Глава 2.
Связность графов

2.1. Маршруты, цепи, циклы

Маршруты

Определения. Конечная последовательность вершин и ребер

$$x_0, u_1, x_1, u_2, \dots x_{l-1}, u_l, x_l \ (l \geq 0), \quad x_i \in V,\ u_i \in E$$

в которой соседние ребра имеют общую вершину, называется маршрутом из вершины x_0 в вершину x_l, или маршрутом, соединяющим x_0 с x_l.

В случае $x_0 = x_l$ маршрут называется циклическим. Число l называется длиной маршрута. Маршрут не является частью графа, так как порядок его обхода существенен.

Понятие маршрута не зависит от ориентации ребер.

Цепи и циклы

Маршрут называется цепью, если все ребра в нем различны. Цепь называется простой, если все ее вершины различны.

Циклическая цепь называется циклом (следовательно, в цикле все ребра различны). Цикл называется простым, если все его вершины различны, кроме $x_0 = x_l$.

Лемма. Всякий маршрут графа содержит хотя бы одну простую цепь, соединяющую ту же пару вершин.

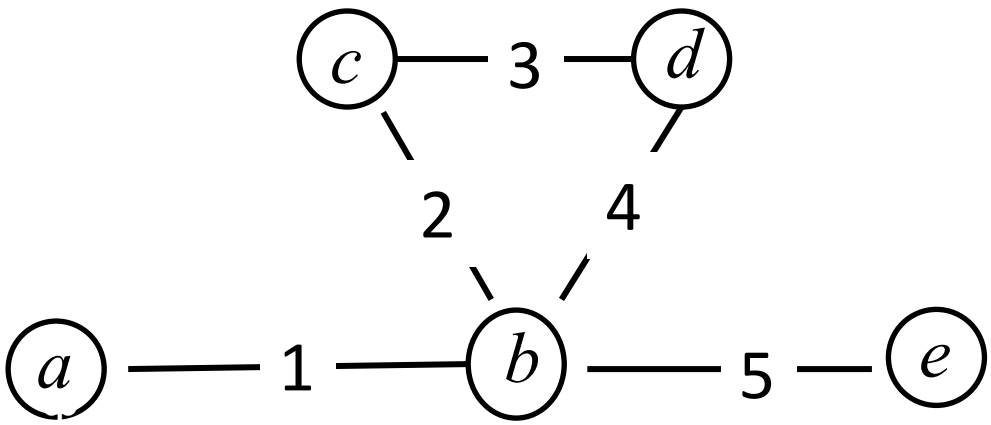
Доказательство

Если x_i -- первая из тех вершин маршрута, которая входит в него более одного раза, а x_j -- последняя из совпадающих с x_i вершин этого маршрута, то его можно заменить более коротким

$$x_0 u_1 x_1 \dots x_i u_{j+1} x_{j+1} u_{j+2} \dots x_{l-1} u_l x_l$$

Если в полученном маршруте есть еще повторяющиеся вер-шины, то снова заменяем его более коротким и так далее, пока не выделим маршрут без повторяющихся вершин.

Приме
р



Маршрут $a\ 1\ b\ 2\ c\ 3\ d\ 4\ b\ 5\ e$ содержит простую цепь $a\ 1\ b\ 5\ e$.

Следствие Всякий кратчайший маршрут между двумя заданными вершинами графа есть простая цепь.

Всякий цикл наименьшей длины при заданной вершине является простым.

Если маршрут рассматривать с учетом ориентации ребер (может быть и по звеньям), то получим соответствующие определения:

ориентированный маршрут (ормаршрут);

ориентированная цепь (орцепь) – путь;

простая орцепь – простой путь.

Задачи о маршрутах

В теории рассматривается ряд задач и алгоритмов определения свойств маршрутов:

существование маршрутов заданной длины;

достижимость вершин;

число маршрутов заданной длины;

компоненты связности и бисвязности;

кратчайшие цепи/пути;

кратчайшие цепи/пути на взвешенных графах.

Существование маршрутов

Рассматривается неориентированный (маршрут не предполагает ориентации) унограф (важен лишь факт смежности вершин).

Такой граф можно рассматривать как симметричное бинарное отношение и его можно задать матрицей смежности R, элементы r_{ij} которой – булевы. $r_{ij=}1$, если вершины смежны; из вершины x_i существует маршрут длины 1 в вершину x_j.

Элемент матрицы $r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}^{(1)} \wedge r_{kj}$ определяет существование маршрута длины 2 между этими вершинами. Далее по индукции:

$$r_{ij}^{(l)} = \bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}^{(l-1)} \wedge r_{kj} \qquad (*)$$

R^2

маршрут длины l из вершины x_i в вершину x_j существует, если

существует маршрут длины l-1 из вершины x_i в вершину x_k

и вершины x_k и x_j

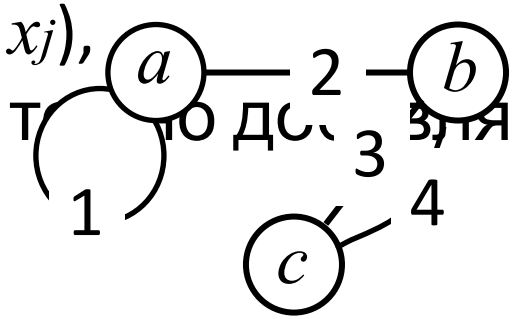
смежны.

Для маршрутов других видов задаются соответствующие матрицы смежности.

Нахождение маршрутов

Зададим граф общего вида тройками вида (x,v,y), где $x,y \in V$, $v \in E$.

Умножение отношений примет следующий вид: если существует маршрут из вершины x_i в вершину x_k длины l-1 и есть ребро (x_k, v, x_j), то до... является к маршруту длины l.



Длина 1	Длина 2	Длина 3	
$a1a$	$a1a1a$	$a1a1a1a$	
$a2b$	$a1a2b$	...	
$b2a$	$a2b2a$	$a1a2b3c$	...
$b3c$	$a2b3c$	$b2a1a2b$	
$b4c$	$a2b4c$	$b3c4b2a$	
$c3b$	$b2a1a$	...	
$c4b$	$b2a2b$	$c3b4c3b$	
	$b3c3b$	...	
	...		

Число маршрутов

Пусть задан граф общего вида с матрицей смежности R. Элемент r_{ij} определяет число ребер, соединяющих вершины x_i и x_j.

Возведем R в l – ю степень по правилам обычного матричного умножения и рассмотрим элемент $r_{ij}{}^{(l\}}$

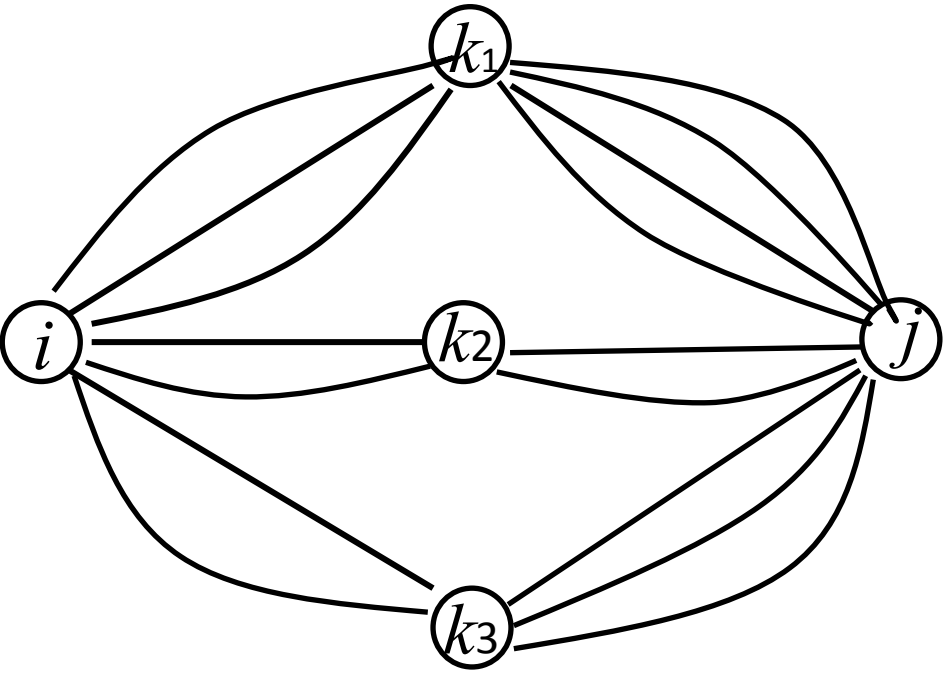
Теорема. Элемент $r_{ij}{}^{(l)}$ равен числу различных маршрутов длины l из вершины x_i в вершину x_j.

Доказательство индукцией по l.

$$r^{(l)}{}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r^{(l-1)}{}_{ik} r_{kj}$$

Число различных маршрутов длины 2 из вершины x_i в вершину x_j через вершину x_k есть

$$r^{(2)}_{ij\ ij} = r_{ik} r_{kj}$$

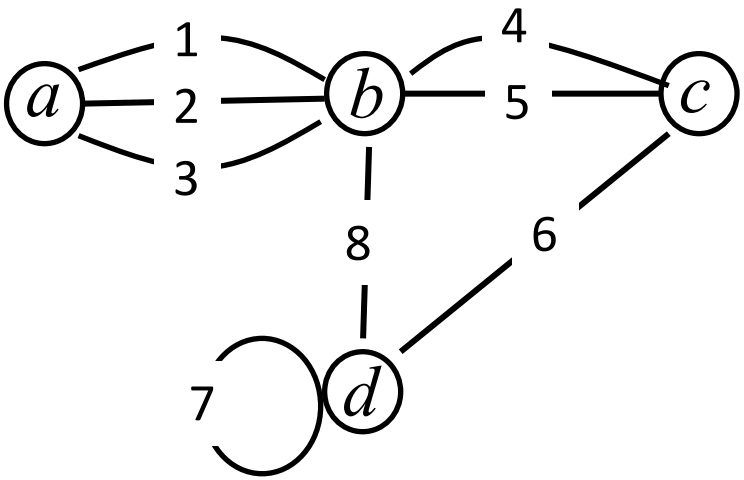


Просуммировав по всем k получим R^2 элемент матрицы

$$r^{(2)}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r^{(1)}_{ik} r_{kj}$$

Далее по индукции.

