Геометрические характеристики плоских сечений

Задача 4

Для заданного поперечного сечения, состоящего из полосы швеллера и равнобокого уголка, или из полосы, двутавра и равнобокого уголка, или из полосы, швеллера и двутавра, требуется:

1) определить положение центра тяжести;

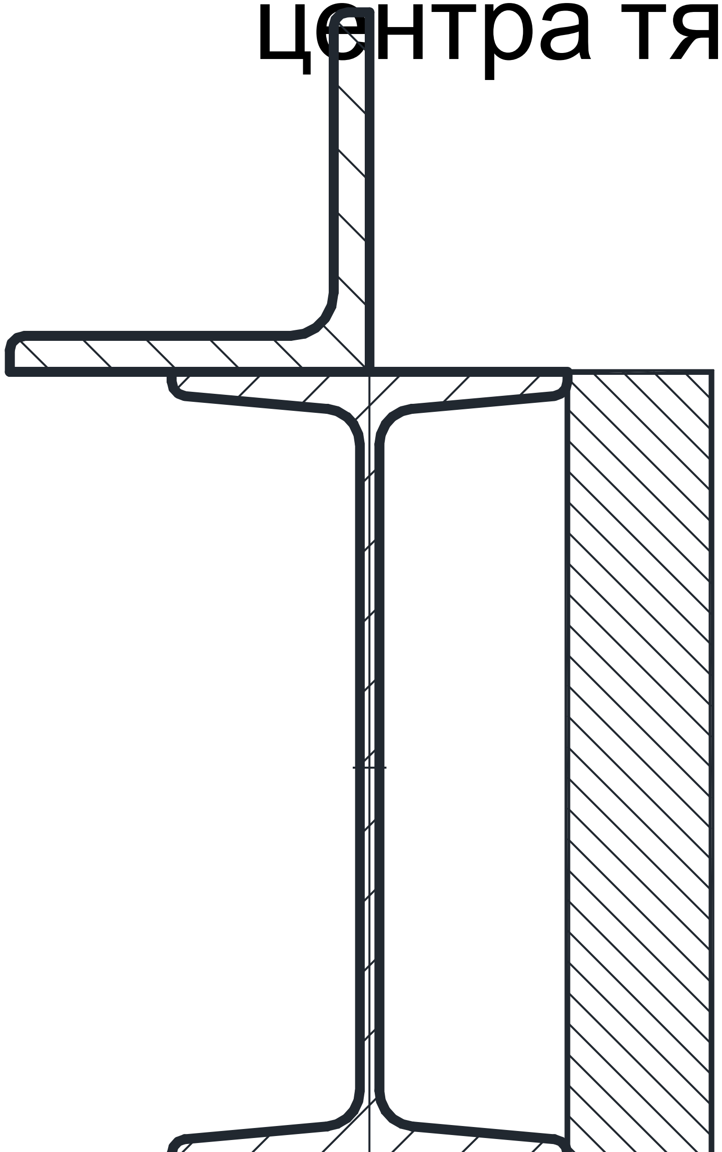
2) найти осевые (экваториальные) и центробежный моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести (x_c и y_c);

3) определить направление главных центральных осей *(1* и *2*);

4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;

5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

1) Определение положения центра тяжести сечения.



