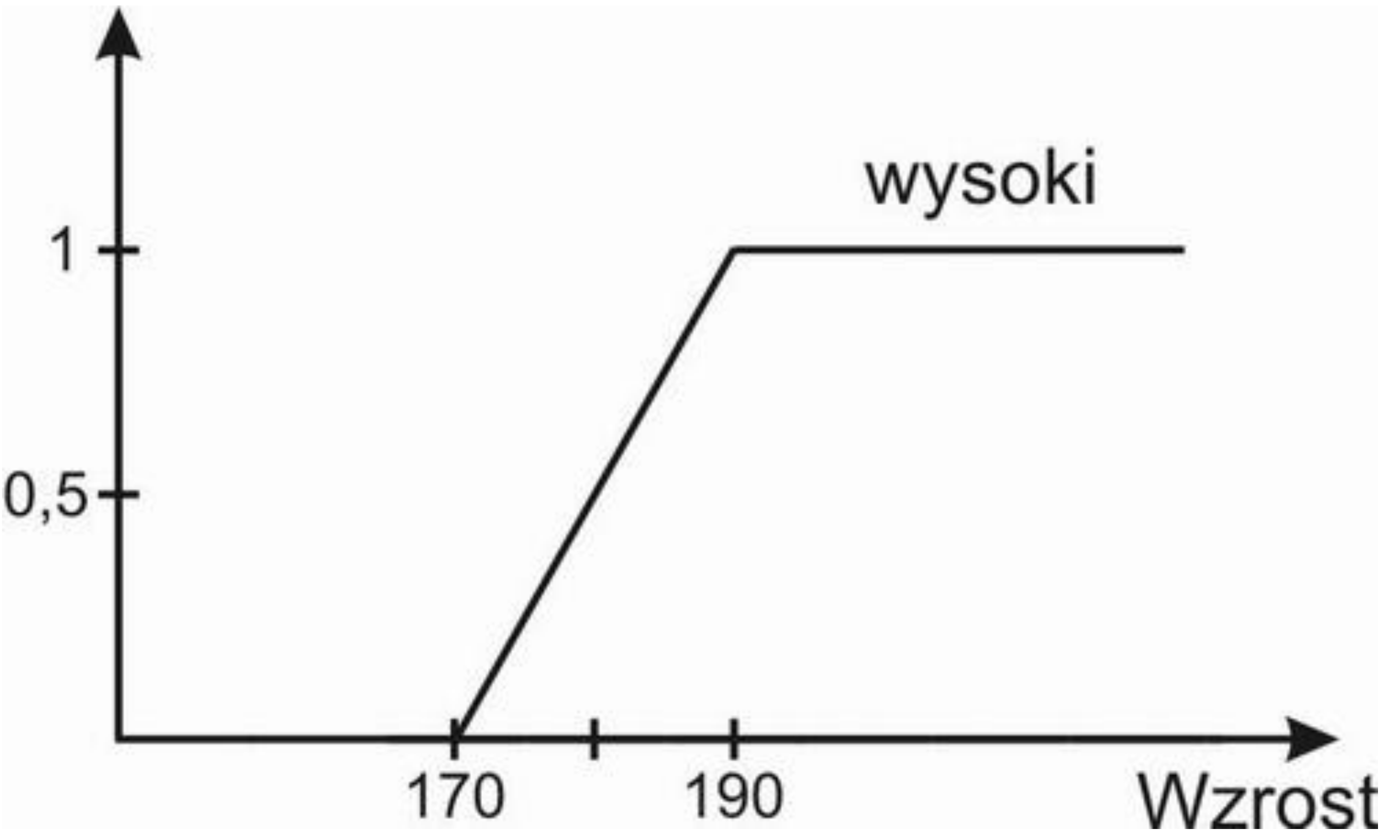
Zbiory rozmyte - przykład

Niech naszym zbiorem X będą osoby, a zbiorem rozmytym A osoby wysokie.
Funkcja przynależności:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy wzrost < 170 cm} \\ (x-170)/20 & \text{gdy 170 cm< wzrost < 190 cm} \\ 1 & \text{gdy wzrost > 190 cm} \end{cases}$$