Здесь сложение и умножение – обычные арифметические операциии.



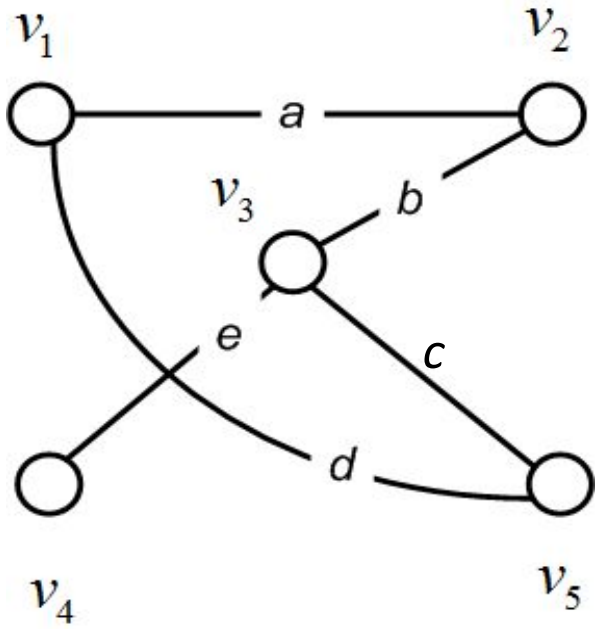
Приме
р

R	a	b	c	d
a	0	3	0	0
b	3	0	2	1
c	0	2	0	1
d	0	1	1	1

	a	b	c	d
a	9	0	6	3
b	0	14	1	3
c	6	1	5	3
d	3	3	3	3

	a	b	c	d
a	0	42	3	9
b	42	5	31	18
c	3	31	5	9
d	9	18	9	9

Для орграфов изменяется только матрица R.



R					
	0	1	0	0	1
	1	0	1	0	0
	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	0

	2	0	2	0	0
	0	2	0	1	2
	2	0	3	0	0
	0	1	0	1	1
	0	2	0	1	2

	0	4	0	2	4
	4	0	5	0	0
	0	5	0	3	5
	2	0	3	0	0
	4	0	5	0	0

	8	0	10	0	0
	0	9	0	5	9
	10	0	13	0	0
	0	5	0	3	5
	0	9	0	5	9

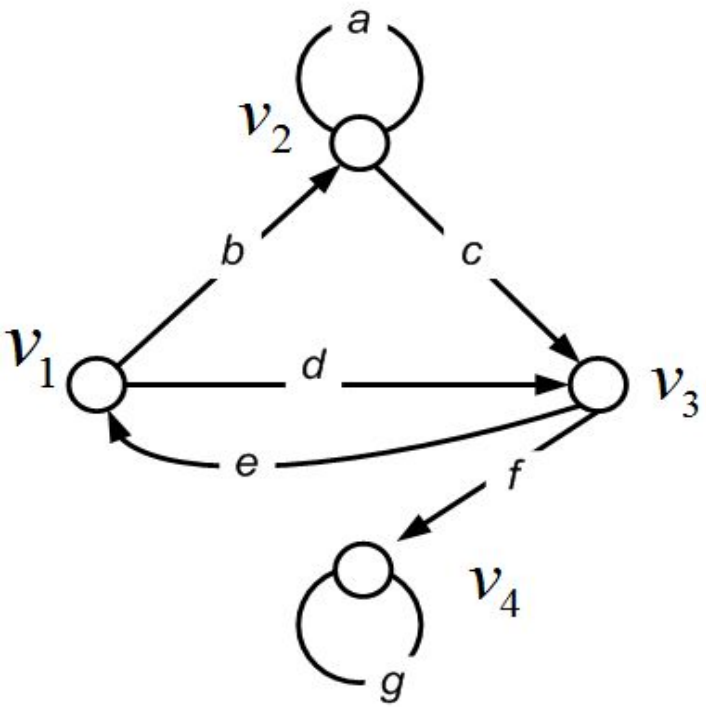
Достижимость

Если нас интересует только достижимость j — й вершины из i — й за l шагов, то есть наличие маршрута длины l, то операцию сложения в формуле умножения матриц следует слегка модифицировать , положив определяющее соотношение 1+1=1.
Тем самым мы определяем матрицу смежности над булевой алгеброй $\mathbf{B}\{0,1\}$.

При этом элемент $r^{(l)}{}_{ij}$ матрицы R^l будет равен 1, если существует хотя бы один маршрут длины l из вершины x_i в вершину x_j и 0, если не существует ни одного такого маршрута.

Ориентированные маршруты

Понятие маршрута можно обобщить на случай ориентированных графов. Ориентированная цепь (орцепь) часто называется путем , а ориентированный цикл – орциклом (*контуром*).



	0	1	1	0
	0	1	1	0
	1	0	0	1
	0	0	0	1

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	0	1	1	1
	0	0	0	1

	1	2	2	2
	1	2	2	2
	1	1	1	2
	0	0	0	1

2.2. Компоненты связности

Компоненты и бикомпоненты

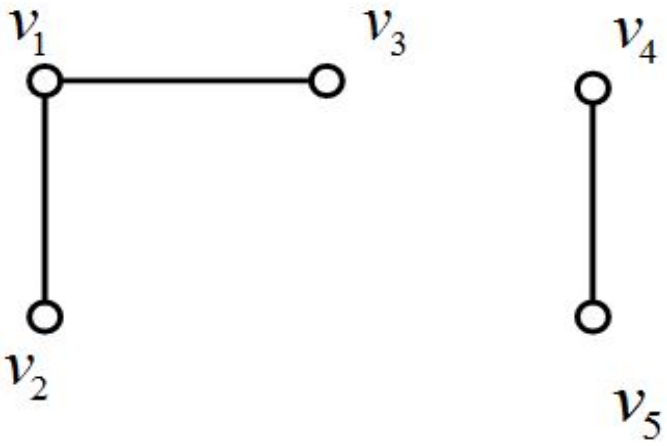
Определение. Вершины x, y графа G называются *отделенными* , если в G не существует никакой соединяющей их цепи, и *неотделенными*, если хотя бы одна такая цепь существует.

Отношение неотделенности (*связности*) вершин
• рефлексивно (каждая вершина соединена с собой цепью нулевой длины);
• симметрично (цепь, записанная в обратном порядке – тоже цепь);
• транзитивно (если существует цепь из x в y, и цепь из y в z, то существует и цепь из x в z).

Таким образом, отношение неотделенности есть отношение эквивалентности на множестве вершин V; при этом V разбивается на классы попарно неотделенных вершин $V_1, V_2 \ldots V_\varkappa$.

Определение. Подграфы порожденные подмножествами V_i, не имеют общих вершин и ребер и называются *компонентами связности* (или просто *компонентами*).
Число их обозначается через $\varkappa(G)$ (каппа).
Если $\varkappa(G) = 1$, то граф называется *связным*. Другая крайность – *пустой* граф: для него $\varkappa(G) = n$.

Отношение «быть в одной компоненте » для ребер – эквивалентность,
как и для вершин.



R					
	0	1	1	0	0
	1	0	0	0	0
	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1
	0	0	0	1	0

$R \cup I$

1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1

$(R \cup I)^2$

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1

$(R \cup I)^3$

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1

$(R \cup I)^4$

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1

Для ориентированных графов

Вершина y *достижима* из вершины x, если существует путь из x в y (высказывание $D(x,y)$). Вершины x и y *взаимодостижимы* , если истинно высказывание $D(x,y) \wedge D(y,x)$.
Отношение взаимодостижимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.
Множество V вершин графа разбивается на классы взаимодостижимых вершин.

Определение. Подграфы, порожденные этими подмножествами называются *компонентами бисвязности*, или *бикомпонентами* графа G.

Граф называется сильно связным, если он состоит из единственной бикомпоненты.

Множество вершин, достижимых из вершины x, обозначим $Д(x)$.

Теорема Вершины x и y взаимодостижимы тогда и только тогда, когда $Д(x) = Д(y)$.

$\Rightarrow$ Если x и y взаимодостижимы, то для любой вершины $z \in V$

ввиду транзитивности отношения взаимодостижимости, из $z \in Д(x)$ следует $z \in Д(y)$, а из $z \in Д(y)$ следует $z \in Д(x)$,

Поэтому $Д(x) = Д(y)$.

$\Leftarrow$ Пусть $Д(x) = Д(y)$. Так как $x \in Д(x)$ и $y \in Д(y)$, то из равенства

$Д(x) = Д(y)$ следует, что $y \in Д(x)$ и $x \in Д(y)$, т.е. вершины x и y

взаимодостижимы.

Матрица смежности R над булевой алгеброй $\mathbf{B}\{0,1\}$ рефлексивна ($R = R \cup I$, I – единичная матрица), т.к. любая вершина связна сама с собой и достижима сама из себя. Для неориентированного графа R симметрична.

Отношение неотделенности/достижимости – это транзитивное замыкание отношения смежности

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \cdots$$

Элемент матрицы $\hat{R}$ $\hat{r}_{ij} = 1$, если существует цепь/путь из вершины x_i в вершину x_j. Для нахождения $\hat{R}$ применяется итеративная процедура: для первой итерации положим $R_1 := R$; далее итеративно

$$R_{l+1} := R_l \oplus R_l \otimes R_l \quad (l - \text{индекс итерации})$$

Здесь операция $\oplus$ -- это $\cup$ (объединение), $\otimes$ -- произведение отношений (матриц). На некоторой итерации $R_{l+1} = R_l$ и процесс останавливается; при этом $\hat{R} = R_l$.