- Двутавр 22
- Уголок 100х10
- Полоса 4 см

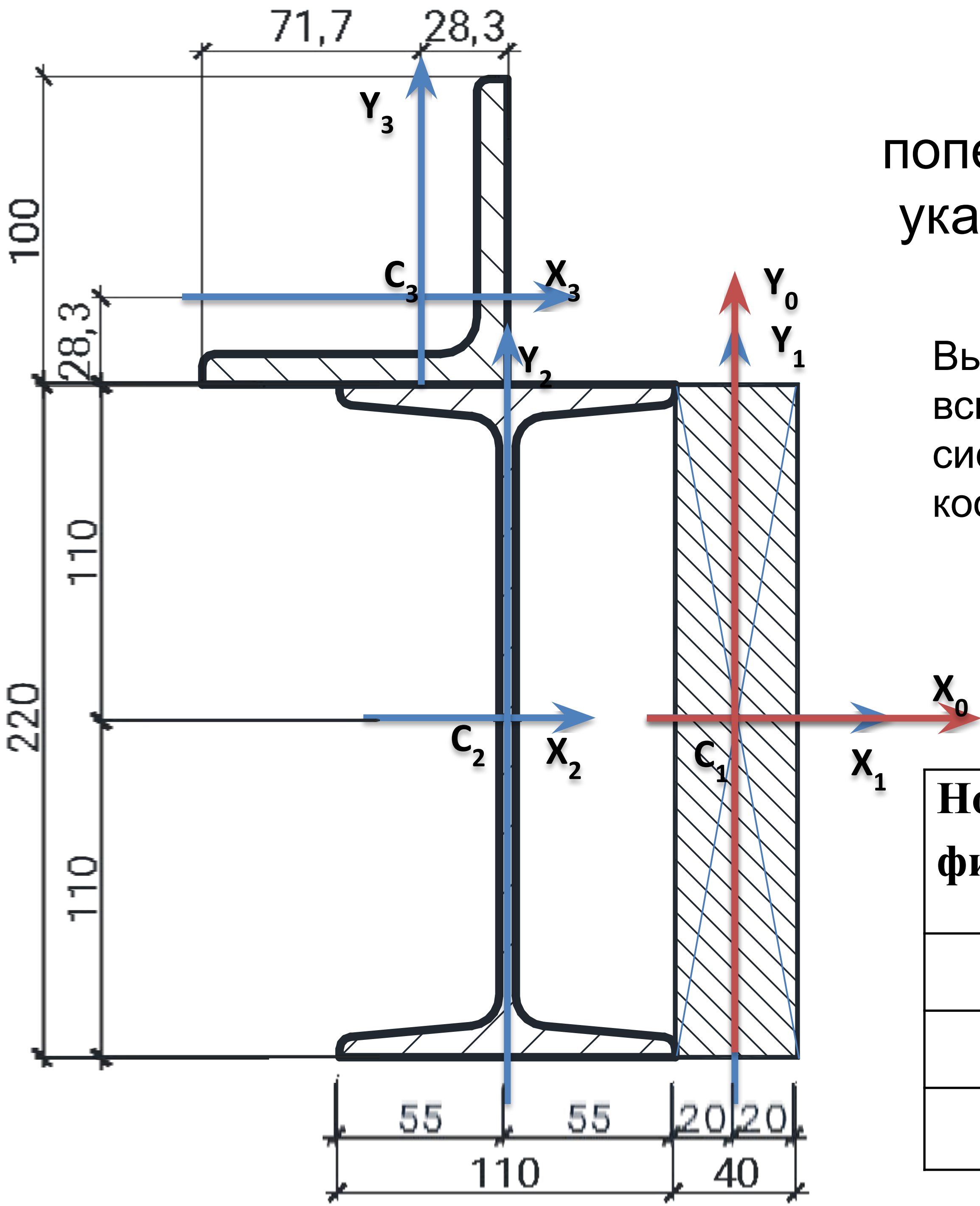
Выписываем из сортамента прокатных профилей необходимые характеристики и записываем их в таблицу

Номер фигуры	№ профиля	F, $см^2$	J_x, $см^4$	J_y, $см^4$	Y_c, см	X_c, см
1	-220x40	88	3549,33	117,333	0	0
2	I 22	30,6	2550	157	0	-7,5
3	L100x10	19,24	178,95	178,95	13,83	-10,33

$$F_1 = b_1 \cdot h_1 = 4 \cdot 22 = 88 см^2$$

$$J_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{4 \cdot 22^3}{12} = 3549{,}33 см^4$$

$$J_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = \frac{22 \cdot 4^3}{12} = 117{,}33 см^4$$



В масштабе вычерчиваем поперечное сечение с указанием основных размеров

Выберем вспомогательную систему координат

Номер фигуры	Y_c, см	X_c, см
1	0	0
2	0	-7,5
3	13,83	-10,33

Центр тяжести поперечного сечения

$$\boldsymbol{x_c} = \frac{\sum \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{y_i^0}}}{\sum \boldsymbol{F_i}} = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

$$= \frac{88 \cdot 0 + 30{,}6 \cdot (-7{,}5) + 19{,}24 \cdot (-10{,}33)}{88 + 30{,}6 + 19{,}24} = -\mathbf{3{,}1069}\ \text{см}$$

$$\boldsymbol{y_c} = \frac{\sum \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{x_i^0}}}{\sum \boldsymbol{F_i}} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

