Методы оптимальных решений

Кафедра Математика и информатика

Лектор Горбатенко Елена Николаевна

Структура дисциплины

- **Лекции - 4 часа**
- **Практические занятия на ПЭВМ - 12 часов**

Отчетность

- **Контрольная работа - 2**
- **Экзамен**

В результате изучения дисциплины студенты должны уметь:

строить экономико-математические модели и применять их для анализа, управления , прогнозирования и планирования.

Рекомендуемая литература

Тема 1. Введение в дисциплину.
Общее представление о задаче оптимизации

1. Классическая задача оптимизации

2. Общая запись оптимизационной экономической задачи

3. Общая классификация оптимизационных задач

4. Примеры экономико-математических моделей оптимизации

1. Классическая задача оптимизации

На предприятии формируется программа на 1 месяц выпуска двух видов изделий - P_1 и P_2.

Для их производства используется два основных вида ресурса S_1 и S_2.

Месячные запасы этих ресурсов - b_1и b_2.

Нормы расхода ресурсов a_{ij}, i =1,2; j =1,2.

Объемы сбыта произведенной продукции неограниченны, цена продажи - c_1 и c_2.

Необходимо выбрать такой вариант месячной производственной программы, который позволил бы максимизировать выручку от продажи готовой продукции.

1. Классическая задача оптимизации

	Нормы расхода сырья		Объемы запасов ресурсов
	Продукция P_1	Продукция P_2	
Ресурс S_1	1	3	300
Ресурс S_2	1	1	150
Цена продажи у.е./ед.	2	3	

1. Классическая задача оптимизации

	Нормы расхода сырья		Объемы запасов ресурсов
	Продукция Р1	Продукция Р2	
Ресурс S1	1	3	300
Ресурс S2	1	1	150
Цена продажи у.е./ед.	2	3	

ЭММ задачи:

x_1 – количество продукции P_1

x_2 – количество продукции P_2

найти $\max\,(2x_1+3x_2)$ - **целевая функция**

$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2 \le 300 \\ x_1+x_2 \le 150 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{array}\right] \text{ ограничения}$$

Вектор $X(x_1,x_2)$ – **план** (**допустимое решение** ЗЛП)

- Все допустимые решения образуют область определения задачи линейного программирования (области допустимых решений)

- Допустимое решение, максимизирующее целевую функцию F(X), называется оптимальным планом задачи.

2. Общая запись оптимизационной экономической задачи

max(min) $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях

$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1$;

$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2$;

…

$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m$;

где f и g_i – заданные функции

b_i – некоторые действительные числа

$i = 1, 2, \ldots, m$.

Оптимизационные задачи
(задачи математического программирования)

Задачи
линейного
программировани
я

Задачи
нелинейного
программировани
я

Универсальный метод:
симплекс-метод

Метод Ньютона
Метод Лагранжа
Метод ветвей и границ
Метод штрафных функций

Задача линейного программирования

Найти вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

максимизирующий линейную форму $f(\overline{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$

и удовлетворяющий условиям

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$

$x_j \ge 0$. $\quad$ $\mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{n}$,

Примеры оптимизационных моделей:

- модели определения оптимальной производственной программы

- модели оптимального смешивания компонентов

- модели оптимального раскроя

- модели оптимального размещения предприятий некоторой отрасли на определенной территории

- модели формирования оптимального портфеля ценных бумаг

- модели транспортной задачи

3. Общая классификация оптимизационных задач

1. **По характеру взаимосвязи между переменными**:
- линейные
- нелинейные

2. **По характеру изменения переменных**:
- непрерывные
- дискретные

3. По учету фактора времени:
- статические
- динамические

4. По наличию информации о переменных:
- задачи в условиях полной определенности (детерминированные)
- задачи в условиях неполной информации
- задачи в условиях неопределенности

5. По числу критериев оптимизации
- простые (однокритериальные)
- сложные (многокритериальные)

4. Примеры экономико-математических моделей оптимизации

Задача о размещении производственных заказов

В планируемом периоде предприятию необходимо обеспечить производство 300 тыс. однородных новых изделий, которые могут выпускать четыре филиала.

Для освоения этого нового вида изделий выделены капитальные вложения в размере 18 млн. руб. Разработанные для каждого филиала предприятия проекты освоения нового вида изделия характеризуются величинами удельных капитальных вложений и себестоимостью единицы продукции в соответствии с табл.

Задача о размещении производственных заказов

Показатели	Филиалы предприятия			
	1	2	3	4
Себестоимость производства изделия, руб.	83	89	95	98
Удельные капиталовложения	120	80	90	40

Необходимо найти такой вариант распределения объемов производства продукции по филиалам, при котором суммарная себестоимость изделий будет минимальной.

Задача о размещении производственных заказов

Показатели	Филиалы предприятия			
	1	2	3	4
Себестоимость производства изделия, руб.	83	89	95	98
Удельные капиталовложения	120	80	90	40

Экономико-математическая модель задачи

$$f(\overline{X}) = 83x_1 + 89x_2 + 95x_3 + 98x_4 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 300\,000 \text{ (шт.)},$$

$$120x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 40x_4 \leq 18\,000\,000 \text{ (руб.)},$$

$$x_{1,2,3,4} \geq 0.$$

Задача о выборе оптимального проекта для финансирования

Управляющему банком были представлены 4 проекта, претендующие на получение кредита в банке. Ресурс банка в каждый период, потребности проектов и прибыль по ним приведены в таблице (тыс. долл.)

Проект	Потребность проекта в объемах кредитов				Прибыль
	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал	
А	8	8	10	10	21
Б	7	9	9	11	18
В	5	7	9	11	16
Г	9	8	7	6	17,5
Ресурс банка	22	25	38	30	

Проект	Потребность проекта в объемах кредитов				Прибыль
	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал	
А	8	8	10	10	21
Б	7	9	9	11	18
В	5	7	9	11	16
Г	9	8	7	6	17,5
Ресурс банка	22	25	38	30	

$$f(\overline{X}) = 21x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 17{,}5x_4 \to \max,$$

x_i – факт финансирования j-ого проекта

$$x_i = \begin{Bmatrix} 0 - \text{отсутствие финансирования} \\ 1 - \text{финансирование} \end{Bmatrix}$$

$8x_1+7x_2 + 5x_3 + 9x_4 \leq 22$
$8x_1+9x_2 +7x_3 +8x_4 \leq 25$
$10x_1+9x_2 +9x_3 +7x_4 \leq 38$
$10x_1+11x_2 +11x_3 +6x_4 \leq 30$