Алгоритм работает «на месте» -- матрица R^{l+1} записывается на месте матрицы R.

$$r_l[i,j] := r_{l-1}[i,j] \vee r_{l-1}[i,k] \wedge r_{l-1}[k,j]$$

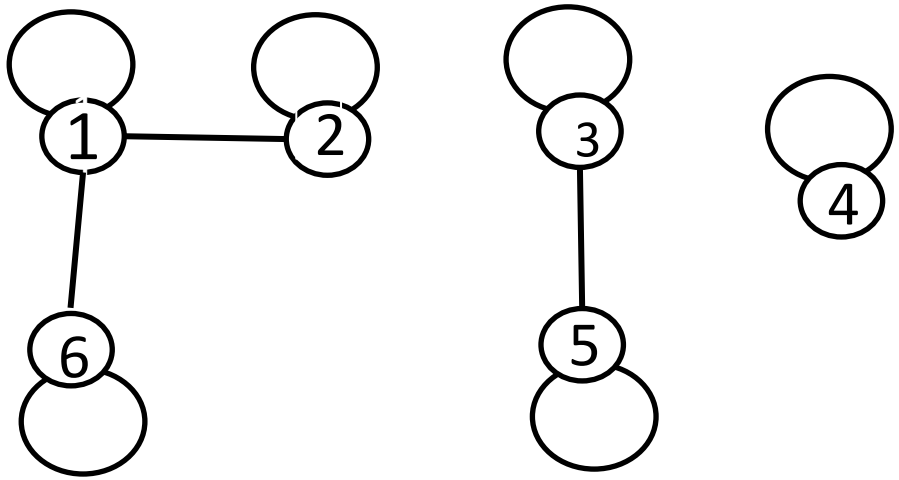
Пример (для компонент)

Фрагмент программы выглядит так:

```
for i=1 to n
 for j=1 to n
  for k=1 to n
    {r[i,j]:=r[i,j]∨ r[i,k] ∧
r[k,j];}
```

Пока матрица не перестанет изменяться

(**)



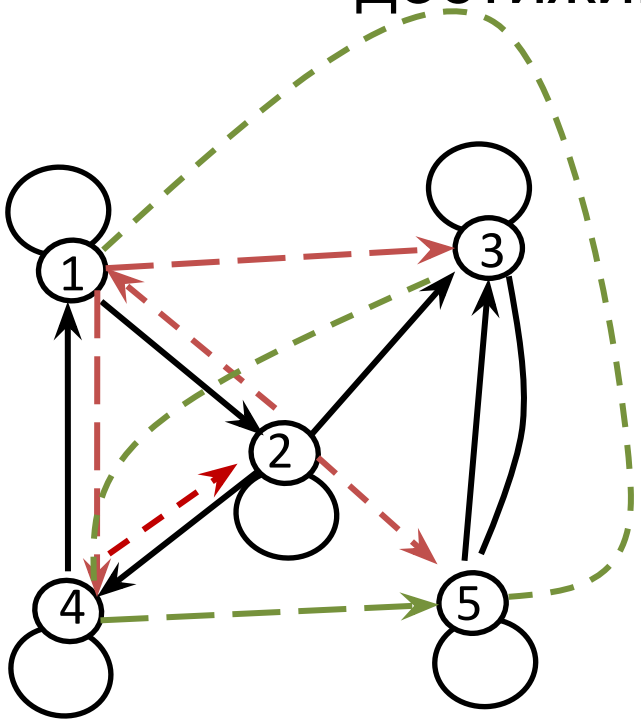
R	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	1	0	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	1

Компоненты связности образуют множества V_1={1,2,6}, V_2={3,5}, V_3={4}. Вершинам одной компоненты соответствуют одинаковые строки матрицы $R_{l+1} = \hat{R}$.

Пример (бикомпоненты, матрица достижимости)



R	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1

$R2$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1

$R3$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

$R4$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

V_1={1,2,4},

V_2={3,5}

Сложность этого алгоритма $O(n^4)$. Сложность умножения матриц составляет $O(n^3)$ и число итераций имеет порядок n.

С. Уоршалл (1962 г.)предложил алгоритм нахождения транзитивного замыкания сложности $O(n^3)$. Экономия достигается за счет изменения порядка просмотра троек вершин в цикле (**).
На нулевой итерации R_0=R $(r_0[i,j] = r[i,j])$.

Фрагмент программы:

```
for k=1 to n
  for i=1 to n          (***)
   for j=1 to n
    {r[i,j]:=r[i,j] ∨ r[i,k]  ∧ r[k,j];}
```

На k-м шаге цикла по k ($k-$ индекс итерации)
$r_k[i,j] = r_{k-1}[i,j] \vee r_{k-1}[i,k] \wedge r_{k-1}[k,j]$
существует путь из вершины x_i в вершину x_j, проходящий через вершины с номерами, не превышающими k, только в следующих случаях.

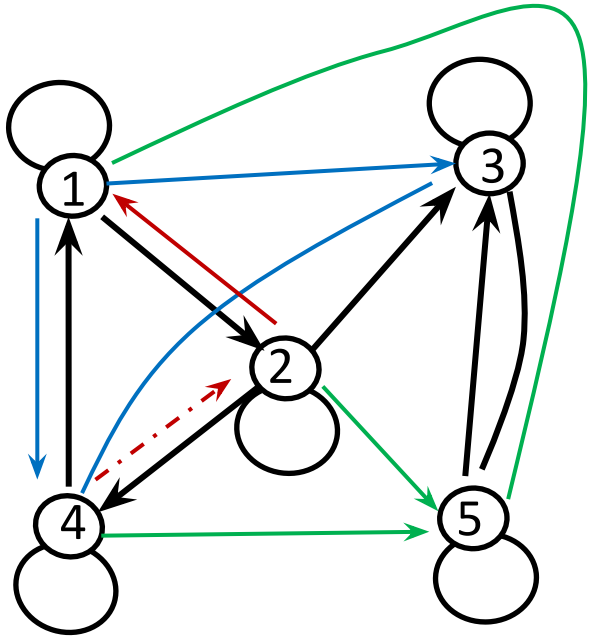
1. Уже существует путь из вершины x_i в x_j, который проходит через вершины с номерами не более k-1.
2. Существует путь из вершины x_i до вершины x_k, проходящий через вершины с номерами не более k-1, и путь от вершины x_k до вершины x_j, который также проходит через вершины с номерами не более k-1.

По завершению цикла по k определится существование путей между всеми парами вершин.

Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. (стр. 194-195)
Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2000. — 384 с.

Алгоритм работает «на месте» -- матрица R_k записывается на месте матрицы R.

Пример (алгоритм Уоршалла)



R_1	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	1	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1

R_2	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	0
5	0	0	1	0	1

R_3	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

R_4	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

R_5	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

$V_1=\{1,2,4\}, \quad V_2=\{3,5\}$

Warshall carried out research and development in operating systems, compiler design, language design, and operations research.
Known for Floyd–Warshall algorithm

https://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Warshall

Warshall Stephen (1935 – 2006)

2.3. Кратчайшие цепи

Волновой алгоритм

Пусть задан связный обыкновенный граф. Поставим задачу найти кратчайшую (с минимальным числом ребер) цепь, соединяющую вершины s и t.

Описание алгоритма.

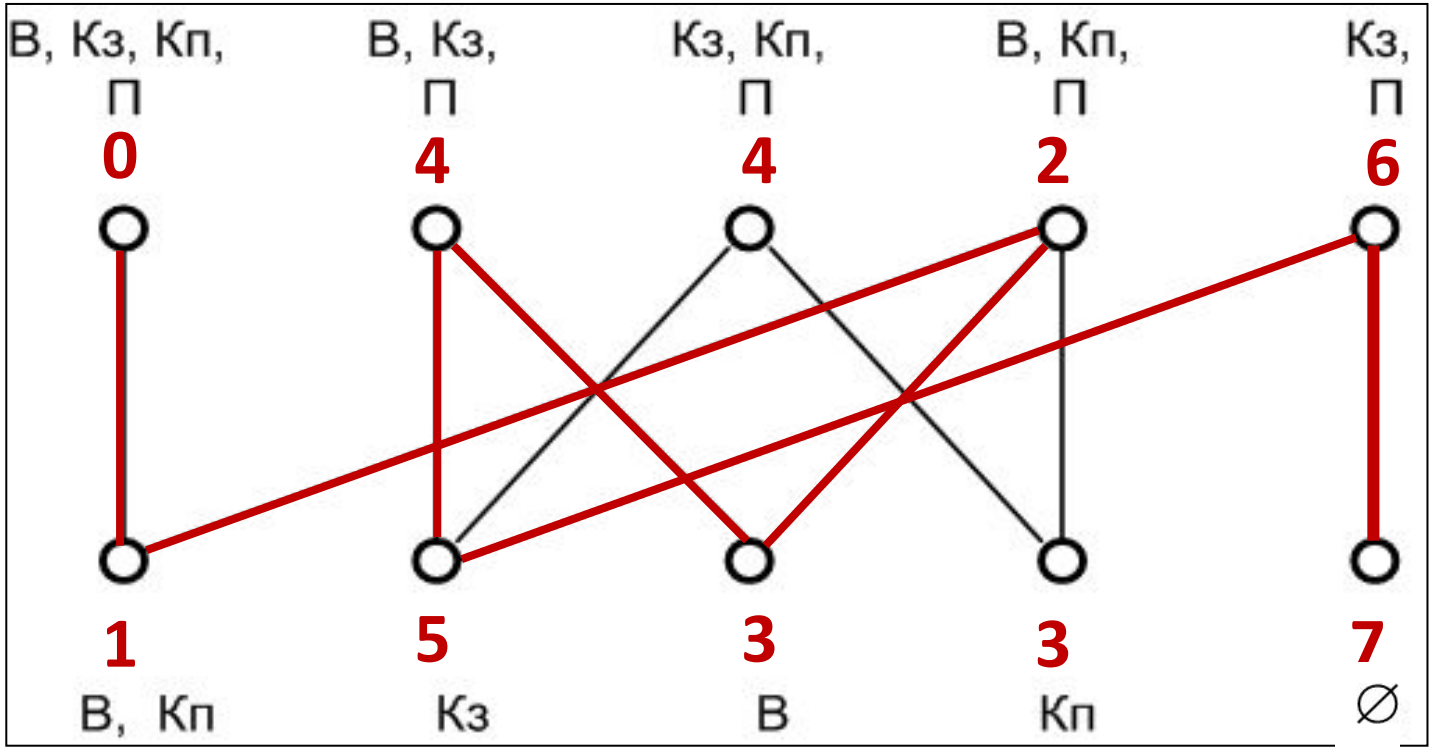
Шаг 1. Помечаем вершину s меткой 0.

