Типы моделей процессов и систем

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. ***Математические схемы процессов и систем.***
2. ***Формальная модель объекта***.
3. ***Типовые математические схемы***.

ЛИТЕРАТУРА:

Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 2005 г., с. 45…50.

1. Математические схемы процессов и систем

***Математическую схему** можно определить как звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель — математическая схема — математическая [аналитическая или (и) имитационная] модель».*

Введение понятия «*математическая схема*» позволяет рассматривать математику не как метод расчета, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса ее функционирования в виде некоторой математической модели (аналитической или имитационной). При пользовании математической схемой исследователя системы S в первую очередь должен интересовать вопрос об адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе, а не возможность получения ответа (результата решения) на конкретный вопрос исследования.

Каждая конкретная система S характеризуется набором свойств, под которыми понимаются величины, отражающие поведение моделируемого объекта (реальной системы) и учитывающие условия ее функционирования во взаимодействии с внешней средой (системой*)* *E*. При построении математической модели системы необходимо решить вопрос об ее полноте. Полнота модели регулируется в основном выбором границы «система *S* – среда *E*». Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогаем выделить основные свойства системы, отбросив второстепенные Причем отнесение свойств системы к основным или второстепенным существенно зависит от цели моделирования системы (напри мер, анализ вероятностно-временных характеристик процесса функционирования системы, синтез структуры системы и т.д.).

2. Формальная модель объекта

Модель объекта моделирования, т. е. систему S, можно представить в виде множества величин описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества

1) совокупность входных воздействий на систему (1):

$$x_i \in X, i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

2) совокупность воздействий внешней среды (2):

$$v_l \in V, l = \overline{1, n_v} \qquad (2)$$

3) совокупность внутренних (собственных) параметров системы (3):

$$h_k \in H, k = \overline{1, n_H} \qquad (3)$$

4) совокупность выходных характеристик системы (4):

$$y_j \in Y, j = \overline{1, n_Y} \qquad (4)$$

При моделировании системы S входные воздействия, воздействия внешней среды E и внутренние параметры системы являются независимыми (экзогенными) переменными, которые в векторной форме имеют соответственно вид (5):

$$\begin{aligned} &\vec{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_{nX}(t)); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\vec{v}(t) = (v_1(t),\ v_2(t), \ldots, v_{nV}(t)); \\ &\vec{h}(t) = (h_1(t),\ h_2(t)\ ,\ \ldots,\ h_{nH}(t)) \end{aligned} \qquad (5)$$

а выходные характеристики системы являются зависимыми (эндогенными) пере менными и в векторной форме имеют вид (6):

$$\vec{y}(t) = F_S(y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_{nY}(t)) \qquad (6)$$

Процесс функционирования системы S описывается во времени оператором F_S, который, в общем случае, преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношениями вида (7):

$$\vec{y}(t) = (\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t) \qquad (7)$$

Для статических моделей математическая модель (7) представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта Y и {X, V, H}, что в векторной форме может быть записано как (8):

$$\vec{y}(t) = (\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}) \qquad (8)$$

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени для всех видов , называется ***<u>выходной траекторией</u>*** . Зависимость (7) называется ***<u>законом функционирования системы</u>*** *S* и обозначается F_S. В общем случае закон функционирования системы F_S может быт задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличной формах или в виде словесного правила соответствия.

Весьма важным для описания и исследования системы S является понятие ***<u>алгоритма функционирования</u>*** ***As,*** под которым *понимается* метод получения выходных характеристик с учетом входных воздействий воздействий внешней среды и собственных параметров системы Очевидно, что один и тот же закон функционирования Fs системы S может быть реализован различными способами, т. е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования A_S.

Для статических моделей математическая модель (7) представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта Y и $\{X, V, H\}$, что в векторной форме может быть записано как

$$\bar{y}(t) = (\vec{x}, \vec{v}, \vec{h}) \,. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) могут быть заданы различными способами: аналитически (с помощью формул), графически, таблично и т.д. Такие соотношения в ряде случаев могут быть получены через свойства системы S в конкретные моменты времени, называемые состояниями. Состояние системы S характеризуется векторами (9):

$$\bar{z}' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_k) \;\; u \;\; z'' = (\vec{z}''_1, \vec{z}''_2, \ldots, z''_k), \tag{9}$$

где $z'_1 = z_1(t')$, $z'_2 = z_2(t')$,..., $z'_k = z_k(t')$

в момент $t' \in (t_0, T)$; $z''_1 = z_1(t'')$, $z''_2 = z_2(t'')$,..., $z''_k = z_k(t'')$

в момент $t'' \in (t_0, T)$ и т.д., $k = \overline{1, n_Z}$.

Если рассматривать процесс функционирования системы S как последовательную смену состояний $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_k(t)$, то они могут быть интерпретированы как координаты точки в k-мерном фазовом пространстве, причем каждой реализации процесса будет соответствовать некоторая фазовая траектория. Совокупность всех возможных значений состояний $\{\vec{z}\}$ называется пространством состояний объекта моделирования Z, причем $z_k \in Z$.

Состояния системы S в момент времени $t_0 < t^* \le T$ полностью определяются начальными условиями $\vec{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_k^0)$ [где $z_1^0 = z_1(t_0), z^0{}_2 = z_2(t_0), \ldots, z^0{}_k = z_k(t_0)$], входными воздействиями $\vec{x}(t)$, внутренними параметрами $h\ (t)$ и воздействиями внешней среды $v(t)$, которые имели место за промежуток времени t^*-t_0, с помощью двух векторных уравнений (10) и (11):

$$z(t) = \Phi(\vec{z}^0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t). \tag{10}$$

$$\vec{y}(t) = F(\vec{z}, t). \tag{11}$$

Таким образом, ***под математической моделью*** объекта (реальной системы) понимают конечное подмножество переменных $\{x\ (t),\ v(t),\ h\ (t)\}$ вместе с математическими связями между ними и характеристиками $y\ (t)$.

Если математическое описание объекта моделирования не содержит элементов случайности или они не учитываются, т. е. если можно считать, что в этом случав стохастические воздействия внешней среды $v\ (t)$ и стохастические внутренние параметры $h\ (t)$ отсутствуют, то модель называется детерминированной в том смысле, что характеристики однозначно определяются детерминированными входными воздействиями:

$$\vec{y}(t) = f(\vec{x},t)\,. \tag{13}$$

Очевидно, что детерминированная модель является частным случаем стохастической модели.

3. Типовые математические схемы

- дифференциальные уравнения;
- конечные и вероятностные автоматы;
- системы массового обслуживания;
- сети Петри.

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы:

1. непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения);
2. дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
3. дискретно-стохастический (вероятностные автоматы);
4. непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания);
5. обобщенный или универсальный (агрегативные системы).