Обобщение признаков делимости

Лекция 7

2 курс

Признак делимости Паскаля

- Теорема: Натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

делится на натуральное число b тогда и только тогда, когда на b делится сумма

$$a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + a_{n-2} \cdot r_{n-2} + ... + a_1 \cdot r_1 + a_0, где r_i -$$

остатки от деления на b разрядных единиц

$$10, 10^2, ..., 10^n$$

Доказательство:

- Разделим на b каждую из разрядных единиц числа x, получим:

$$10 = b \cdot g_1 + r_1$$

$$10^2 = b \cdot g_2 + r_2$$

$$10^3 = b \cdot g_3 + r_3$$

$$- - - - - - - - -$$

$$10^{n-1} = b \cdot g_{n-1} + r_{n-1}$$

$$10^n = b \cdot g_n + r_n$$

- Преобразуем число x:

$$x = a_n \cdot \left(b \cdot g_n + r_n\right) + a_{n-1} \cdot \left(b \cdot g_{n-1} + r_{n-1}\right) + \ldots +$$
$$+ a_1 \cdot \left(b \cdot g_1 + r_1\right) + a_0 =$$

Применив дистрибутивный закон умножения относительно сложения и ассоциативный и коммутативный законы, можно преобразовать полученную сумму:

- На основании преобразований получаем:

$$=\left(a_n \cdot g_n + a_{n-1} \cdot g_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g_1\right) \cdot b +$$

$$+\underbrace{a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0}_{s}$$

Если s>b, то разделим s на b с остатком

- Получаем: $x = \left(a_n \cdot g_n + a_{n-1} \cdot g_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g_1\right) \cdot b + s$

Разделив s на b, $s = b \cdot g + r, \quad где \quad 0 \le r < b$

- После преобразований получаем:

$$x = \underbrace{\left(a_n \cdot g_n + a_{n-1} \cdot g_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g_1 + g\right)}_{Q} \cdot b + r$$

Короче, $x = Q \cdot b + r$

Сравните! $s = b \cdot g + r, \quad где \quad 0 \le r < b$

- Вывод:
- При делении натурального числа x на натуральное число b получается такой же остаток r, как и при делении суммы s на число b.
- Теорема доказана.

Применим признак делимости Паскаля для вывода признака делимости на 3.

- Найдем остатки от деления разрядных единиц на 3.
- $10=3\cdot3+1$
- $100=3\cdot33+1$
- $1000=3\cdot333+1$

Гипотеза: при делении любых разрядных единиц на 3 мы получаем остаток 1.

$$\left(\forall x\in N\right)\,10^{n}=3\cdot g_{n}+1$$

Доказательство гипотезы

проведем методом математической индукции

- Пусть $$\left(\forall x \in N\right) 10^n = 3 \cdot g_n + 1$$

n=1, 10=3·3+1

n=k, $10^k = 3 \cdot g_k + 1$

n=k+1, $$10^{k+1} = 10^k \cdot 10 = \left(3 \cdot g_k + 1\right) \cdot 10 =$$
$$= 30 \cdot g_k + 10 = 3 \cdot \left(10 g_k\right) + 3 \cdot 3 + 1$$

Действительно, при делении разрядных единиц на 3 получаем остаток 1

- Составим сумму s.
- Имеем: $s = a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + ... + a_1 \cdot 1 + a_0 =$

$$= a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

Следовательно, если s кратно 3, то и число x кратно 3.

Справедливо и обратное утверждение.

Обратное утверждение (необходимое условие)

- Если число x делится на 3, то и сумма его цифр в десятичной записи числа делится на 3.

- Для доказательства представим число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

в виде: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 =$

$$= x - \left[a_n\left(10^n - 1\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) + \ldots + a_1\left(10 - 1\right)\right]$$

Так как $x \vdots 3,$

$$a\ \text{сумма}\ \left[a_n\left(10^n-1\right)+a_{n-1}\left(10^{n-1}-1\right)+\ldots+a_1(10-1)\right]\vdots 9,$$

$9 \vdots 3 \Rightarrow$ (по свойству транзитивности отношения делимости)

$$\left[a_n\left(10^n-1\right)+a_{n-1}\left(10^{n-1}-1\right)+\ldots+a_1(10-1)\right]\vdots 3$$

Следовательно: $\left(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_2+a_1+a_0\right)\vdots 3$

Что и требовалось доказать.

Признак делимости на 11

- Применим признак Паскаля.
- Определим остатки от деления разрядных единиц на 11.

- Смотри!

$$10^1 = 11 \cdot 0 + 10 = 11 \cdot 1 - 1$$

$$10^2 = 11 \cdot 9 + 1$$

$$10^3 = 11 \cdot 90 + 10 = 11 \cdot 90 + 11 - 1 = 11 \cdot 91 - 1$$

$$10^4 = 11 \cdot 909 + 1$$

Признак делимости на 11

- Образуем сумму s:

$$s = a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot (-1) + ... + a_2 \cdot (-1) + a_1 \cdot 1 + a_0 =$$

$$= a_n - a_{n-1} + ... + a_2 - a_1 + a_0 =$$

Сформулируем признак

- Для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно,

чтобы знакопеременная сумма цифр десятичной записи числа делилась на 11.

Например:

- Определите какие числа делятся на 11
- a=143578
- b=123123
- c=121
- d=23562

Ответ:

- a=143578 1-4+3-5+7-8=11-17=-6

Число а не делится на 11, так как $-\overline{6:11}$

- b=123123 1-2+3-1+2-3=0

Число b кратно 11

Самостоятельно определите, делятся ли числа c и d на 11.

Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Тема:

Делимость натуральных чисел

Наименьшее общее кратное

- Определение: общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое кратно каждому из данных.

- Наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b называется <u>наименьшим общим кратным </u>этих чисел
- Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначают K(a;b) или НОК(a;b)

Например:

- a=12 и b=18
- Обозначим множество чисел кратных a символом A, а множество чисел кратных b символом B.
- A={12,24,36,48,60,72,84,96,108,…}

- B={18,36,54,72,90,108,…}
- K(12,18)=36 – наименьшее общее кратное

Свойства наименьшего кратного

1. Наименьшее общее кратное двух или нескольких натуральных чисел всегда существует и является единственным.
2. Наименьшее общее кратное чисел a и b не меньше большего из них.

$$\text{если } a>b, \text{ то } K(a,b) \geq a.$$

- Справедливость этих свойств вытека-ет из определения наименьшего общего кратного

3. Любое общее кратное делится на их наименьшее общее кратное.

Доказательство:

Пусть m- общее кратное чисел a и b, и

k- их наименьшее общее кратное.

- Разделим m на k с остатком.
- Имеем $m=k \cdot g+r$

- Если: m=k·g+r

$m \vdots a(m$ åñòü îáùåå êðàòíîå $)$

и $k \vdots a(k$ åñòü íàèìåíüøåå îáùåå êðàòíîå $)$,

то $r = m - kg$, и $r \vdots a$.

- Аналогичные рассуждения можно провести и показать, что r делится на b.

Значит $r \vdots a$ и $r \vdots b$

Тогда r-их общее кратное и r > k. Но r-оста-ток от деления m на k и r < k. Тогда r = 0.

Следовательно m делится на k. Ч.т.д.

Например:

- $a=12$ и $b=18$
- $A=\{12,24,36,48,60,72,84,96,108,\ldots\}$
- $B=\{18,36,54,72,90,108,\ldots\}$
- $K(12,18)=36$ – наименьшее общее кратное
- Действительно: $72 = 36\cdot 2$

  $108 = 36\cdot 3\ \ldots$

Наибольший общий делитель

- <u>Определение:</u> общим делителем натуральных чисел a и b называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.
- Наибольшее число из всех общих делителей чисел a и b называется наибольшим общим делителем данных чисел.
- Наибольший общий делитель чисел a и b обозначают D(a;b) или НОД (a;b).

Например:

- a=12 и b=18
- Обозначим множество делителей числа a символом C, а множество делителей числа b символом M.
- C={1,2,3,4,6,12}
  M={1,2,3,6,9,18}
- Множество общих делителей {1,2,3,6}
- D(12,18)=6 – наибольший общий делитель

Свойства наибольшего общего делителя

1. Наибольший общий делитель двух или нескольких натуральных чисел всегда существует и является единственным.
2. Наибольший общий делитель чисел a и b чисел не превосходит меньшего из них.

   если $a>b$, то $D(a,b) \le b$.
3. Наибольший общий делитель чисел a и b делится на любой их общий делитель.

Например:

- a=12 и b=18
- C={1,2,3,4,6,12}

- D={1,2,3,6,9,18}
- D(12,18)=6 – наибольший общий делитель

- Действительно: 6 кратно 1, 2, 3

Взаимно простые числа

- Определение

- Два или несколько натуральных чисел называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1

Например:

- Числа 12 и 25
- Множество делителей 12 обозначим символом А

А={1,2,3,4,6,12}

- Множество делителей 25 обозначим символом В

В={1,5,25}

Значит D=(12,25)=1

Числа 12 и 25 – взаимно простые

- Наибольший общий делитель двух чисел и их наименьшее общее кратное взаимосвязаны

$$K(a;b)\cdot D(a;b)=a\cdot b$$

$$K(a;b)=\frac{a\cdot b}{D(a;b)}$$

- Если d является общим делителем натуральных чисел a и b, то

$$k = \frac{ab}{d} - \textit{их общее кратное.}$$

Доказательство:

Так как d-общий делитель чисел a и b, то a=dg, b=df.

- Тогда

$$k = \frac{ab}{d} = \frac{dg \cdot df}{d} = gdf = (dg)f = af,$$

$$\text{значит} \quad k \vdots a.$$

Или

$$k = \frac{ab}{d} = \frac{dg \cdot df}{d} = gdf = g(df) = bg,$$

$$\text{значит} \quad k \vdots b.$$

Значит, k-общее кратное чисел a и b

Следствие

- Если k-наименьшее общее кратное чисел a и b, то d – наибольший общий делитель.

2 замечания

- Число 1 является общим делителем любых натуральных чисел.
- Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел

  если $D(a;b)=1$, то $K(a;b)=a\cdot b$

Например:

- $D(9;16)=1$
- $K(9;16)=9 \cdot 16=144$

Следствие
признак делимости на составное число

- Для того чтобы натуральное число а делилось на произведение взаимно простых чисел m и n, необходимо и достаточно, чтобы число а делилось и на m, и на n.

Достаточное условие:

- Если натуральное число делится на каждое из взаимно простых чисел m и n, следует, что оно делится и на их произведение mn.

- Доказательство:

- Из того, что a делится на m и a делится на n, следует, что a – общее кратное чисел m и n.

- Поэтому a делится на наименьшее общее кратное чисел m и n – число K(m,n)

- Но m и n – взаимно простые числа,

  и K(m,n)=m·n

Следовательно: $a \vdots (m \cdot n).$

Необходимое условие

- Если натуральное число a делится на произведение взаимно простых чисел m и n, то это число делится на m и на n.

- Доказать самостоятельно.

Например:

- Признак делимости на 6:
- Для того, чтобы натуральное число делилось на 6. необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3.

Задание:

- Сформулируйте признак делимости на 15.
- Определите делится ли на 6 число 234.378?

Спасибо за внимание