

Алгоритм умножения

2 курс
лекция №3

Определение операции умножения

- Если a, b -целые неотрицательные числа, то произведением $a \cdot b$ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)
$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}}, \text{ если } b > 1$$

- 2)
$$a \cdot b = a, \text{ если } b = 1$$

- 3)
$$a \cdot b = 0, \text{ если } b = 0$$

Умножение однозначных чисел можно выполнить ,
основываясь на определении

- При умножении многозначных чисел смысл умножения сохраняется, но меняется техника вычислений.
- При умножении многозначных чисел используют правило умножения многозначного числа на однозначное.
(правило умножения суммы на число)

Например :

- $428 \cdot 3 = (400 + 20 + 8) \cdot 3 =$
- $= 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 1200 + 60 + 24 =$
- $= (1000 + 200) + 60 + (20 + 4) =$
- $= 1000 + 200 + (60 + 20) + 4 =$
- $= 1000 + 200 + 80 + 4 =$
- $= 1284$

- Согласно записи чисел в десятичной системе счисления, $428 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$
- $428 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) \cdot 3$
- $= (4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 8 \cdot 3$
- $= 12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 24$

При умножении 428 на 3 используется ассоциативный закон умножения, дистрибутивный и коммутативный

- Сейчас коэффициенты: 12 и 24 больше 10, поэтому полученный результат не является десятичной записью числа
- Преобразуем полученный результат:

-

$$(10 + 2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 4$$

- На основании ассоциативного, коммутативного законов сложения и дистрибутивного закона умножения относительно сложения, получаем:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6 + 2) \cdot 10 + 4 = \\ & = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4 \end{aligned}$$

В практике используется запись в столбик

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times 263 \\ \hline 01284 \\ + 25680 \\ \hline 85600 \\ \hline 112564 \end{array}$$

- Для получения ответа нам пришлось умножить 428 на 3, на 6, на 2.
- Умножая на 3, мы получаем единицы;
- Умножая на 6 (д), мы получаем десятки;
- Умножая на 2 (с), мы получаем сотни.
- Записываем разряд под разрядом.

- Умножение многозначного числа на однозначное основывается на знаниях (фактах):
 1. Записи чисел в десятичной системе счисления;
 2. Свойствах сложения и умножения;
 3. Таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Правило умножения многозначного числа на однозначное в общем виде

Пусть

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

у-однозначное число.

Тогда, имеем

- $x \cdot y = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot y$

- Применив основные свойства умножения получаем,

$$(a_n \cdot y)10^n + (a_{n-1} \cdot y)10^{n-1} + (a_{n-2} \cdot y)10^{n-2} + \dots + (a_1 \cdot y)10 + a_0 \cdot y =$$

Заменяем все произведения, $a_k \cdot y$ где $0 \leq k \leq n$

Если они больше или равны 10

Соответствующими значениями $a_k \cdot y = b_k \cdot 10 + c$

- Получаем:

- $x \cdot y = (b_n \cdot 10 + c_n) \cdot 10^n + (b_{n-1} \cdot 10 + c_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \dots +$
 $+ (b_1 \cdot 10 + c_1) \cdot 10 + (b_0 \cdot 10 + c_0) =$
 $= b_n \cdot 10^{n+1} + (c_n + b_{n-1}) \cdot 10^n + \dots + (c_1 + b_0) \cdot 10 + c_0$

- Суммы $c_k + b_{k-1}$, где $0 \leq k \leq n$

Заменим ее значением.

И это значение запишем в ответ.

Алгоритм умножения многозначного числа на однозначное

1. Записываем второй множитель под первым;
2. Умножаем цифру разряда единиц числа x на число y . Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду(десятков)

3. Если произведение цифры единиц числа x на число y больше, или равно 10, то представляем его в виде $10 \cdot g_1 + c_0$

где c_0 - есть однозначное число.

Записываем c_0 в разряд единиц ответа

и запоминаем g_1 -перенос в следующий разряд

4. Умножаем цифру разряда десятков на число u , прибавляем к полученному произведению число g_1

И повторяем процесс, описанный в пункте 2 и 3

5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Замечание:

Умножение числа x на 10^n

**Сводится к приписыванию к десятичной записи
числа x n нулей справа**

Умножение многозначного на многозначное число

- $428 \cdot 263 = 428 \cdot (200 + 60 + 3) =$
- $= 428 \cdot 200 + 428 \cdot 60 + 428 \cdot 3 =$
- $= 428 \cdot (2 \cdot 100) + 428 \cdot (6 \cdot 10) + 428 \cdot 3 =$
- $= (428 \cdot 2) \cdot 100 + (428 \cdot 6) \cdot 10 + 428 \cdot 3$

**Умножение многозначного на
многозначное свелось к умножению
многозначного на однозначное
число.**

Основой выполнения преобразований
являются:

- Представление каждого множителя в виде суммы разрядных слагаемых (запись числа в десятичной системе)
- Правило умножения суммы на число (дистрибутивность умножения относительно сложения)
- Законы сложения
- Умножение круглых чисел

Алгоритм умножения числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$
на число $y = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}$

1. Записываем второе число под первым
2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x \cdot b_0$ под числом y

3. Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y ,
Записываем результат,
но со сдвигом на один разряд влево,
что соответствует умножению $x \cdot b_1$
на 10

4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot b_k$
5. Полученные $k+1$ произведение складываем.

- **Спасибо за внимание**