Лекция 11

Вычитание, умножение и деление рациональных чисел

Вычитание рациональных чисел

- Определение: разностью чисел a и b называется число c при условии: a-b=c тогда и только тогда, когда a=b+c.

- Разность положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда b<a.

- Если разность существует, то она единственна.
- Компоненты вычитания – уменьшаемое, вычитаемое, разность.

Правило вычитания рациональных чисел

- Пусть рациональное число a

представлено дробью $\frac{m}{n}$,

а число b – дробью $\frac{p}{n}$, то

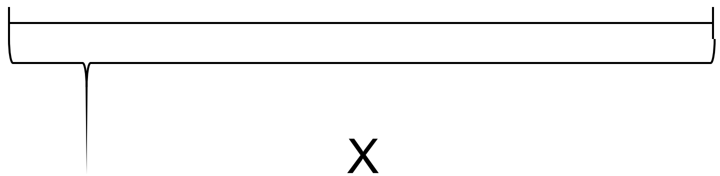
$$a - b = \frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m - p}{n}$$

При условии, что m>p

Умножение рациональных чисел

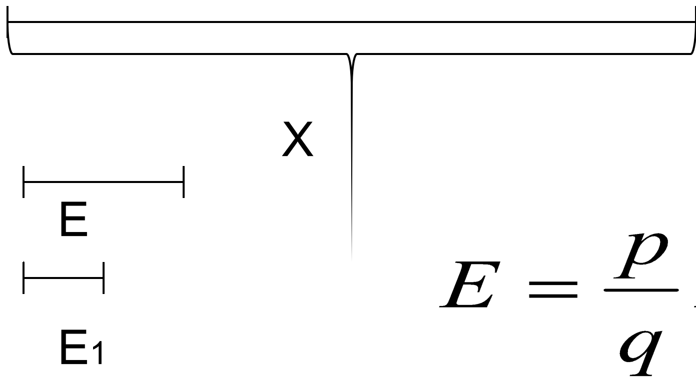
- Умножение рациональных чисел можно проиллюстрировать на примере измерения отрезка разными единицами измерения.

Пусть величина x измерена с помощью единицы



измерения E. $X = \frac{m}{n} E$ или $n \cdot X = m \cdot E$

Изменим единицу измерения E на E1



$$E = \frac{p}{q} E_1 \qquad q \cdot E = p \cdot E_1$$

$$n \cdot X = m \cdot E \quad \Big| \cdot q$$

$$q \cdot E = p \cdot E_1 \quad \Big| \cdot m$$

После преобразований имеем:

$$(n \cdot q) \cdot X = (m \cdot q) \cdot E = (m \cdot p) \cdot E_1$$

- Значит, длина отрезка X при единице

длины E_1 выражается дробью $\dfrac{m \cdot p}{n \cdot q}$

Значит, $\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{m \cdot p}{n \cdot q}$

- Определение: если положительное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, a

положительное число b- дробью $\frac{p}{q}$, то

их произведением называется число a·b, которое представляется дробью $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$

- По определению,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Чтобы умножить дробь на дробь нужно перемножить числители и результат записать в числитель, и перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель.

Свойства операции умножения

- 1. Умножение положительных рациональных чисел коммутативно

$$(\forall a, b \in Q_+) a \cdot b = b \cdot a$$

- 2. Умножение положительных рациональных чисел ассоциативно.

$$\left(\forall a,b,c\in Q_{+}\right)\left(a\cdot b\right)\cdot c=a\cdot\left(b\cdot c\right)$$

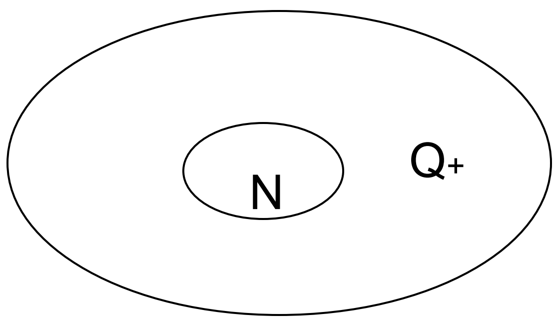
- Деление положительных рациональных чисел определяется как операция обратная умножению.
- a:b=c тогда и только тогда, когда a=b·c

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$$

Чтобы разделить дробь на дробь нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Множество положительных рациональных чисел как расширение множества натуральных чисел

- Условие 1. Существование отношения включения между N и Q_+



- Условие 2. Согласованность операций.