Zbiory rozmyte - przykład

Funkcja przynależności:



Zbiory rozmyte - przykład

Zbiór A:

Osoba x	Wzrost	Stopień przynależności do A
Darek	193	1
Kamil	139	0
Zbyszek	128	0
Sławek	182	0,6
Karol	175	0,25
Mariusz	179	0,45
Jacek	187	0,85

Zbiory rozmyte - przykład

Zbiór A:
A={(Darek,1);(Kamil,0);(Zbyszek,0);(Sławek,0.6);(Karol;0.25);(Mariusz,0.45);(Jacek,0.85)}

$$A = \frac{1}{Darek} + \frac{0}{Kamil} + \frac{0}{Zbyszek} + \frac{0{,}6}{Slawek} + \frac{0{,}25}{Karol} + \frac{0{,}45}{Mariusz} + \frac{0{,}85}{Jacek}$$

Zbiory rozmyte - definicje

Wysokość zbioru rozmytego A oznaczamy przez h(A) i określamy jako:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

W przypadku zbiorów przeliczalnych jest to maximum funkcji przynależności.

Przykład:

Jeżeli X={1,2,3,4,5} oraz

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,7}{4}$$

to h(A)=0,7

Zbiory rozmyte - definicje

Normalnym nazywamy zbiór rozmyty wtedy i tylko wtedy, gdy h(A) = 1. Jeśli zbiór rozmyty A nie jest normalny, to możemy go znormalizować poprzez przekształcenie:

$$\mu_{A_{zn}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$$

gdzie h(A) jest wysokością tego zbioru.

Przykład:
Zbiór rozmyty: $A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{6}$

Po znormalizowaniu przybiera postać: $A_{zn} = \frac{0,2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0,6}{6}$

Zbiory rozmyte - definicje

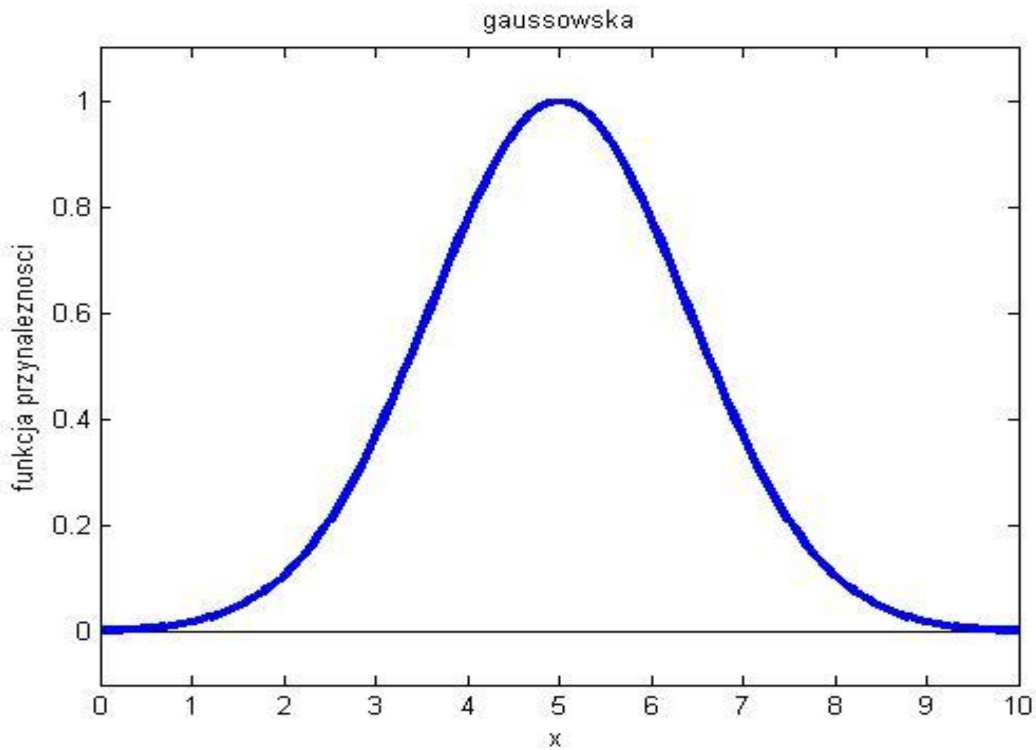
Zbiór rozmyty A jest ***równy*** zbiorowi rozmytemu B, co zapisujemy A = B, wtedy i tylko wtedy, gdy: $\boldsymbol{\mu_A(x) = \mu_B(x)}$ dla każdego $x \in X$.

Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja Gausowska

$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$

gdzie $\bar{x}$ jest środkiem, aδ określa szerokość krzywej gausowskiej.

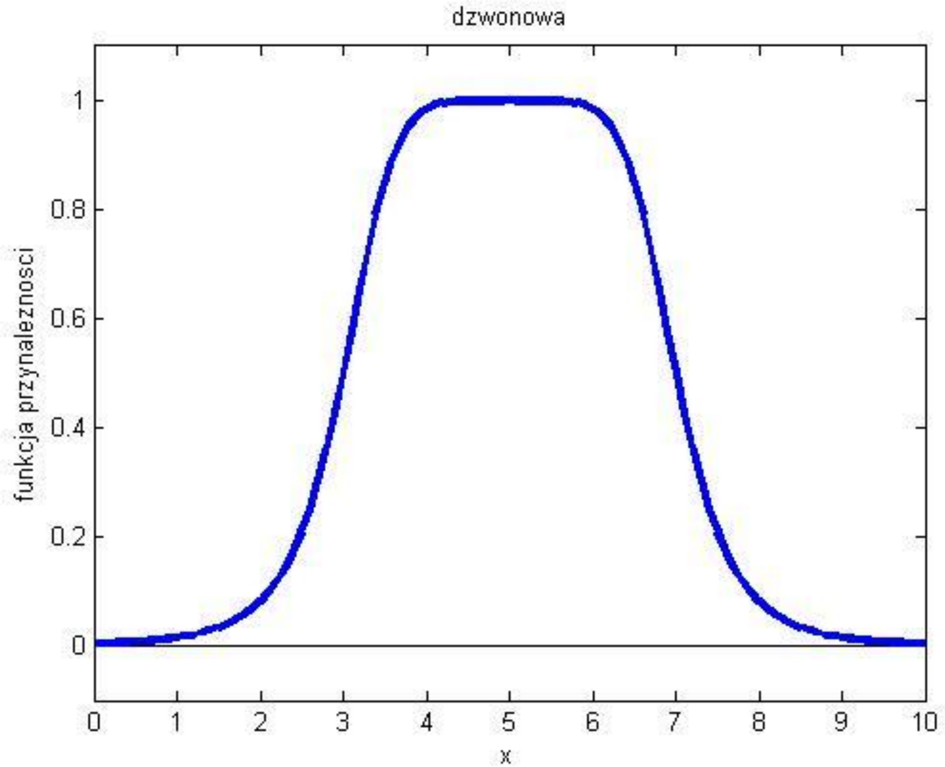


Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja przynależności typu dzwonowego

$$\mu(x,a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

gdzie parametry a, b, c określają wygląd funkcji. ***a*** określa szerokość, ***b*** nachylenie, ***c*** środek

