Делимость натуральных чисел

Лекция 5

2 курс

Замечание:

1. Вопрос о существовании разности на множестве натуральных чисел решается очень просто: достаточно, чтобы уменьшаемое было больше вычитаемого.

   a-b существует, если a>b,

   где $a, b \in N$

2. Для операции деления такого простого признака нет.

Поэтому и возникла в математике теория делимости натуральных чисел.

Определение отношения делимости натуральных чисел

- Пусть даны натуральные числа a и b.

$$a; b \in N$$

Говорят, что число a делится на b, если существует такое натуральное $g, \; g \in N$

что $a = b \cdot g$

b называют делителем числа a, число a – кратным b

Обозначают $a \vdots b$

Читают : a кратно b

- Что общего и что различного в понятиях?
- 1. «делитель данного числа»
- 2. « делитель»

- 24 : 5 - число 5 есть делитель. Компонент действия деления.
- 24 : 6 число 6 – не только делитель (компонент действия деления), но и делитель числа 24, так как $24=6\cdot4$.
- Число b называется делителем числа a тогда, когда число a есть кратное b.

Уточним понятие «отношение делимости»

- 1. Единица (число 1) является делителем любого натурального числа, так как a=1·a.
- 2. <u>Теорема №1.</u>
- Делитель b данного числа a не превышает этого числа.
- Если $a \vdots b, \text{ то } b \le a$

- Доказательство:

- Так как $a \vdots b$, то существует такое $g \in N$, что a = b·g

Значит, a - b =b·g – b = b ·(g -1)

Так как $g \in N$, то g ≥ 1

Тогда, b·(g-1) ≥ 0

Следовательно, b ≤ a

Следствие:

- Множество делителей данного числа конечно.
- Например:
- Делители числа 36 образуют конечное множество

$$A = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$$

Сопутствующие понятия

Простые и составные числа

- Определение:

  - Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя – единицу и само это число.

Например:

- Число 7 – простое.
- Число 2 – простое.

(единственное простое четное число).

- Числа 3,11,19, 23, 117 ... являются простыми, так как эти числа имеют по два делителя.
- Число 1 ……?

- Определение:

- Составным числом называется натуральное число, которое имеет более двух делителей.

- Например: 4,6,12,121, 45, 225 – составные числа.
- Число 1- составное?

- Чисел кратных данному числу, бесконечное множество.
- Например:

Числа кратные 6 образуют множество:

$$A = \left\{6,12,18,24,30,36,42,48...\right\}$$

- Общий вид чисел, кратных 6:

$$x=6\cdot n, \quad где \ n \in N$$

- Общий вид чисел, кратных 5:

