ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Теплов Н.В

Определение

- Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим: loga f(x) > loga g(x) .

Решение

- Перед решением логарифмических неравенств, стоит отметить, что они при решении имеют сходство с показательными неравенствами, а именно:
- • Во-первых, при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, нам также необходимо сравнить основание логарифма с единицей;
- • Во-вторых, решая логарифмическое неравенство, используя замену переменных, нам необходимо решать неравенства относительно замены до того момента, пока мы не получим простейшее неравенство.
- Но это мы с вами рассмотрели сходные моменты решения логарифмических неравенств. А сейчас обратим внимание на довольно таки существенное отличие. Нам с вами известно, что логарифмическая функция обладает ограниченной областью определения, поэтому переходя от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, нужно брать в расчет область допустимых значений (ОДЗ).
- То есть, следует учитывать, что решая логарифмическое уравнение мы с вами, можем сначала находить корни уравнения, а потом делать проверку этого решения. А вот решить логарифмическое неравенство так не получится, поскольку переходя от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, необходимо будет записывать ОДЗ неравенства.
- Вдобавок стоит запомнить, что теория неравенств состоит из действительных чисел, которыми являются положительные и отрицательные числа, а также и число 0.
- Например, когда число «а» является положительным, то необходимо использовать такую запись: а >0. В этом случае, как сумма, так и произведение таких этих чисел также будут положительными.
- Основным принципом решения неравенства является его замена на более простое неравенство, но главное, чтобы оно было равносильно данному. Дальше, также мы получили неравенство и снова его заменили на то, которое имеет более простой вид и т.д.
- Решая неравенства с переменной нужно находить все его решения. Если два неравенства имеют одну переменную х, то такие неравенства равносильны, при условии, что их решения совпадают.
- Выполняя задания на решение логарифмических неравенств, необходимо запомнить, что когда а > 1, то логарифмическая функция возрастает, а когда 0 < а < 1, то такая функция имеет свойство убывать. Эти свойства вам будут необходимы при решении логарифмических неравенств, поэтому вы их должны хорошо знать и помнить.

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Свойства логарифмов.

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$

2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

4. $\log_a x^n = n \log_a x$

5. $\log_a a = 1$

6. $\log_a 1 = 0$

7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

8. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к другому основанию

9. $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

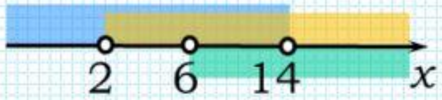
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$т.к.\ \ a = 3 > 1,\ то$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

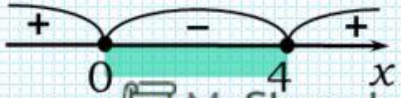
$т.к.\ \ a = \frac{1}{2} < 1,\ то$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \ -\textit{лишнее условие} \end{cases}$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x+\lg(45-x)<2+\lg 2$$

$$\lg\big(x(45-x)\big)<\lg 100+\lg 2$$

$$\lg\left(45x-x^2\right)<\lg 200$$

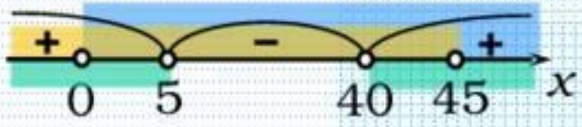
т.к. $a=10>1$, *то*

$$\begin{cases}45x-x^2<200,\\ 45-x>0,\\ x>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-45x+200>0,\\ x<45,\\ x>0;\end{cases}$$

н.ф.: $x^2-45x+200=0$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=5,\\ x_2=40;\end{array}\right.$$



Ответ: $(0;\ 5)\cup(40;\ 45)$.

Пример 4

$$\log_2^2 x^2-5\log_2 x+1\le 0 \quad \text{ОДЗ}:\ x>0$$

$$\left(2\log_2 x\right)^2-5\log_2 x+1\le 0$$

$$4\log_2^2 x-5\log_2 x+1\le 0$$

пусть $\log_2 x=t$, *тогда*

$$4t^2-5t+1\le 0$$

н.ф.: $4t^2-5t+1=0$

$$\left[\begin{array}{l}t_1=\frac{1}{4},\\ t_2=1;\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{4}\le t\le 1$$

Вернемся к исходной переменной

$\frac{1}{4}\le \log_2 x\le 1$, *т.к.* $a=2$, *то*

$$\sqrt[4]{2}\le x\le 2$$

Ответ: $[\sqrt[4]{2};\ 2]$.