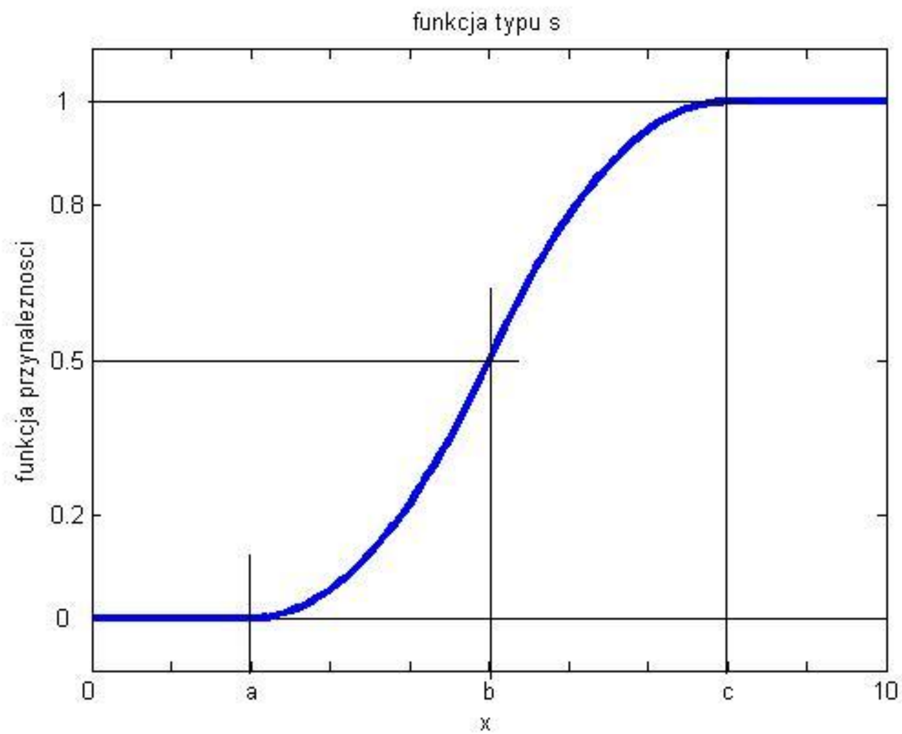


Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja przynależności klasy s

$$s(x,a,b,c)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{dla } a < x \le b \\ 1-2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{dla } b < x \le c \\ 1 & \text{dla } x > c \end{cases}$$

gdzie *b=(a+c)/2*
Wykres tej funkcji przypomina literę s, stąd jej nazwa. Jej kształt zależy od parametrów a, b, c i w punkcie *x* = *b* funkcja przyjmuje wartość 0,5.



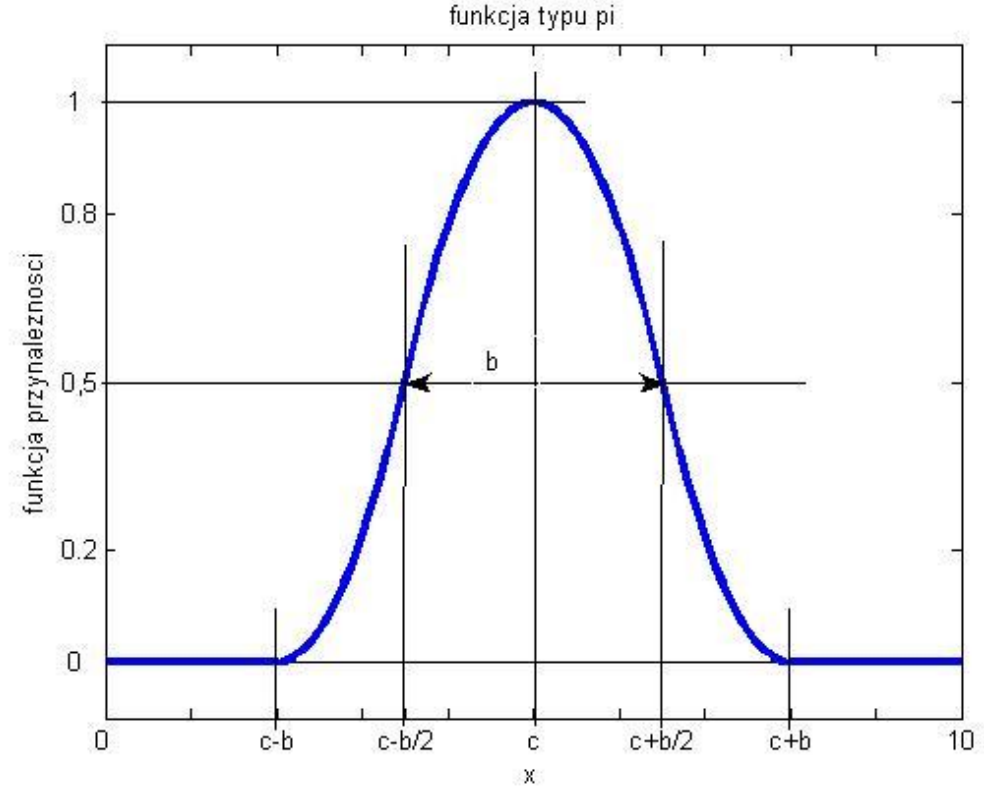
Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja przynależności klasy π