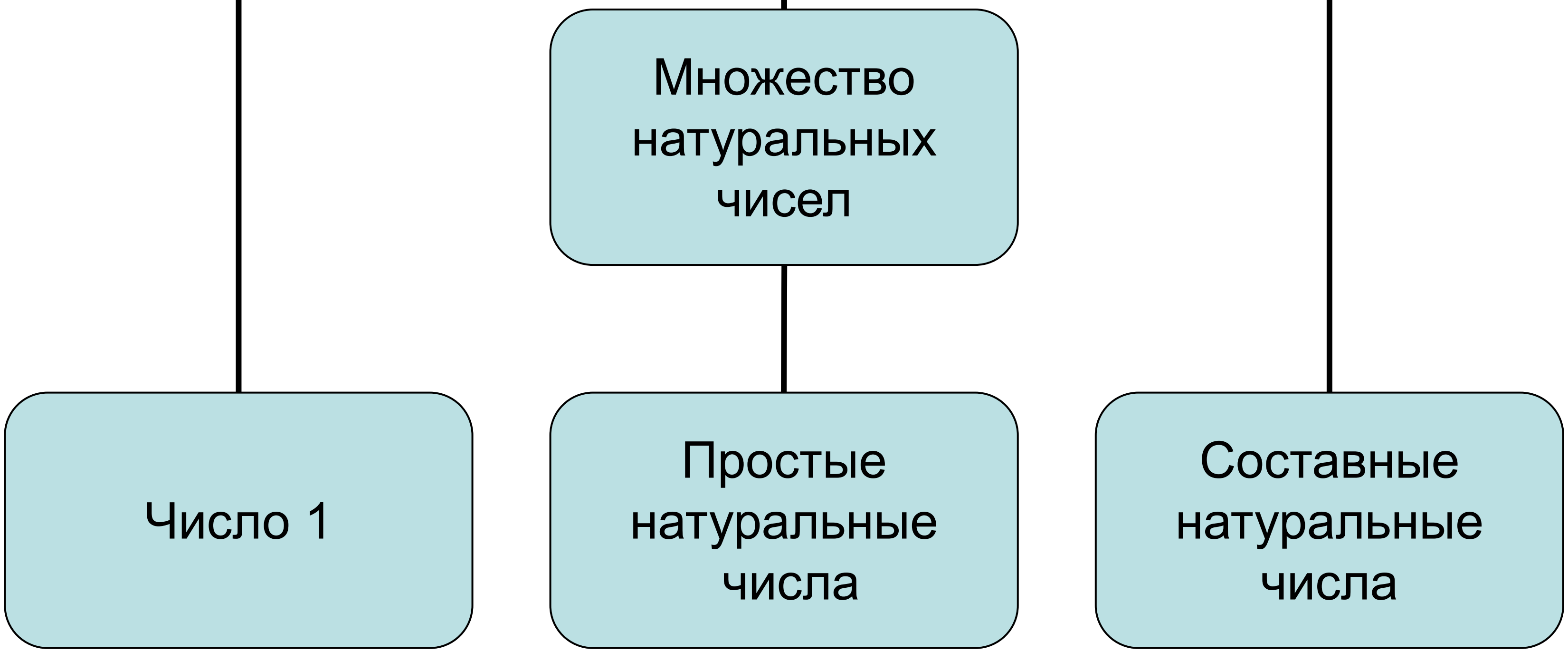
$$x=5\cdot n, \quad где \ n \in N$$

- Общий вид чисел, кратных k:

$$x=k\cdot n, \quad где \ n \in N$$

Классификация натуральных чисел

- Основание классификации - признак: быть простым числом



Свойства отношения делимости

- 1. Отношение делимости рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
- 2. Отношение делимости есть отношение нестрогого порядка

Теорема 1.

- Отношение делимости рефлексивно.

(любое натуральное число делится само на себя).

- Если отношение делимости

обозначить –R, а элемент –n, то свойство рефлексивности имеет вид: $n\ R\ n$

Доказательство

- Для любого натурального a справедливо равенство a=a·1.

$1 \in N,$ по определению делимости

$$a \,\vdots\, a$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2

- Отношение делимости антисимметрично (если а кратно b, то b не кратно а)
- Если отношение делимости

обозначить –R, а элементы отношения – а и b, то свойство антисимметричности имеет вид:

если $a\ R\ b$, то $\overline{b\ R\ a}$

Доказательство:

(доказательство осуществляется методом от противного)

- Предположим обратное.

Пусть $b \square a,$ но тогда a ≤ b.

По условию $a \square b.$ Следовательно, a ≥ b

Неравенства a ≤ b и a ≥ b справедливы, если a=b. Противоречие.

Значит наше предположение не верно.

Теорема 3

- Отношение делимости транзитивно.

Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$

Если отношение делимости обозначить –R, а элементы отношения – a,b,c то свойство транзитивности имеет вид:
если a R b и b R c, то a R c .

Доказательство

- Если $a \vdots b$, то $(\exists g \in N)$, такое, что

  a = b · g

- Если $b \vdots c$, то $(\exists p \in N)$, такое, что

  $$b = c \cdot p$$

ассоциативный

- Тогда имеем: a = b·g = (c·p)·g = c·(p·g)

- Число p · g – натуральное. Значит : $a \vdots c$

Признак делимости суммы
Теорема 4

- Если каждое из натуральных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

делится на натуральное число b, то

$$сумма\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

делится на это число.

Доказательство

- Если $a_1 \vdots b,$ то $(\exists g_1 \in N), что\ a_1 = b \cdot g_1$
- Если $a_2 \vdots b,$ то $(\exists g_2 \in N), что\ a_2 = b \cdot g_2$

\- -

- Если $a_n \vdots b,$ то $(\exists g_n \in N), что\ a_n = b \cdot g_n$

- Преобразуем сумму чисел

дистрибутивный

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \ b \cdot g_1 + b \cdot g_2 + ... + b \cdot g_n =$$

$$= b \cdot (g_1 + g_2 + ... + g_n) = \ b \cdot g$$

Так как сумма натуральных чисел есть натуральное число, то ее можно заменить натуральным числом g. Следовательно,

$$g_1 + g_2 + ... + g_n = g$$

А это значит, что сумма $a_1 + a_2 + ... + a_n$ делится на b.