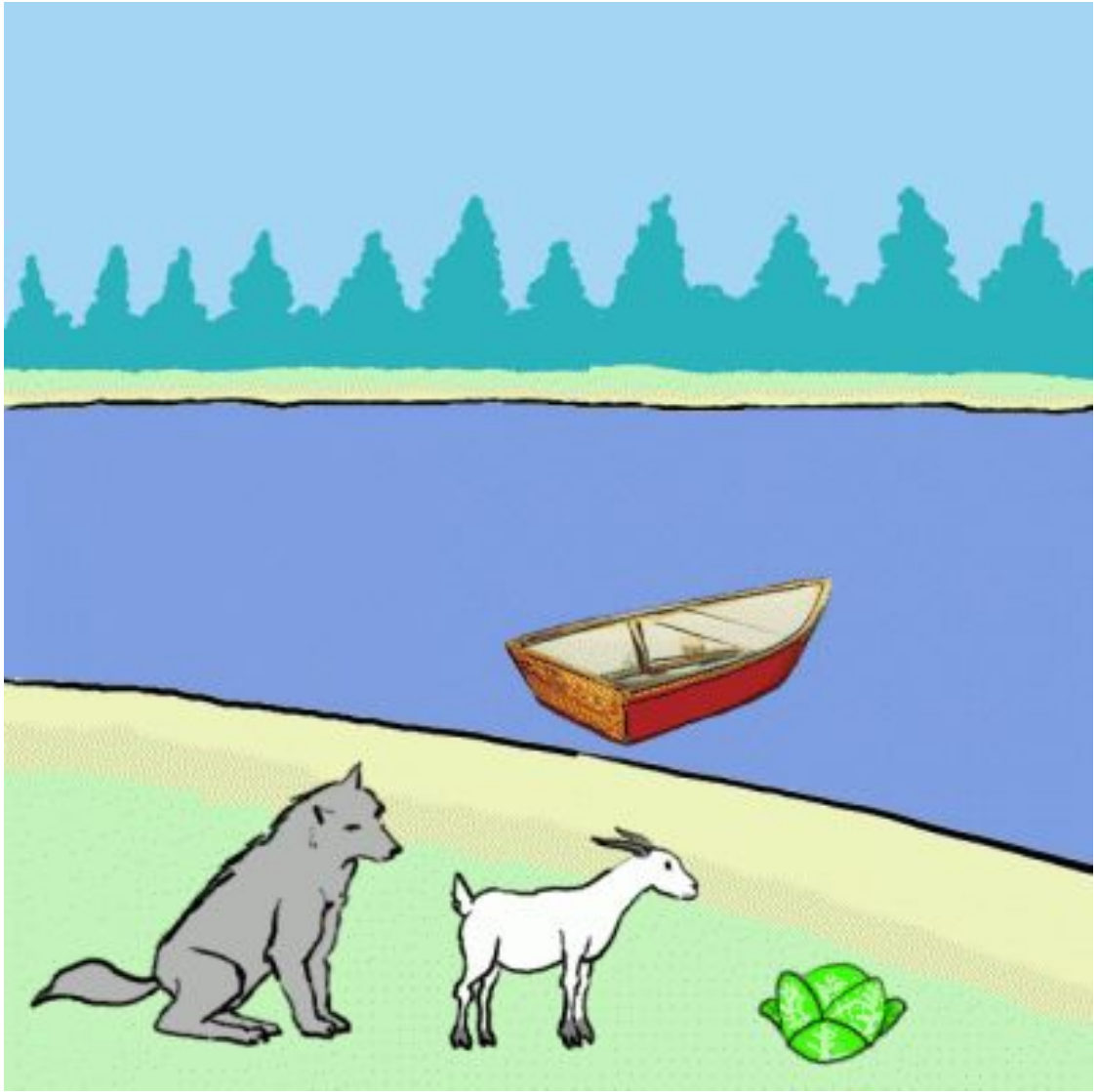
Шаг 2. Меткой $k+1$ помечаем каждую вершину, которая еще не помечена и смежна хотя бы с одной вершиной, помеченной меткой k. Разметка прекращается, как только вершина t окажется помеченной некоторой меткой l.

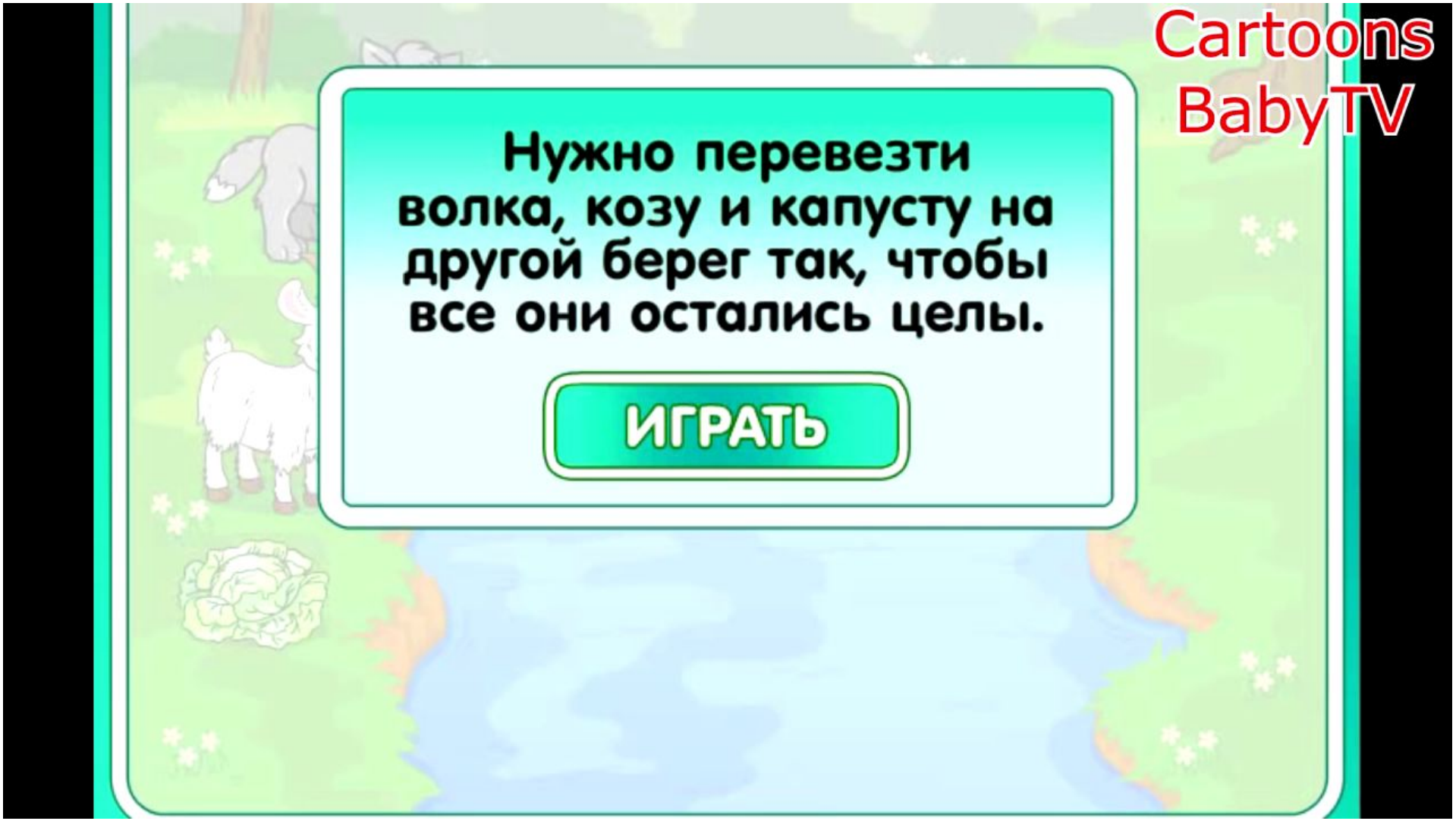
Шаг 3. Сама кратчайшая цепь длины l отыскивается следующим образом. Начинаем с вершины t. За x_{l-1} берем любую вершину с меткой $l-1$ и смежную с t, а за u_l – любое ребро, соединяющее x_{l-1} с t. За x_{l-2} выбираем любую вершину, помеченную меткой $l-2$ и смежную с x_{l-1}, а за u_{l-1} – любое ребро, соединяющее x_{l-2} с x_{l-1} и так далее, пока не дойдем до вершины s.

Пример 1. Задача о Волке, Козе (Кз) и Капусте (Кп), которых Перевозчик (П) перевозит с одного берега реки на другой в двухместной лодке

Вершины графа соответствуют наличию персонажей на исходном берегу. Показаны только допустимые комбинации.

