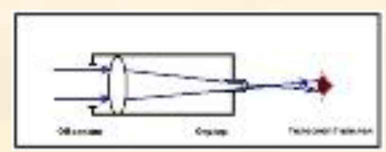
ТЕМА 3

Элементы математического моделирования

МОДЕЛЬ -

- это материальный или идеальный объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя его некоторые важные для данного исследования черты.



МОДЕЛЬ НУЖНА:

- 1) для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект;
- 2) для того, чтобы научится управлять объектом;
- 3) для прогноза динамики состояний объекта.

МОДЕЛИРОВАНИЕ – процесс построения и исследования модели с целью познания объекта

Виды моделирования

Материальное моделирование

- Модель воспроизводит геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта

Материальное моделирование

Физическое

Аналоговое

Физическое и аналоговое моделирование

- При физическом моделировании объект заменяется увеличенной или уменьшенной копией с последующим перенесением свойств модели на объект на основе теории подобия.
- Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально.

Идеальное моделирование

Интуитивное

Знаковое

Интуитивное моделирование

- Основано на интуитивном представлении об объекте, не поддающемся формализации или не нуждающемся в ней.
- **Пример:** жизненный опыт человека как интуитивная модель окружающего мира.

- **«Подлинной ценностью является, в сущности, только интуиция. Для меня не подлежит сомнению, что наше мышление протекает, в основном, минуя символы, и к тому же бессознательно» (А. Эйнштейн)**

Знаковое моделирование

- использует в качестве моделей знаковые системы: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т.д.
- Оно включает в себя также совокупность законов, по которым с этими системами и их элементами можно оперировать.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ -

- **важнейшая разновидность знакового моделирования, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики, с использованием математических методов.**

ЭТАПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Построение модели
2. Решение математической задачи, к которой приводит модель
3. Интерпретация результатов
4. Коррекция и модернизация модели

Этап построения модели – перевод с языка конкретной науки на язык математики

1

- 1. Формируются основные вопросы о поведении исследуемой системы, на которые с помощью модели требуется получить ответ.
- 2. Из множества законов, управляющих поведением системы учитываются те, влияние которых существенно при поиске ответов на поставленные вопросы.
- 3. В дополнение к ним, если это необходимо, формулируются правдоподобные гипотезы о функционировании системы.
- 4. Законы и гипотезы записываются в форме математических соотношений.

Этап решения математической задачи

2

- На этом этапе важную роль приобретает математический аппарат и вычислительная техника.
- Выявляется информация, которая в постановке задачи содержалась в скрытой форме.

Этап интерпретации результатов

- На этом этапе осуществляется обратный перевод с языка математики на язык конкретной науки.
- Выясняется, какой смысл имеет полученное решение, согласутся ли они с фактической информацией из соответствующей предметной области.

Этап коррекции и модернизации модели

4

- Если окажется, что результаты расчетов противоречат фактам, следует вернуться к построенной модели с целью коррекции.
- Необходимость пересмотра модели возникает и в том, случае, если появляются новые данные об изучаемых объектах.

Функция как математическая модель процесса

- **Функция** – одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

- **Говорят, что переменная *у* является функцией от переменной *х*, если задана такая зависимость между переменными, которая позволяет для каждого *х* ОДНОЗНАЧНО определить *у*.**

$$y = f(x)$$

***х* – независимая переменная (аргумент)**

***у* – зависимая переменная (функция).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

- **Если каждому значению *x* из некоторого множества чисел *X* поставлено в соответствие единственное число *y* , то говорят, что на этом множестве задана функция *y= f (x)***
- **При этом *x* называют независимой переменной, а *y* — зависимой переменной или функцией.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

- **Числовой функцией с областью определения *D* называется соответствие, при котором каждому числу *x* из множества *D* сопоставляется по некоторому правилу единственное число *y*, зависящее от *x*.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4

- **Функцией *f(x)* называется правило, которое каждому элементу *x* из множества X ставит в соответствие единственный элемент *y* из множества Y.**
- **X – область определения**
- **Y – область значений**

Характеристическое свойство функциональных зависимостей:

существование **не более одного** значения зависимой величины.