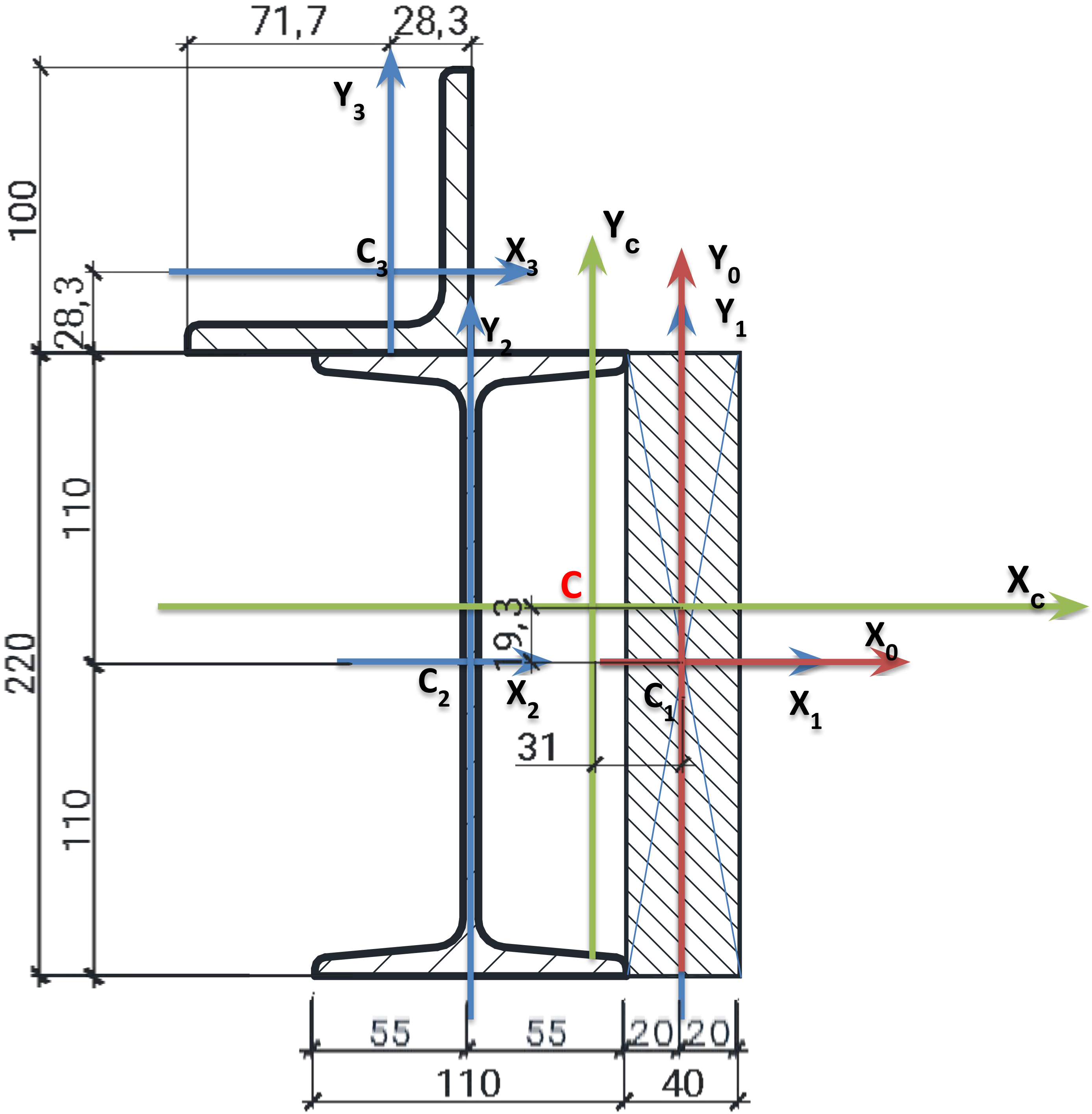
$$= \frac{88 \cdot 0 + 30{,}6 \cdot 0 + 19{,}24 \cdot 13{,}83}{88 + 30{,}6 + 19{,}24} = \mathbf{1{,}9304}\ \text{см}$$

2) Определим положение центра тяжести каждого из профилей относительно центральных осей.