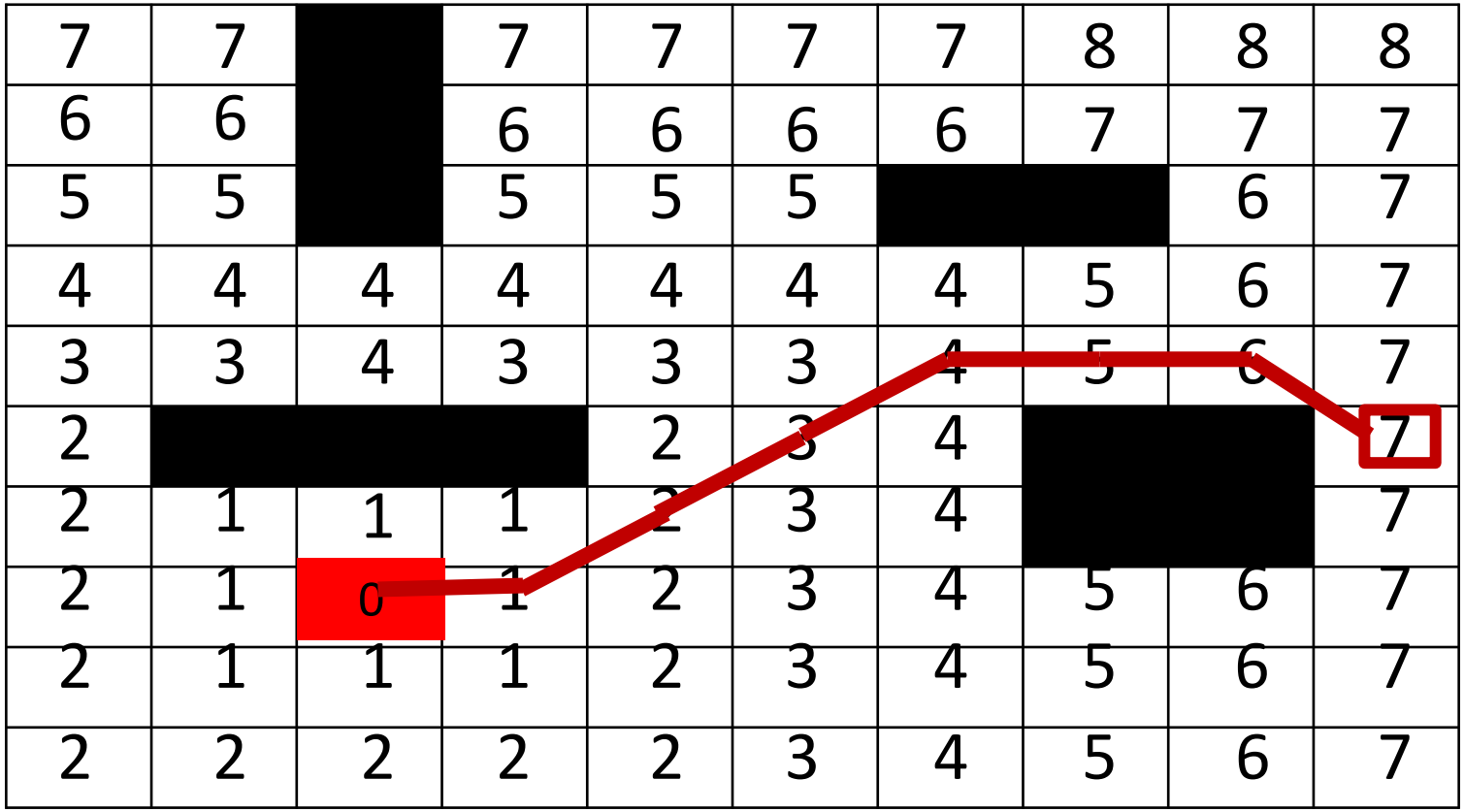






https://www.youtube.com/watch?v=YDX-ohCVtxY

Пример 2. Волновой алгоритм прокладки проводов на плате (алгоритм Ли)



Взвешенный граф

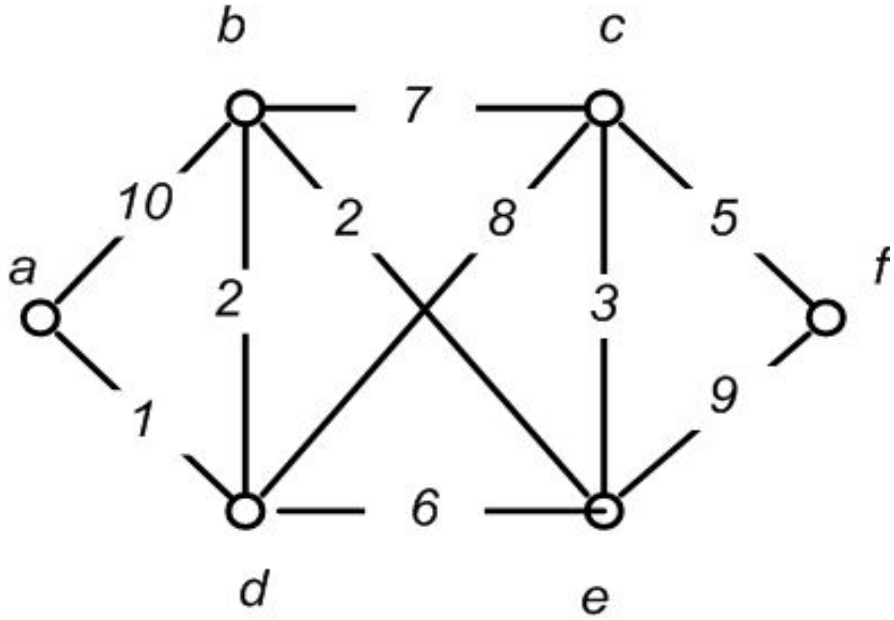
Пусть задан граф $G = (V, E)$ и отображение $f : E \to C$, ставящее в соответствие каждому ребру u, соединяющему пару вершин $\{x_i, x_j\}$, число c_{ij} – вес (длина) ребра. Таким образом задается *матрица длин* ребер $C = (c_{ij})$ размерности $n \times n$. Если ребро отсутствует, то $c_{ij} = \infty$.

Под длиной маршрута понимается сумма длин ребер, входящих в маршрут.

Требуется найти кратчайший по длине маршрут. Легко убедиться, что это простая цепь.

Пример

	a	b	c	d	e	f
a	0	10	∞	1	∞	∞
b	10	0	7	2	2	∞
c	∞	7	0	8	3	5
d	1	2	8	0	6	∞
e	∞	2	3	6	0	9
f	∞	∞	5	∞	9	0



Рассмотрим случай, когда имеется одна выделенная вершина (источник) s и требуется найти кратчайший маршрут до другой вершины.

$$s = a \rightarrow f \quad ?$$

Алгоритм Беллмана - Форда

Алгоритм заключается в последовательной разметке вершин графа. Метка при вершине x состоит из двух частей: числовой $L(x)$ и навигационной $M(x)$, которая является ссылкой на некоторую предшествующую вершину.

Шаг 0. Инициализация.

Назначим вершине s *числовую* метку $L(s) = 0$. Для всех вершин x, отличных от s, назначим метки $L(x) = \infty$. Все навигационные метки при вершинах ссылаются на себя: $M(x) = x$.

Шаг 1. Итерационный цикл разметки вершин.

Находим любое ребро (x, y), для которого $L(y) - L(x) > c(x, y)$ и обновляем числовую метку вершины y на $L'(y) = L(x) + c(x, y)$. Очевидно, метка $L'(y)$ может только уменьшиться: $L'(y) < L(y)$ при $y \neq s$. Обновленная навигационная метка при этом ссылается на предшествующую вершину x, вызвавшую данное обновление: $M'(y) = x$.

Цикл продолжается до тех пор пока метки не установятся, то есть не найдется больше ни одной вершины y, для которой можно уменьшить метку.

Шаг 2. Нахождение кратчайшей цепи.

Идем с конца - вершины $x_k = t$ к началу по навигационным меткам: $x_{k-1} = M(x_k), x_{k-2} = M(x_{k-1})$, … $x_0 = M(x_1) = s$.

Легко видеть, что при этом разность числовых меток соседних вершин в точности равна длине соединяющего их ребра: $L(x_k) - L(x_{k-1}) = c(x_{k-1}, x_k)$.

Теорема. Построенный маршрут кратчайший и его длина из s в t есть $L(t)$.

Доказательство. Пусть в размеченном с помощью алгоритма графе имеется **произвольный** маршрут $M\ [s = x_0, x_1 \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = t]$. длины $c(s,t)$.