Способы задания функций

- **табличный** (с помощью таблицы) (нельзя задать непрерывную функцию, неограниченную функцию);
- **словесный** (описанием);
- **аналитический** (с помощью формулы);
- **графический** (с помощью графика) тоже не позволяет задать неограниченную функцию или функцию на неограниченной области определения.

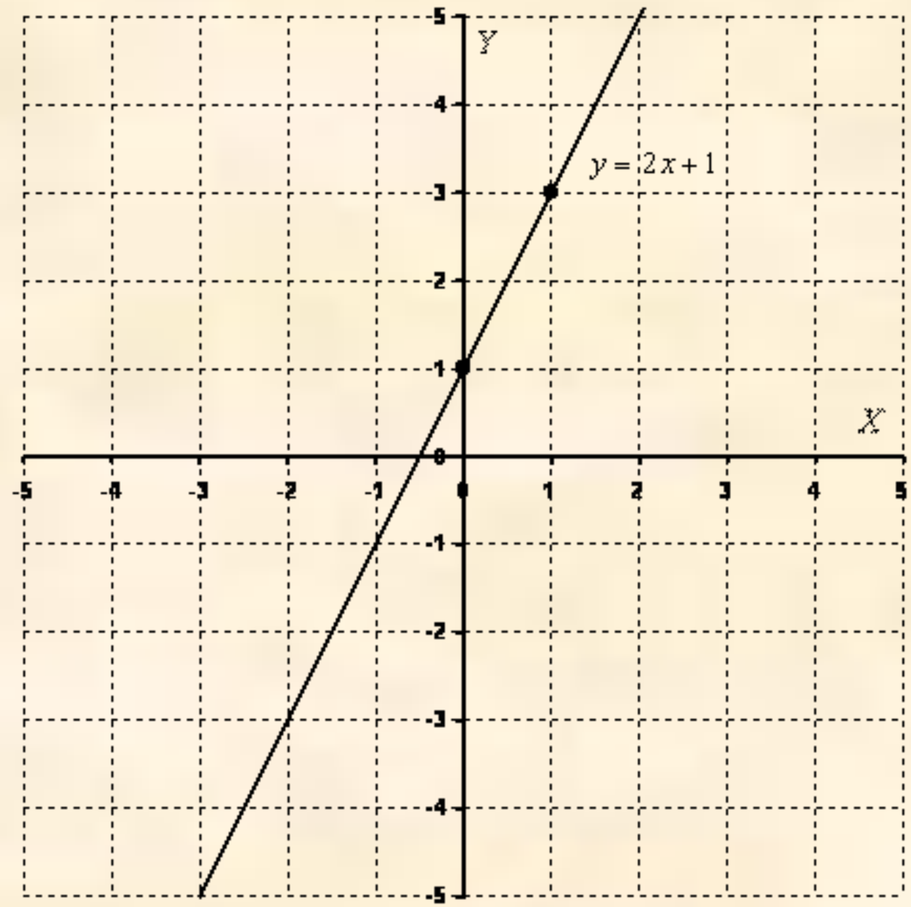
Основные элементарные функции

- Степенная функция $y = x^n$ (в том числе постоянная функция (n=0), прямая пропорциональность (n=1), обратная пропорциональность (n= -1)
- Показательная функция $y = a^x$ (в том числе экспонента $y = e^x$)
- Тригонометрические функции (y=sin x, y=cos x, y=tg x, y= ctg x)