Tą funkcję przynależności definiuje się poprzez funkcję klasy s:

$$\pi(x,b,c) = \begin{cases} s(x, c-b, c-\frac{b}{2}, c) & dla\, x \le c \\ 1 - s(x, c, c+\frac{b}{2}, c+b) & dla\, x > c \end{cases}$$

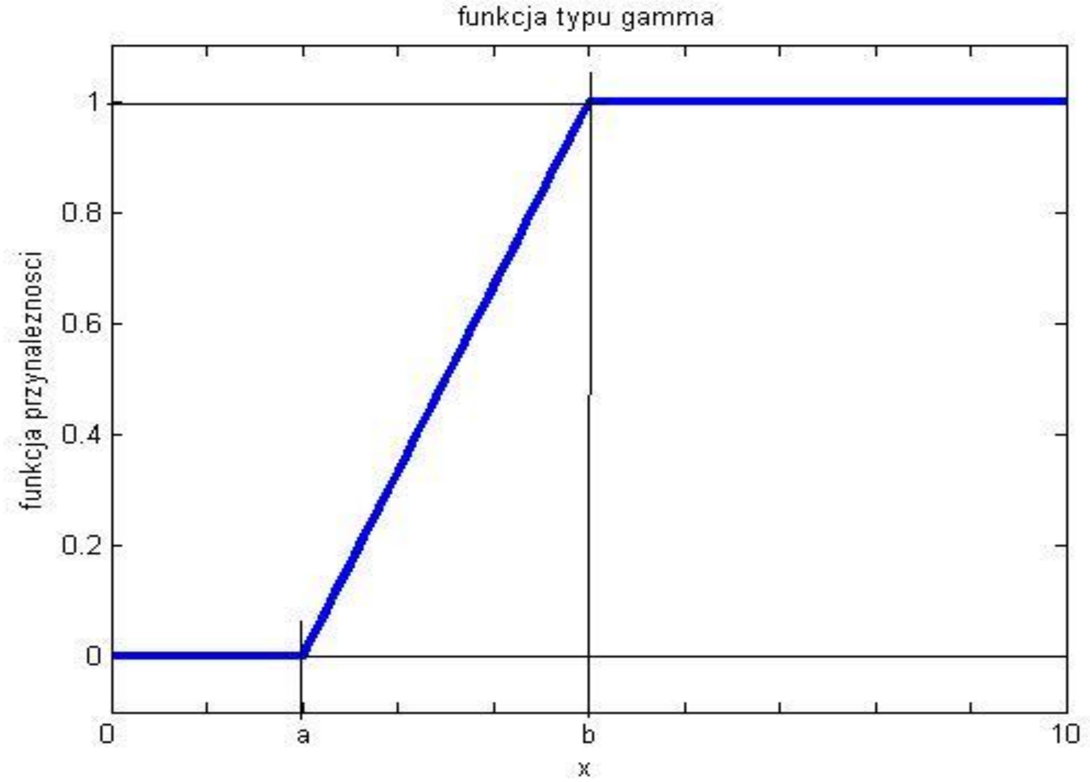
Funkcja ta przyjmuje wartości zerowe dla $x \ge c+b$ oraz $x \le c - b$, natomiast w punktach $x = c \pm b/2$ jej wartość wynosi 0,5



Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja przynależności klasy γ

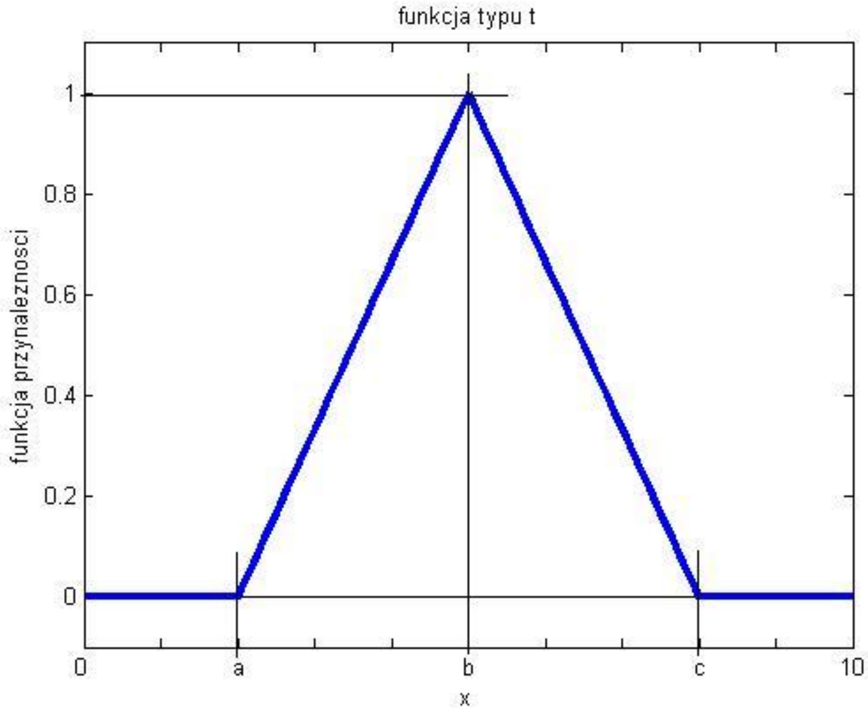
$$\gamma(x,a,b) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \le b \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases}$$



Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja przynależności klasy t

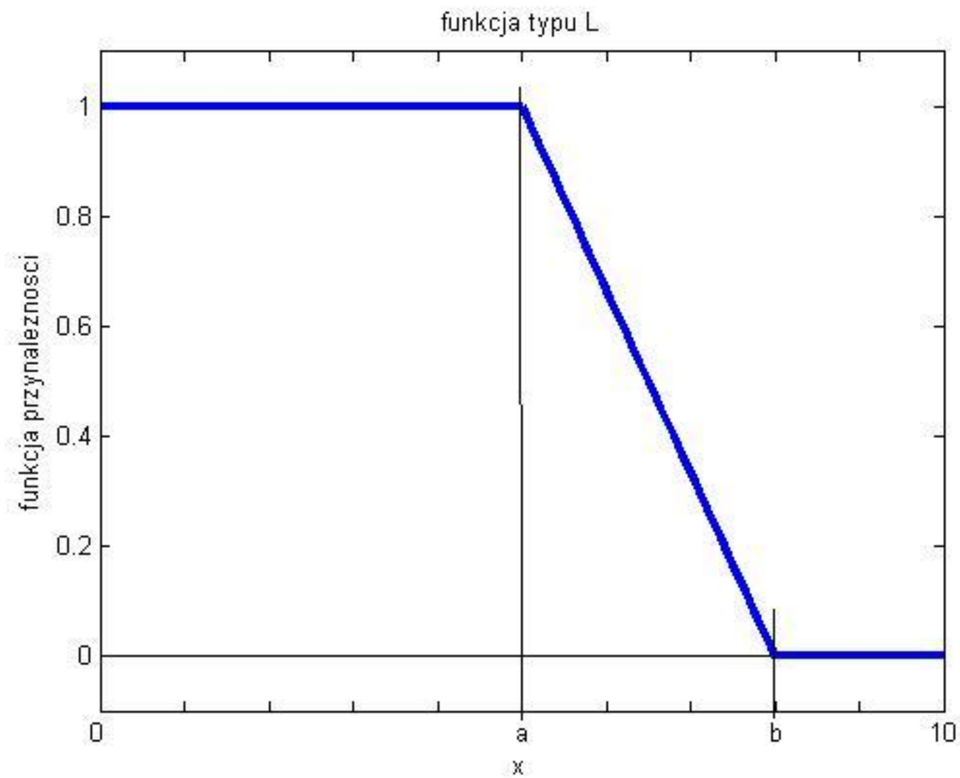
$$t(x,a,b,c)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{dla } b < x \le c \\ 0 & \text{dla } x > c \end{cases}$$