Замечание

- Обратная теорема: если сумма натуральных чисел кратна натуральному числу с, то каждое слагаемое кратно этому числу с.
- Обратная теорема не верна.
- 25=12+13

$$25 \vdots 5,\ \text{а}\ \overline{12 \vdots 5}\ \text{и}\ \overline{13 \vdots 5}$$

- Теорема о делимости суммы есть необходимое условие, но не достаточное

Признак делимости разности
Теорема 5

- Если уменьшаемое a и вычитаемое b делятся на число c, то и разность (a-b), где a>b, делится на c.

$$\left(\forall a,b,c \in N\right), \text{если } a > b \text{ и } a \vdots c, \text{ и } b \vdots c, \text{ то} (a-b) \vdots c$$

Доказать самостоятельно!

Обобщение теоремы 5

- Теорема:

  Разность двух натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, тогда и только тогда, когда a при делении на c и b при делении на c дают одинаковые остатки.

Краткое условие теоремы

- Дано: a>b и

$$\left(\forall a, g, c, p \in N\right),\ \textit{таких},\ \textit{что}\ \ a = c \cdot g + p$$

$$\left(\forall b, g_1, c, p \in N\right),\ \textit{таких}, \textit{что}\ \ \mathrm{b} = c \cdot g_1 + p$$

Доказать, что $\left(a - b\right) \vdots c$

Доказательство

- Рассмотрим разность чисел a и b.

$$\left(a-b\right)=\left(c\cdot g+p\right)-\left(c\cdot g_1+p\right)=$$

$$=c\cdot g+p-c\cdot g_1-p=c\cdot g-c\cdot g_1=$$

$$=c\cdot\left(g-g_1\right)=c\cdot k$$

Следовательно, (a-b) кратно c

Например:

- Задание: Не выполняя вычислений, определите делится ли разность чисел 247 и162 на 5.
- 247 при делении на 5 дает остаток 2 и
- 162 при делении на 5 дает остаток 2.
- Значит разность 247-162 кратна 5.
- Действительно 247-162=85,
- 85:5=17

Признак делимости произведения
Теорема 6

- Если число a делится на b, то произведение вида a·x, где x – натуральное число, делится на b.

$$\left(\forall a, b, x \in N\right), \text{если } a \vdots b, \text{то} (a \cdot x) \vdots b$$

Доказательство

- Так как $a \vdots b$, то $(\exists\, g \in N)$, $что\ a = b \cdot g$

Умножим обе части этого равенства на натуральное число x

$$Тогда\ \ a \cdot x = \left(b \cdot g\right) \cdot x = b \cdot \left(g \cdot x\right)$$

$$g \cdot x - натуральное\ \ число$$

$$Следовательно,\ (a \cdot x) \vdots b$$

Следствие:

- Если один из множителей произведения делится на натуральное число, то и все произведение делится на это натуральное число.

- Например:
- $24 \cdot 978 : 12 = (24 : 12) \cdot 978 = 2 \cdot 978 =$
- $= 2 \cdot (900 + 70 + 8) = 1800 + 140 + 16 = 1956$

Еще три теоремы о делимости

- Теорема 1
- Если в сумме одно слагаемое не делится на b, а все остальные слагаемые суммы делятся на b, то и вся сумма на b не делится.

Доказательство

- Пусть $s = a_1 + a_2 + ... + a_n + c$

И известно, что $a_1 \vdots b, a_2 \vdots b, a_3 \vdots b, ..., a_n \vdots b,$ *но* $\overline{c \vdots b}$

Докажем, что $\overline{s \vdots b}$

Доказательство проведем методом

«от противного»

- Предположим противное.
- Пусть

$s \vdots b$ Преобразуем сумму s

Имеем: $c = s - \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)$

Применим теорему о делимости разности.

$$Так\ как\ s \vdots b\ и\ a_1 \vdots b, a_2 \vdots b, a_3 \vdots b, ..., a_n \vdots b$$

Следовательно: $c \vdots b.$ Противоречие

Значит наше предположение не верно. Что и требовалось доказать.

- Теорема 2. (задача)
- Если в произведении $a \cdot b$ множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то произведение $a \cdot b$ делится на $m \cdot n$.

Доказать самостоятельно!

- Теорема 3.
- Если произведение $a \cdot c$ делится на произведение $b \cdot c$, причем c- натуральное число, то a делится на b.

Доказательство

- Так как

$$(a\cdot c)\vdots(b\cdot c),\ \textit{то существует}\ \ g\in N$$

$$a\cdot c=(b\cdot c)\cdot g\overset{\text{ассоциативный}}{=}(b\cdot g)\cdot c$$

Значит $a=b\cdot g.$ $\textit{Следовательно},\ a\vdots b$

Спасибо за внимание!