Логарифмические неравенства

Теория

- Неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании, называются логарифмическими.

Решение логарифмических неравенств имеет много общего с решением показательных неравенств:

- *а) При переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, мы также сравниваем основание логарифма с единицей;*
- *б) Если мы решаем логарифмическое неравенство с помощью замены переменных, то нужно решать относительно замены до получения простейшего неравенства.*

Однако, есть одно очень важное отличие: поскольку логарифмическая функция имеет ограниченную область определения, при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, необходимо учитывать область допустимых значений.

Если при решении логарифмического уравнения можно найти корни уравнения, а потом сделать проверку, то при решении логарифмического неравенства этот номер не проходит: при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма необходимо записывать ОДЗ неравенства.

Свойства логарифмов

- 1 Основное логарифмическое тождество - $a^{\log_a b} = \mathbf{b}$;
- 2 $\log_a \mathbf{1} = 0$;
- 3 $\log_a \mathbf{a} = 1$;
- 4 $\log_a \mathbf{(bc)} = \log_a \mathbf{b} + \log_a \mathbf{c}$;
- 5 $\log_a \mathbf{(b/c)} = \log_a \mathbf{b} - \log_a \mathbf{c}$;
- 6 $\log_a \mathbf{(1/c)} = \log_a \mathbf{1} - \log_a \mathbf{c} = -\log_a \mathbf{c}$;
- 7 $\log_a (\mathbf{b}^c) = c \log_a \mathbf{b}$;
- 8 $\log_{(a^c)} \mathbf{b} = (1/c) \log_a \mathbf{b}$;
- 9 **Формула перехода к новому основанию** - $\log_a \mathbf{b} = (\log_c \mathbf{b})/(\log_c \mathbf{a})$;
- 10 $\log_a \mathbf{b} = 1/\log_b \mathbf{a}$;

Простейшие логарифмические неравенства

Пример 1. $\log_2 x > 3$

$x > 2^3$ (по определению логарифма).

Т. к. функция $y=\log_2 x$ возрастает, значит знак неравенства при переходе к подлагорифмическому выражению не меняется.

$x > 8$

Пример 2. $\log_{1/2} x > 3$

$$\begin{cases} x > 0 & \text{(О.Д.З)} \\ x < (1/2)^3 \end{cases}$$

(знак неравенства при переходе к подлагорифмическому выражению не меняется, т. к функция $y=\log_{1/2} x$ убывает на всей области определения).

$0 < x < 1/8$