Jednowymiarowe funkcje przynależności

Funkcja przynależności klasy L

$$L(x,a,b)=\begin{cases}1 & \text{dla}\, x \le a \\ \dfrac{b-x}{b-a} & \text{dla}\, a < x \le b \\ 0 & \text{dla}\, x > b\end{cases}$$



Operacje na zbiorach rozmytych

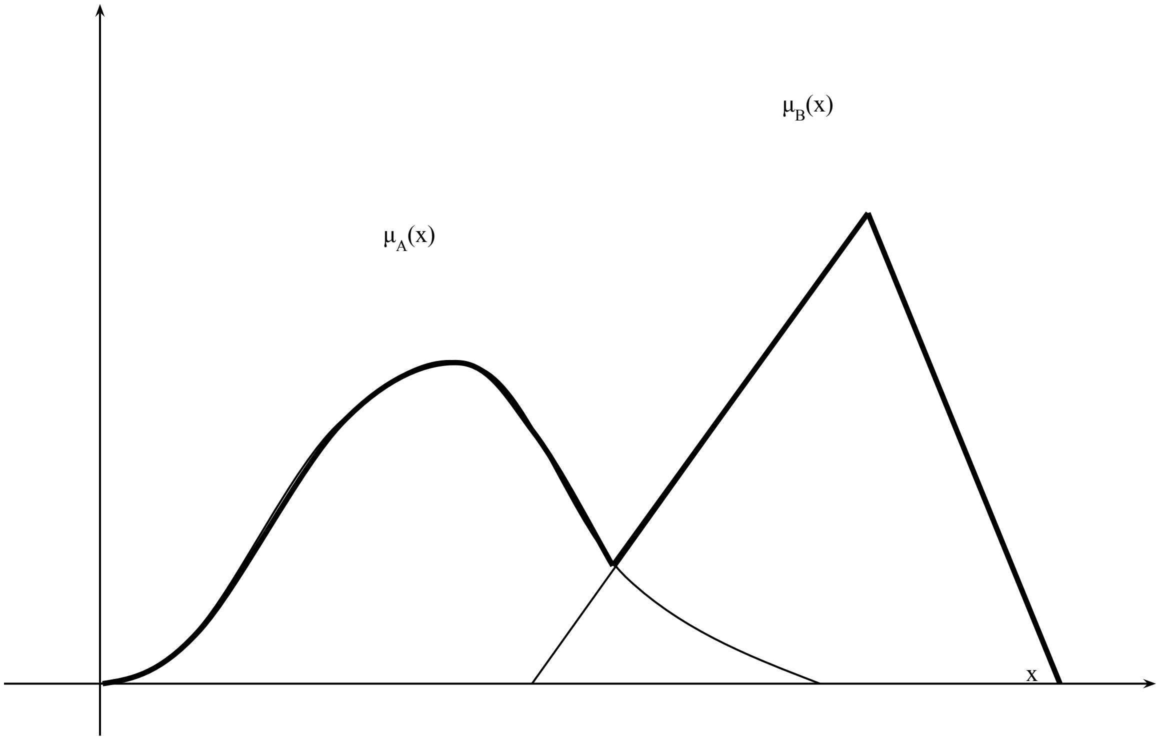
Sumą zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty $A \cup B$ określony funkcją przynależności:

$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ dla każdego $x \in X$.