Линейная функция

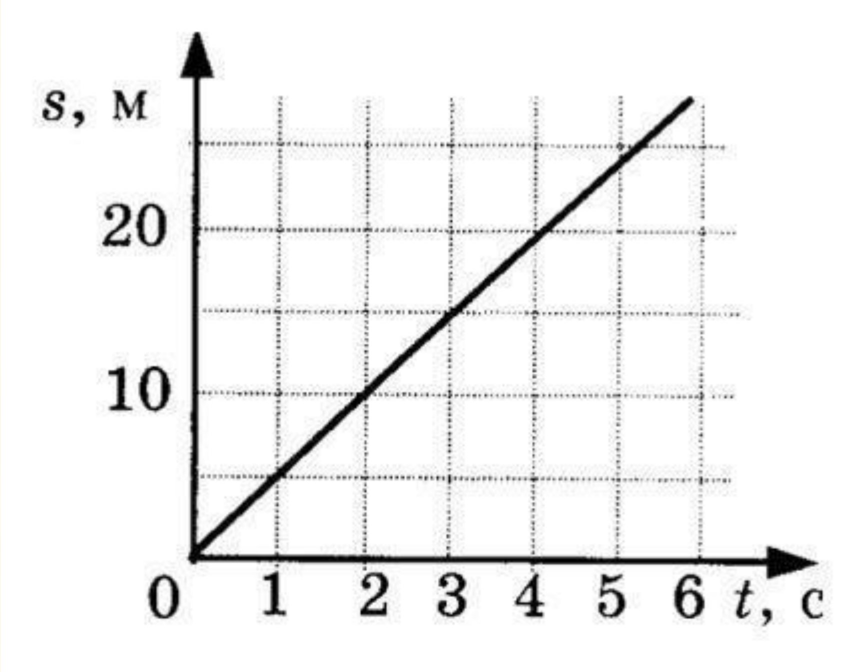
- Линейная функция

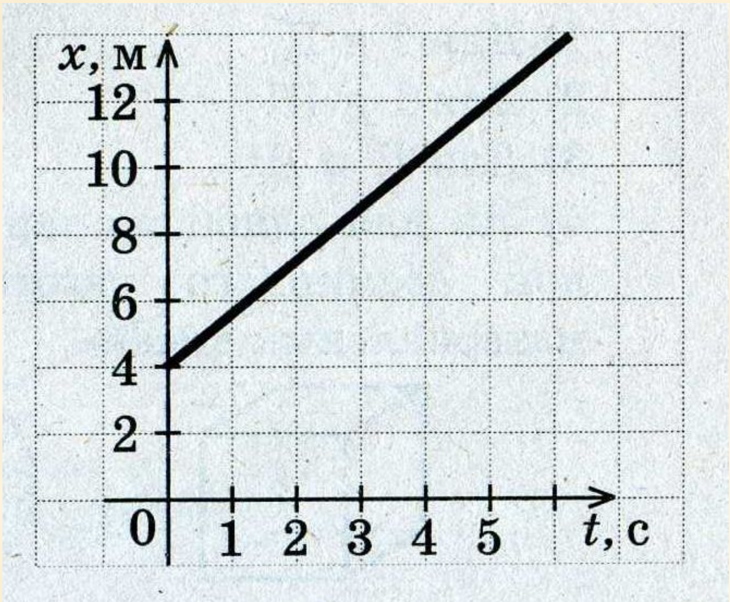
$y=kx+b$ – линейная комбинация прямой пропорциональности и константы



Примеры величин, связанных линейной зависимостью

Пример 1. Зависимость пути или координаты материальной точки от времени при равномерном прямолинейном движении





Пример процесса, в котором линейная функция используется как модель: равномерное прямолинейное движение

Ситуация:

Автомобиль, выехавший из пункта *A*, в настоящее время находится от него в 50 км. На каком расстоянии x от A будет находиться автомобиль через t ч, если он будет двигаться в том же направлении со скоростью 60 км/ч?

Ответ будет выражаться линейной функцией вида $x = 60\,t + 50$.

Пример процесса, в котором линейная функция используется как модель: равномерное прямолинейное движение

- Степенная функция $y = x^n$ (в том числе постоянная функция (n=0), прямая пропорциональность (n=1), обратная пропорциональность (n= -1)
- Показательная функция $y = a^x$ (в том числе экспонента $y = e^x$)
- Тригонометрические функции (y=sin x, y=cos x, y=tg x, y= ctg x)

Примеры величин, связанных линейной зависимостью

Пример 2. Затраты на оплату услуг, предоставляемых по тарифу.

Ситуация: Оплата мобильной связи по тарифу, включающему фиксированную плату за лимитированное количество услуг (месячная абонентская плата) и повременную оплату за каждую минуту разговора сверх лимита.