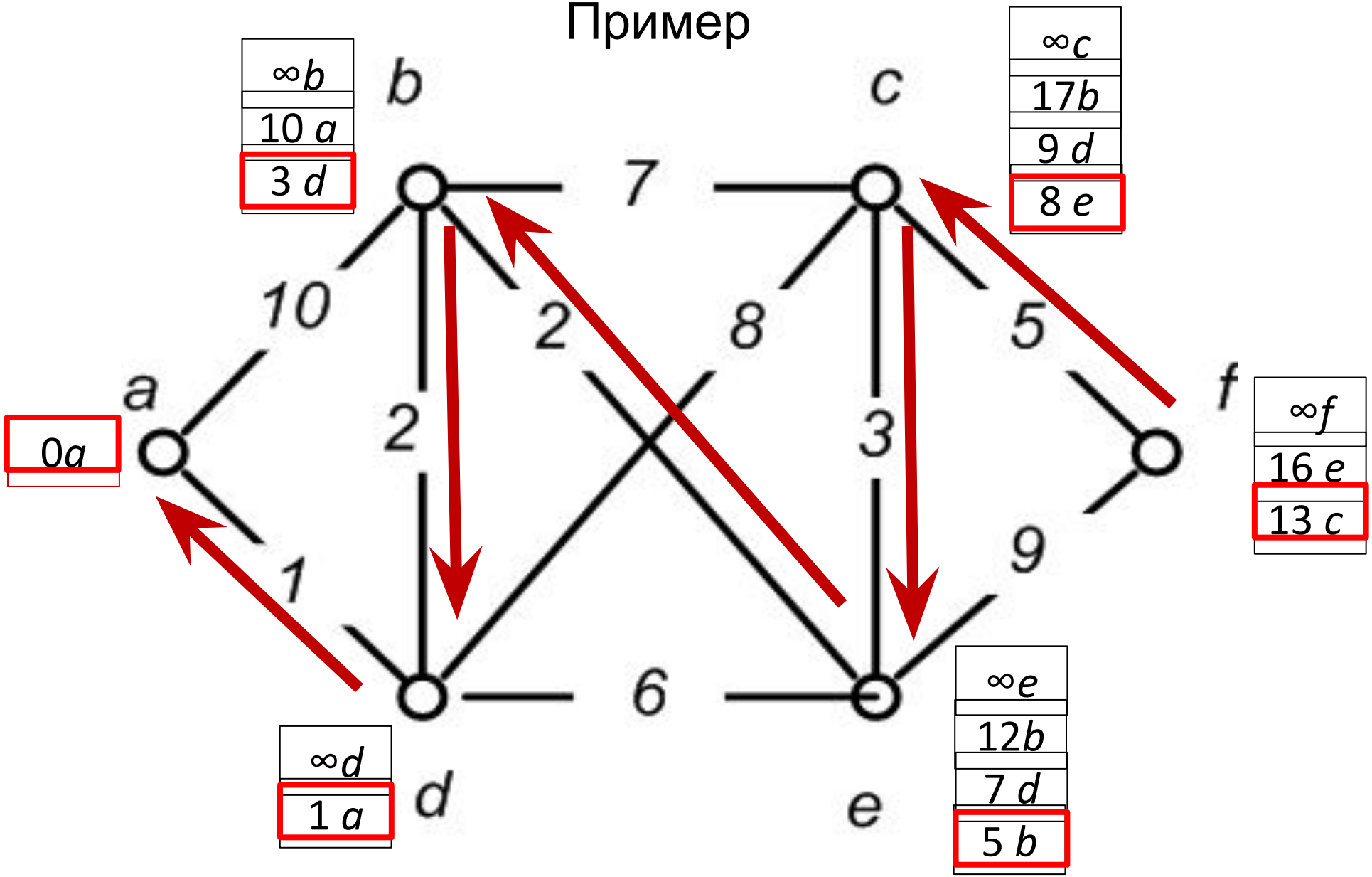
Тогда

$$L(x_1) - 0 \leq c(x_0, x_1),$$
$$L(x_2) - L(x_1) \leq c(x_1, x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$L(x_{n-1}) - L(x_{n-2}) \leq c(x_{n-2}, x_{n-1}),$$
$$L(t) - L(x_{n-1}) \leq c(x_n, x_{n-1})$$

+

$$L(t) \leq c(s,t)$$

Пример



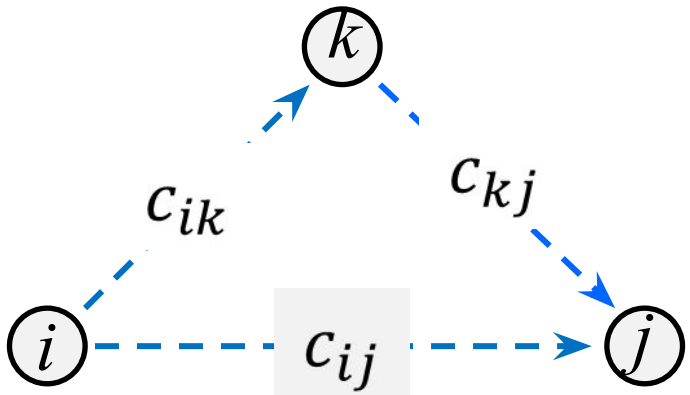
Замечание. Алгоритм находит кратчайшие цепи от одной исходной вершины (в данном случае a) до всех остальных.

Иллюстрация работы алгоритма Форда

Итерации	Ребро	a	b	c	d	e	f
0		$0a$	∞b	∞c	∞d	∞e	∞f
1	ab		$10a$				
2	ad				$1a$		
3	bc			$17b$			
4	be					$12b$	
5	db		$3d$				
6	dc			$9d$			
7	de					$7d$	
8	ef						$16e$
9	eb					$5b$	
10	ec			$8e$			
11	cf						$13c$

Если метка у вершины не меняется, клетка в следующей строке данного столбца не заполняется. Заключительные метки выделены красным цветом.

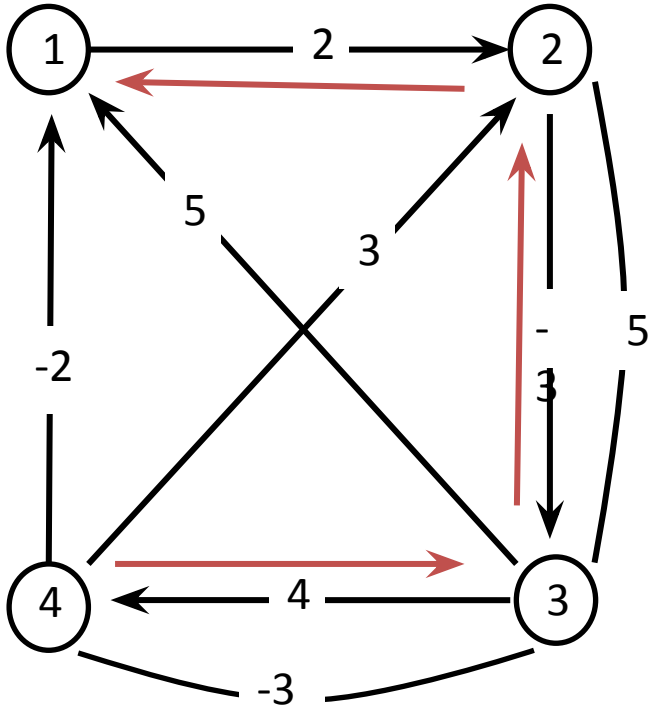
В таком представлении алгоритм Беллмана — Форда более пригоден
для «ручного» исполнения.
Пусть вершины пронумерованы $V=\{1,2,\ldots,n\}$ и начальная вершина
s =1. Метка вершины $L(x)=[l(x),p(x)]$, где $l(x)$ – метка расстояния вершины x от начальной, $p(x)$ – метка предшествования (навигационная). На шаге инициализации $i=s=1$, $l(1)=0$, $p(1)=1$; для остальных x $l(x)=c_{1x}, p(x)=1$.



Перебираются тройки i,j,k:
$sum := c_{ik} + c_{kj}$;
если $sum<c_{ij}$, то $c_{ij}:=sum$;
$c_{ij}:=\min[c_{ij}, c_{ik} + c_{kj}]$; $p(j):=k$

Для нахождения кратчайших цепей/путей между всеми парами вер-шин нужно выполнить цикл по i.

Пример



0	2	∞	∞

⊗

C	1	2	3	4
1	0	2	∞	∞
2	∞	0	-3	∞
3	5	5	0	4
4	-2	3	-3	0

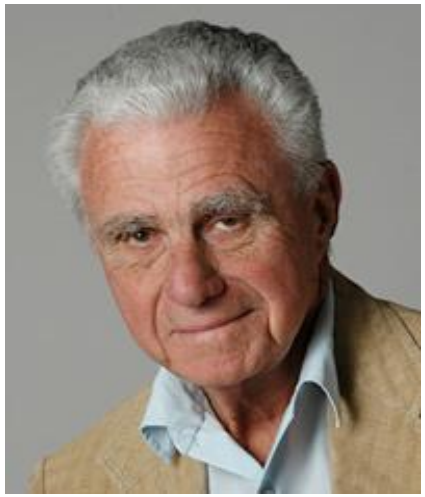
i:=1; {for q=1 to n {p[q]:=i};

```
{for j=1 to n
 for k=1 to n
  { s:=c[i,k]+c[k,j];
    if s<c[i,j] then
    {c[i,j]:=s; p[j]:=k;}
   }
 }
```

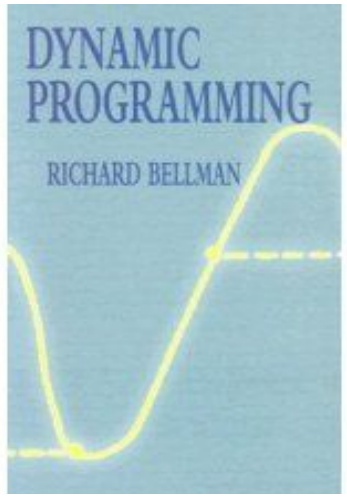
Пока метки не перестанут изменяться

1	2	3	4
0|1	2|1	∞| 1	∞|1
0|1	2|1	-1|2	∞ |1
0|1	2|1	-1|2	3|3
0|1	2|1	-1|2	3|3

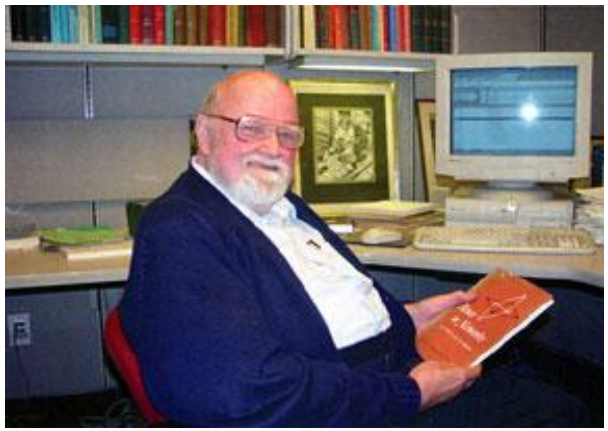
$$c[i,j]:=\min_{k}(c[i,j],c[i,k]+c[k,j])$$



БЕЛЛМАН, Ричард (1920- 1984) – «отец «динамического программирования» - американский математик. Опубликовал 619 статей и 39 книг. Один из наиболее цитируемых математиков в мире.
В расцвете творческой жизни после удаления опухоли на позвоночнике 11 лет был прикован к инвалидному креслу, но сохранил полную работоспособность
.



ФОРД, Лестер младший (1927 - 2017) – американский математик. Независимо от Беллмана в 1956 г. предложил алгоритм нахождения кратчайшего пути в графе, вместе с Фалкерсоном доказал теорему о наибольшем потоке в сети.



Алгоритм Дейкстры

Наиболее эффективный с точки зрения трудоемкости алгоритм разметки вершин предложил Дейкстра. Метки вершин делятся на две категории – временные L и постоянные L. Временная числовая метка дает верхнюю границу длины цепи от s до этой вершины. Эти метки постепенно уменьшаются с помощью итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации одна из временных меток становится постоянной. Тогда метка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшей цепи от s к вершине с постоянной меткой.

Навигационные метки расставляются аналогично алгоритму Форда и обновляются вместе с числовыми..

Шаг 0. Инициализация.

Назначить вершине *s* числовую метку $L(s) = 0$ и считать ее постоянной. Вершины с постоянными метками считаются обработанными и к ним алгоритм не возвращается.

Для всех $x \neq s$ назначить метки $L(x) = \infty$ и считать эти метки временными.

Текущая вершина $p = s$.