Suma większej ilości zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ określona jest podobną funkcją przynależności:

$\mu_{A1 \cup A2 \cup A3 \ldots \cup An}(x) = \max(\mu_{A1}(x), \mu_{A2}(x), \mu_{A3}(x), \ldots, \mu_{An}(x))$ dla każdego $x \in X$.

Operacje na zbiorach rozmytych



Operacje na zbiorach rozmytych

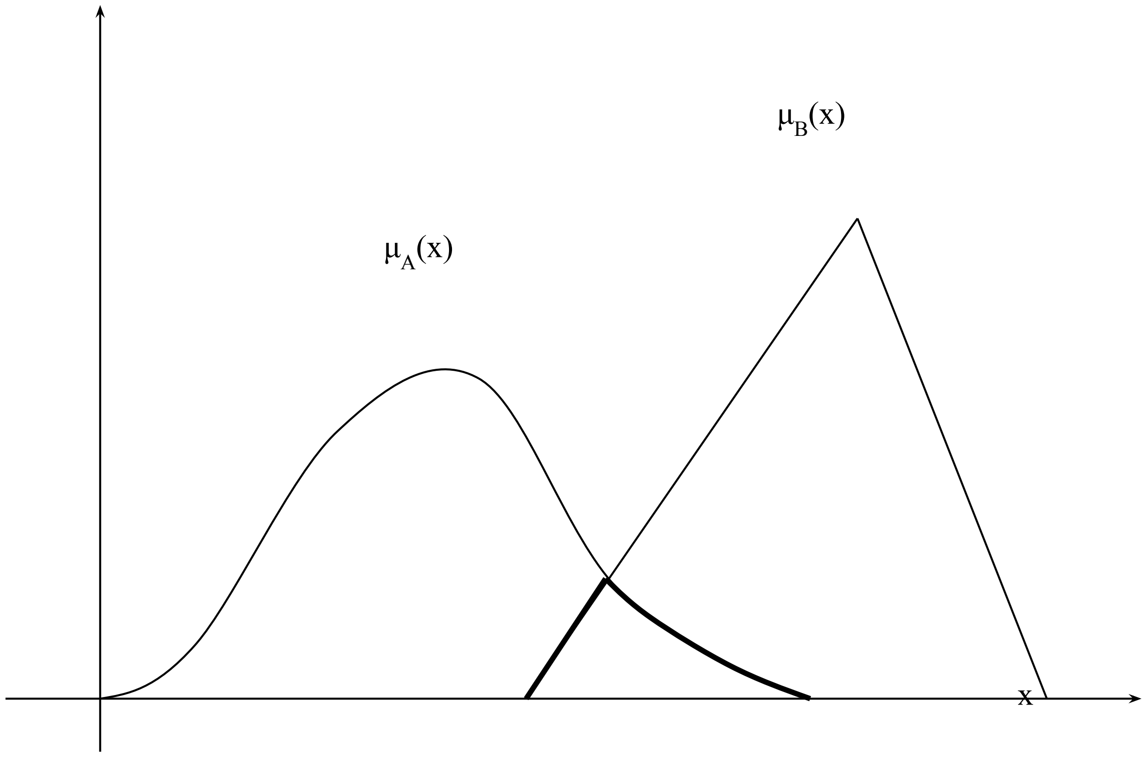
Przecięciem zbiorów rozmytych A, B $\subseteq$ X jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności:

$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
dla każdego $x \in X$.

Przecięcie większej ilości zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ określone jest podobną funkcją przynależności:

$\mu_{A1 \cap A2 \cap A3 \ldots \cap An}(x) = \min(\mu_{A1}(x), \mu_{A2}(x), \mu_{A3}(x), \ldots, \mu_{An}(x))$
dla każdego $x \in X$.

Operacje na zbiorach rozmytych



Operacje na zbiorach rozmytych

Dopełnieniem zbioru rozmytego A $\subseteq$ X jest zbiór rozmyty A’ o funkcji przynależności:

$\mu_{A'}(x) = 1-\mu_A(x)$
dla każdego x $\in$ X.