- Результаты арифметических действий, произведенных по правилам, существующим для натуральных чисел, должны совпадать с результатами действий над ними, но выполненными по правилам, сформулированным для положительных рациональных чисел.

- Условие 3.

На множестве Q_+ операция деления стала выполнимой для любых рациональных положительных чисел.

Замечания.

- 1.Дробная черта в записи положительных рациональных чисел можно рассматривать как знак деления.

- 2. Любую неправильную дробь можно представить либо в виде натурального числа, либо в виде смешанного числа.

- 3. Сумму натурального числа и правильной дроби принято записывать без знака сложения.

$$3+\frac{2}{5}=3\frac{2}{5}$$

- 4. Всякое смешанное число можно записывать в виде неправильной дроби.

$$4\frac{5}{7} = 4 + \frac{5}{7} = \frac{4 \cdot 7}{7} + \frac{5}{7} = \frac{28 + 5}{7} = \frac{33}{7}$$

Представление рациональных чисел в виде десятичной дроби

Запись положительных рациональных чисел в виде десятичной дроби

- Определение: десятичной называется
- дробь вида $\frac{m}{10^n}$

где m и n – натуральные числа.

Например, 3,25 или 0,124

- Пусть дана дробь $\frac{m}{10^n}$, где m и n – натуральные числа

Представим ее числитель в виде:

$$m = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_0$$

$$\frac{m}{10^n} = \frac{a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_n \cdot 10^n + \ldots + a_0}{10^n} =$$

$$= \underbrace{a_k \cdot 10^{k-n} + a_{k-1} \cdot 10^{k-n-1} + \ldots + a_n}_{\text{Целая часть числа}} + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{10} + \frac{a_{n-2}}{10^2} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}}_{\text{Дробная часть числа}}$$

- Следовательно дробь $\frac{m}{10^n}$ можно

представить в следующем виде $\overline{A, a_{n-1} \ldots a_0}$

Например: $$\frac{17}{10^3} = \frac{0017}{10^3} = 0{,}017$$

Сравнение десятичных дробей

- Сравнение десятичных дробей проводятся так же как и сравнение дробей с одинаковыми знаменателями.

- Заметим, что к любой десятичной дроби можно приписать справа любое число нулей и при этом получиться дробь равная данной.
- (такая процедура позволяет привести дроби к общему знаменателю)

Например:

- Сравнить 0,125 и 0,3.
- Уравняем количество знаков послезапятой. Имеем: 0,125 и 0,300
- Следовательно $0{,}125<0{,}300$

Арифметические действия с десятичными дробями

- Сложение десятичных дробей выполняется по правилу сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

- 0, 123+0, 25= 0,123+0,250=0,373

Процент

- Особое внимание уделяется дроби 0,01.
- 0, 01 – 1% (процент)
- Процент показывает отношение исследуемой величины к 100.

Например:

- 2% - учащихся имеют высший балл по математике.

- Это значит, что 2 человека из 100 обладают этим свойством.

Задача.

- Туристы прошли 60% маршрута. Им осталось пройти еще 8 км. Какова длина маршрута.

Решение.

- 100%-60%=40%
- 40% составляет 8км.
- 1% составит 8:40
- Весь путь 100%.
  8:40·100=800:40=20(км)

Задача

- Масса сплава олова и меди равна 12 кг.
- Меди в сплаве 36%. Какова масса олова в сплаве?

Решение.

- Процент содержания олова в сплаве составляет:
- 100-36=64%
- 12 кг – 100%
- Значит, 12: 100·64=12·0,64 =7,68 (кг)
- Ответ олова в сплаве 7, 68 кг.

Задача:

- Турист прошел в первый день $\frac{3}{8}$ всего маршрута, во второй день 40% остатка, после чего ему осталось пройти на 6,5 км больше, чем он прошел во второй день. Какова длина маршрута?

Решить самостоятельно!

Спасибо за внимание!