Шаг 1. Обновление соседних временных меток из текущей вершины.

Взять текущую вершину p. Рассмотреть **все смежные с ней** вершины x с временными метками и, если $L(x) - L(p) > c(p, x)$, то обновить их: $L(x) = L(p) + c(p, x)$.

Шаг 2. Превращение метки в постоянную.

а) Найти вершину x^*с наименьшей **временной** числовой меткой $L(x^*)$.

б) Превратить эту метку в постоянную.

в) Считать эту вершину текущей $p := x^*$.

г) Если есть еще временные метки, возврат на **шаг 1**.

д) Если все метки постоянные – переход на **шаг 3.**

Шаг 3. **Построение кратчайшей цепи.**

Точно так же, как в алгоритме Беллмана – Форда – от конца к началу по навигационным меткам $M(x)$.

При наличии всех постоянных меток доказательство оптимальности аналогично алгоритму Беллмана – Форда.

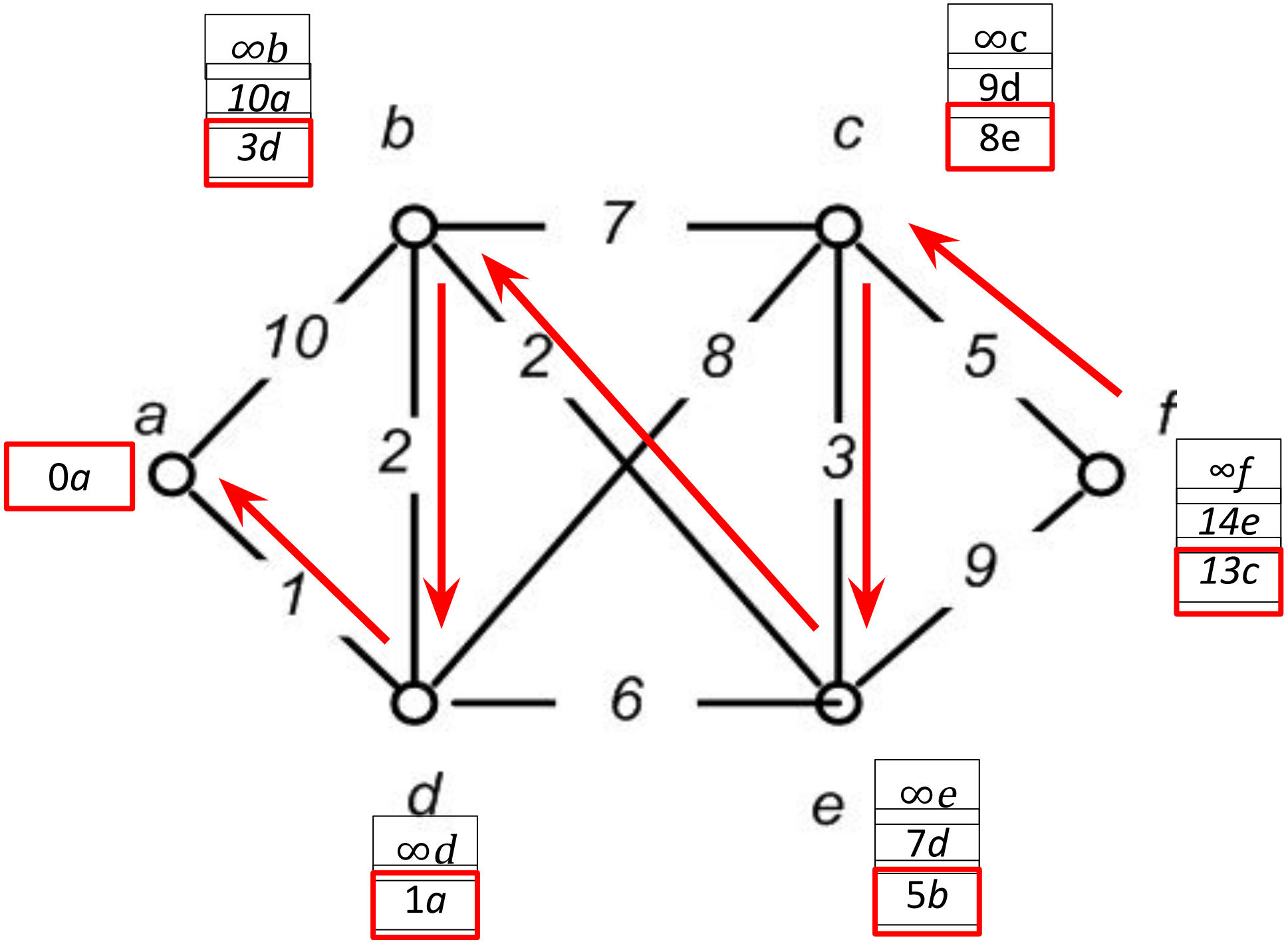

∞b
10a
3d
b
∞c
9d
8e
c
7
10
2
8
5
a
2
3
f
0a
1
9
6
∞f
14e
13c
d
∞d
1a
e
∞e
7d
5b

Иллюстрация работы алгоритма Дейкстры

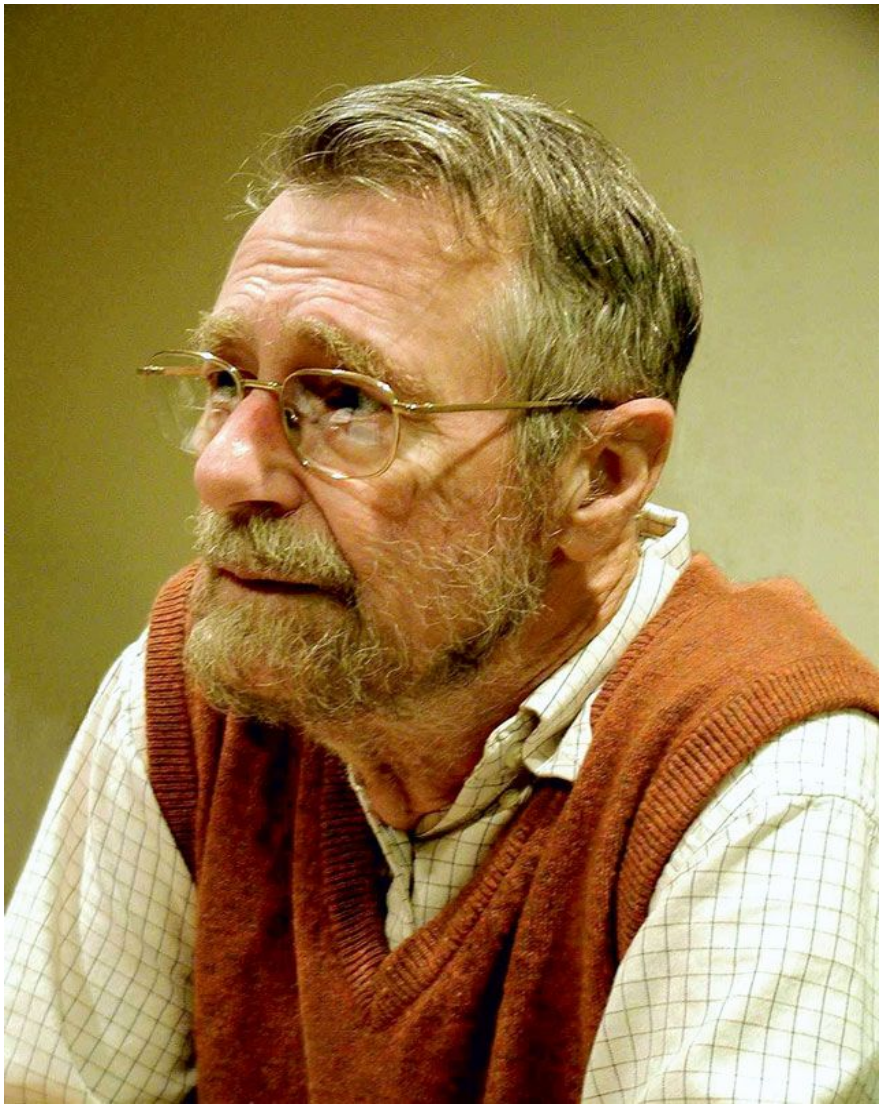
Итера-ция		Ме-тим x	a	b	c	d	e	f
0			$0a$	∞b	∞c	∞d	∞e	∞f
1	a	b		$10a$				
2	a	d				$1a$		
3	d	b		$3d$				
4	d	c			$9d$			
5	d	e					$7d$	
6	b	e					$5b$	
7	e	f						$14e$
8	e	c			$8e$			
9	c	f						$13c$

Обобщения

1. Алгоритмы Беллмана – Форда и Дейкстры легко распространяются на случай ориентированных (частично ориентированных) графов, при этом каждое неориентированное ребро представляется двумя дугами, ориентированными в разные стороны. Более того, веса (длины) этих дуг могут быть различными.

2. В алгоритме Беллмана – Форда допускаются отрицательные веса ребер, такие постановки задачи иногда полезны в приложениях. Этим он принципиально отличается от алгоритма Дейкстры, где отрицательные веса невозможны. Но «всеядность» алгоритма Беллмана – Форда оплачивается его более высокой трудоемкостью.

ДЕЙКСТРА, Эдсгер (Edsger Dijkstra; 1930-2002).
Нидерландский учёный, труды которого оказали большое влияние на развитие информатики; один из авторов языка Алгол и концепции структурного программирования. По образованию физик-теоретик. Во второй половине 1950-х годов в поисках путей оптимизации
разводки печатных плат разработал алгоритм поиска кратчайшего пути на графе.



Алгоритм Флойда

Предыдущие алгоритмы (Беллмана – Форда и Дейкстры) давали возможность находить кратчайшие маршруты между одной начальной вершиной (источником) s и или всеми другими вершинами графа.

Алгоритм Флойда (Флойда – Уоршалла), разработанный в 1962 г., позволяет найти длины кратчайших маршрутов между **всеми парами** вершинами.

Замечание. В алгоритме Флойда, так же как и в алгоритме Беллмана – Форда, нет ограничений на неотрицательность длин ребер, как будет показано в примере.