- ai= Yi-Yc
- $a_1 = 0 - 1{,}9304 = -1{,}9304\text{см}$
- $a_2 = 0 - 1{,}9304 = -1{,}9304\text{см}$
- $a_3 = 13{,}83 - 1{,}9304 = 11{,}8996\text{см}$
- **Sx=88· (-1,93)+30,6· (-1,93)+19,24· (11,9)=0**

- bi= xi – xc
- $b_1 = 0 - (-3{,}1069) = 3{,}1069\text{см}$
- $b_2 = -7{,}5 - (-3{,}1069) = -4{,}3931\text{см}$
- $b_3 = -10{,}33 - (-3{,}1069) = -7{,}2231\text{см}$
- **Sy=88· (3,107)+30,6· (-4,393)+19,24· (-7,223)=0**

Показываем центральные оси на чертеже.



71,7
28,3
100
28,3
Y3
C3
X3
Yc
Y0
Y1
Y2
110
220
C
Xc
19,3
X0
C2
X2
C1
X1
31
110
55
55
20
20
110
40

3) Определим осевые и центробежный моменты инерции

$$J_x = \sum_{i=1}^{3}\left(J_{xi} + F_i \cdot a_i^2\right) = 3549{,}3333 + (-1{,}9304)^2 \cdot 88 +$$

$$+2550 + (-1{,}9304)^2 \cdot 30{,}6 +$$

$$+178{,}95 + (11{,}8996)^2 \cdot 19{,}24 = 9444{,}6328(\text{см}^4)$$

$$J_y = \sum_{i=1}^{3}\left(J_{yi} + F_i \cdot b_i^2\right) = 117{,}3333 + (3{,}1069)^2 \cdot 88 + 157 +$$

$$+(-4{,}3931)^2 \cdot 30{,}6 + 178{,}95 + (-7{,}2231)^2 \cdot 19{,}24 =$$

$$= 2897{,}1034\ (\text{см}^4)$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\left(J_{xyi} + F_i \cdot a_i \cdot b_i\right) = 0 + (-1{,}9304) \cdot 3{,}1069 \cdot 88 +$$

$$+0 + (-1{,}9304) \cdot (-4{,}3931) \cdot 30{,}6 +$$

$$+104{,}87 + 11{,}8996 \cdot (-7{,}2231) \cdot 19{,}24 = -1812{,}0(\text{см}^4)$$

$$J_{xy}^{L} = \pm\frac{J_{max}^{L} - J_{min}^{L}}{2} = \frac{283.83 - 74.08}{2} = 104.87\left(\text{см}^4\right)$$

4) Определим направление главных центральных осей (*1* и *2*):

$$tg2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot (-1817{,}12)}{2897{,}1034 - 9444{,}6328} = 0{,}555$$

$2\alpha_0 = 29{,}03^\circ$; $\alpha_0 = 14{,}5^\circ$

Угол α_0 определяет положение той из главных осей, которая ближе к оси x_c.

Т.к. $J_y < J_x$ (2897,1034< 9444,6328), то этой осью является ось $1_{макс}$.

5) Найдем моменты инерции относительно главных центральных осей.

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{9444{,}6328 + 2897{,}1034}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(2897{,}1034 - 9444{,}6328)^2 + 4 \cdot (-1817{,}12)^2} =$$

$$= 6170{,}8681 \pm 3741{,}775$$

J_1 = 6170,8681+3741,775=9912,6432 см^4

J_2 =6170,8681 – 3741,775=2429,093 см^4

6) Определяем положение главных центральных осей (α_1, α_2)

$$tg\alpha_{1,2} = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{1,2}}$$

$$tg\alpha_1 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_1} = \frac{-1817,12}{2897,1034 - 9912,6} = 0,259$$

$$arctg\alpha_1 = arctg(0,259) = 14,5°$$

$$tg\alpha_2 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_2} = \frac{-1817,12}{2897,1034 - 2429,093} = -3,86$$