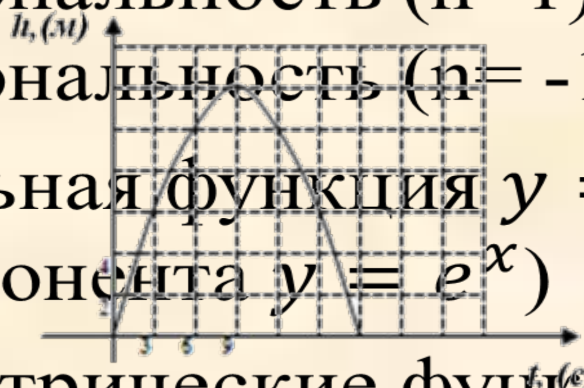
Сумма в рублях q, вносимая абонентом за пользование мобильной связью за месяц:

$$q=a + b\,t$$

a –месячная абонентская плата, b – стоимость одной минуты разговора сверх лимита (в рублях), t – время разговоров (в минутах).

Примеры величин, связанных квадратичной зависимостью

- Степенная функция $y = x^n$ (в том числе постоянная функция (n=0), прямая пропорциональность (n=1), обратная пропорциональность (n= -1)
- Показательная функция $y = a^x$ (в том числе экспонента $y = e^x$)
- Тригонометрические функции (y=sin x, y=cos x, y=tg x, y= ctg x)



Примеры величин, связанных обратной зависимостью

- Степенная функция $y = x^n$ (в том числе постоянная функция (n=0), прямая пропорциональность (n=1), обратная пропорциональность (n= -1)
- Показательная функция $y = a^x$ (в том числе экспонента $y = e^x$)

Свойства функций

- Четность и нечетность
- Периодичность
- Монотонность (промежутки возрастания и убывания)
- Экстремумы (точки максимума и минимума)

Четные и нечетные функции

- **Нечётная функция** — функция, меняющая значение на противоположное при изменении знака независимой переменной (график ее симметричен относительно начала координат).
- **Чётная функция** — функция, не изменяющая своего значения при изменении знака независимой переменной (график ее относительно оси ординат).
- **Ни чётная, ни нечётная функция (функция общего вида)** — функция, не обладающая симметрией. В эту категорию относят функции, не подпадающие под предыдущие 2 категории.

Периодичность

- **Периодическая функция —** функция повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал аргумента, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу некоторого фиксированного ненулевого числа (периода функции) на всей области определения.

Производная функции

- **Скорость изменения функции при изменении аргумента определяется *производной.***
- **Производной называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремиться к 0.**

Производная и монотонность функции

- Степенная функция $y = x^n$ (в том числе постоянная функция (n=0), прямая пропорциональность (n=1), обратная пропорциональность (n= -1)
- Показательная функция $y = a^x$ (в том числе экспонента $y = e^x$)
- Тригонометрические функции (y=sin x, y=cos x, y=tg x, y= ctg x)

ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА (МИНИМУМА И МАКСИМУМА)

- 1. Если функция имеет экстремум в некоторой точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.
- 2. Если производная при переходе через такую точку меняет знак с «+» на «-», то это точка максимума, а если с«-» на «+», то это точка минимума.

ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА

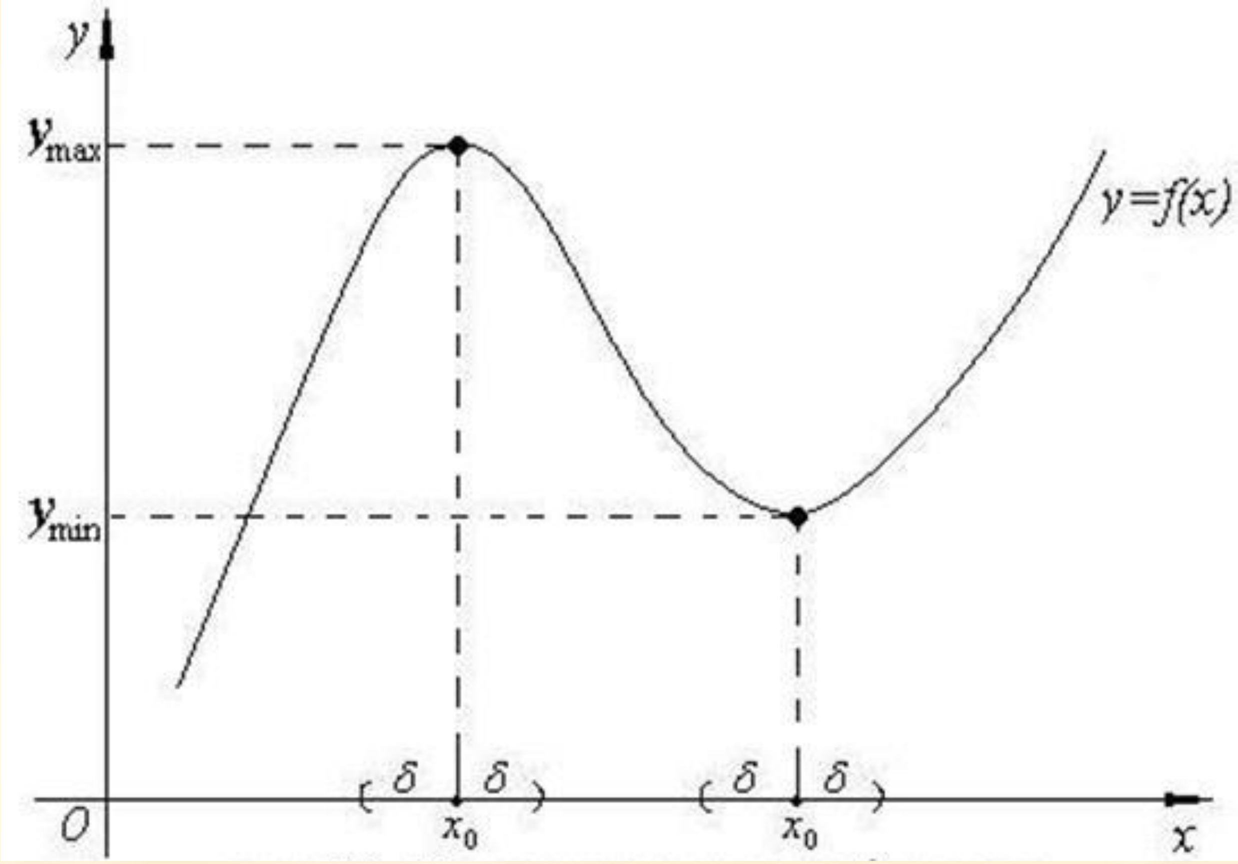


Таблица производных

Функция	Производная
$y = C, \quad C = Const$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

ЗАДАЧИ на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

- 1. Выявить оптимизируемую величину, то есть величину наибольшее или наименьшее значение которой надо найти. Обозначить ее буквой у или какой-либо другой, в соответствии с ситуацией задачи (S – площадь, V – объем, v – скорость и т. д.).

ЗАДАЧИ на отыскание наибольших и наименьших значений функции

- 2. Одну из неизвестных величин принять в качестве независимой переменной и ввести соответствующее обозначение (x, t и т.д.).
- 3. Установить границы изменения независимой переменной, исходя из условия задачи.

ЗАДАЧИ на отыскание наибольших и наименьших значений функции

- 4. Выразить оптимизируемую величину через независимую переменную, то есть представить ее как функцию независимого аргумента ($y=f(x)$, $v=f(t)$, $S=f(r)$ и т.д.). Для составления функции используются данные условия, известные законы и соотношения для величин.

ЗАДАЧИ на отыскание наибольших и наименьших значений функции

- 5. Исследовать полученную функцию на экстремум на промежутке, соответствующем границам изменения независимой переменной (см.п.2) по следующему алгоритму

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значения функции

- 1) найти производную функции;
- 2) найти точки, в которых производная равна 0 или не существует;
- 3) вычислить значения функции в этих точках, а также на концах промежутка, отобрать из них наибольшее и наименьшее.

ЗАДАЧИ на отыскание наибольших и наименьших значений функции

- 6. Интерпретировать полученный результат для конкретной задачи, поставленной в условии.
- ЗАДАНИЕ: соотнесите этапы алгоритма решения задач на отыскания экстремума с этапами моделирования. Все ли этапы представлены?

ЗАДАЧА на оптимизацию

- Степенная функция $y = x^n$ (в том числе постоянная функция (n=0), прямая пропорциональность (n=1), обратная пропорциональность (n= -1)
- Показательная функция $y = a^x$ (в том числе экспонента $y = e^x$)
- Тригонометрические функции (y=sin x, y=cos x, y=tg x, y= ctg x)