$$arctg\alpha_2 = arctg(-3,86) = 75,5°$$

7) Выполним необходимые проверки

7.1. Инвариантность моментов инерции

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_1 + J_2$$

9444,633 + 2897,103= 9912,643 + 2429,093

12341,736 = 12341,736

7.2. Экстремальность моментов инерции

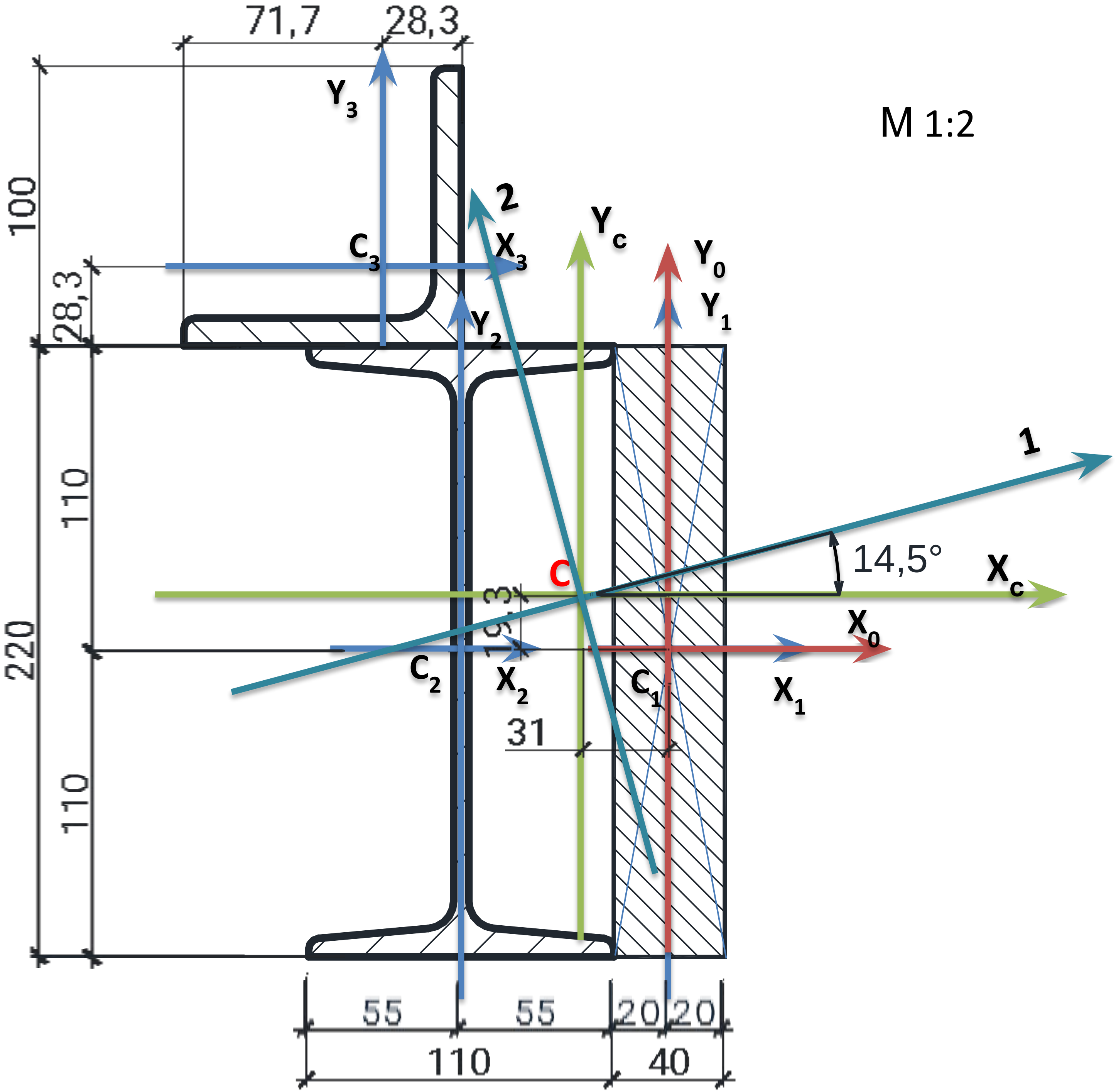
$$J_1 > J_{x_c} > J_{y_c} > J_2$$

$$9912{,}643 > 9444{,}633 > 2897{,}103 > 2429{,}093$$

7.3. Перпендикулярность главных осей

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = \pi/2$$

$$\mathbf{14{,}5^\circ + 75{,}5^\circ = 90^\circ}$$



M 1:2
71,7
28,3
100
28,3
220
110
110
Y3
C3
X3
2
Yc
Y0
Y1
Y2
1
14,5°
Xc
C
19,3
X0
C2
X2
C1
X1
31
55
55
20
20
110
40