Пусть задан взвешенный *унграф* (ориентированный, неориентированный, смешанный) $G=(V,E)$ с матрицей весов (длин) $C=(c_{ij})_{n\times n}$, где $c_{ii}=0$; $c_{ij}=\infty$, если нет ребра (x_i, x_j);
навигационная матрица (матрица предшествований) $P=(p_{ij})_{n\times n}$;
C_k и P_k -- матрицы, полученные на k – й итерации.

Инициализация

$C_0:=C;$

P_0 ⇨

```
for i=1 to n
for j=1 to n
p[i,j]:=i;
```

Основной цикл

Алгоритм работает «на месте»: старые значения элементов матриц C и P заменяются на новые; по завершению цикла по k ($k=n$) C становится матрицей длин кратчайших цепей/путей, а P -- матрицей
самих цепей/путей.

На каждой итерации по k вычисляется $C_k := C_{k-1} \oplus C_{k-1} \otimes C_{k-1}$, где операция $\oplus$ -- это min, а $\otimes$ -- обычное арифметическое сложе-ние. Поэлементно на этой итерации

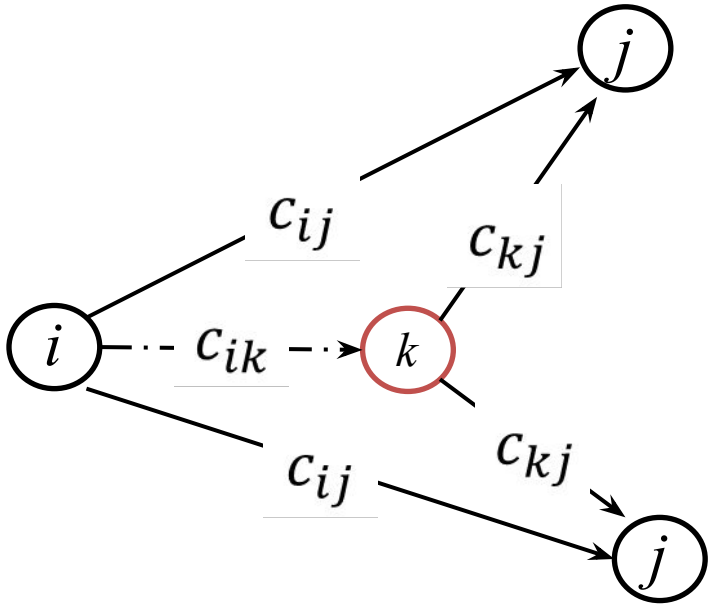
$$c_{ij}^{(k)} := \min\left(c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)} \right)$$

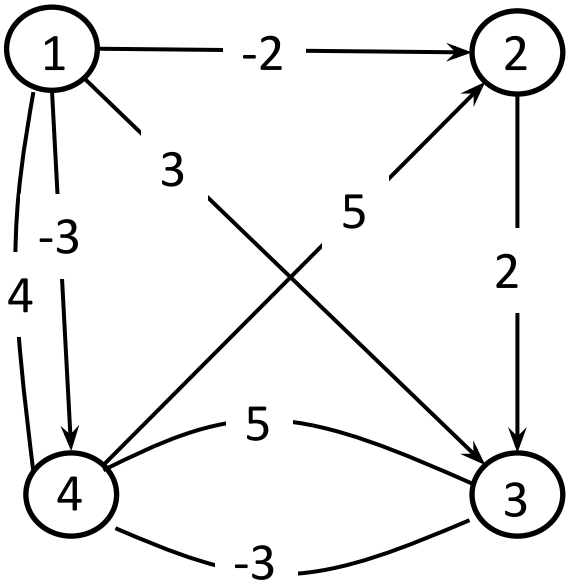
На k-й итерации вершина k включается в путь только тогда, когда новый путь короче старого. На n-й итерации все пути c_{ij} — кратчайшие.

Фрагмент программы:

```
for k=1 to n
for i=1 to n
for j=1 to n
  { s:=c[i,k]+c[k,j];
  if s<c[i,j] then
  {c[i,j]:=s; p[i,j]:=p[k,j];}
 }
```

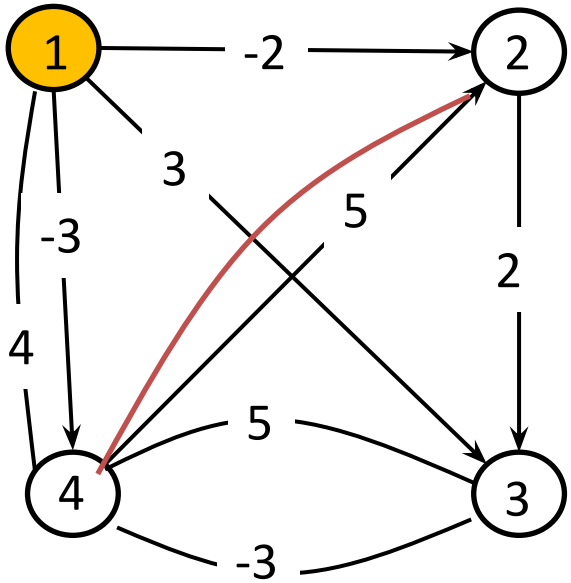
c[i,j]:=min(c[i,j],c[i,k]+c[k,j])
k





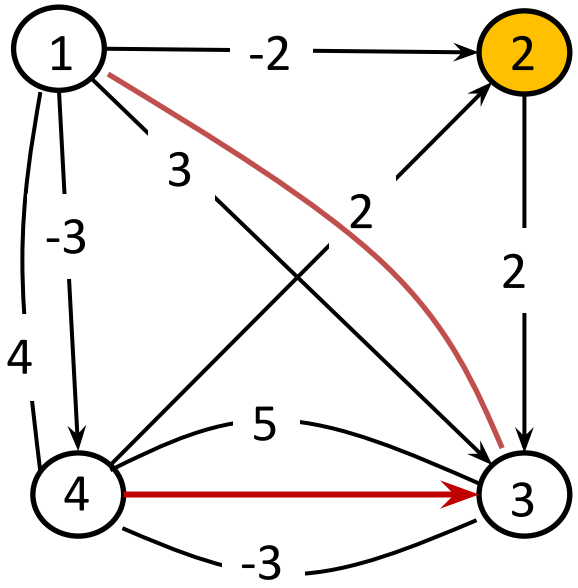
C_0	1	2	3	4
1	0	-2	3	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	5	5	0

P_0	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4



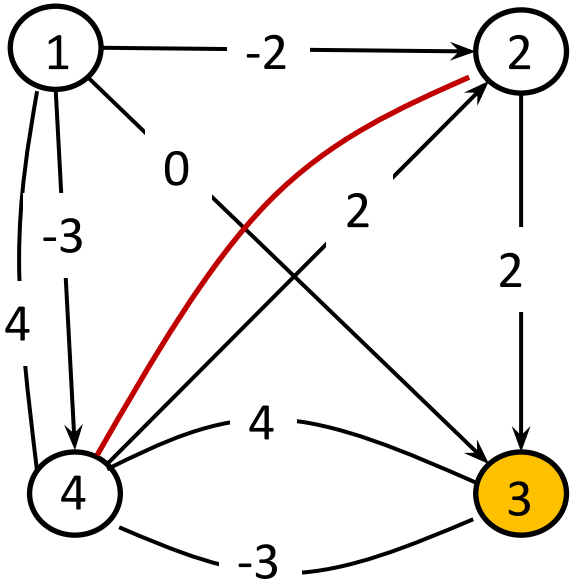
	1	2	3	4
1	0	-2	3	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	2	5	0

P_1	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	1	4	4



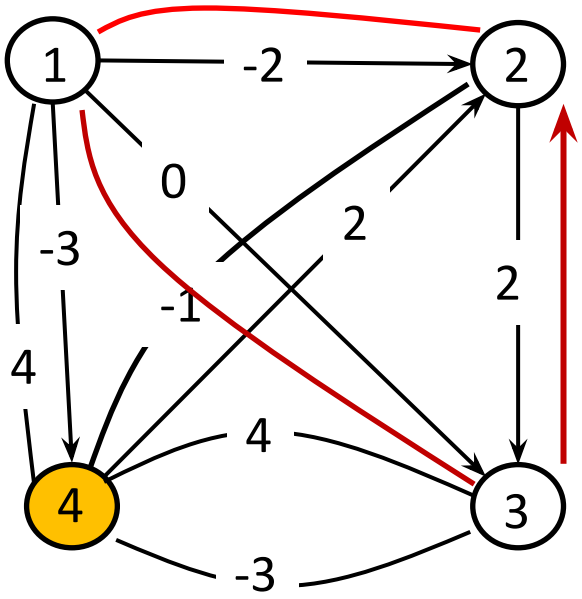
	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	2	4	0

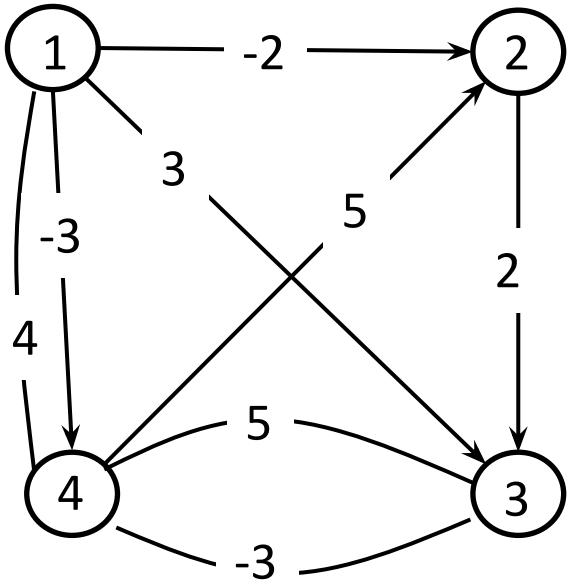
P_2	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	1	2	4



	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	2	4	0

P_3	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3
4	4	1	2	4





	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2		0	2	
3		-1	0	-3
4	4	2	4	0

P_4	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	4	2	2	3
3	4	1	3	3
4	4	1	2	4

Найдем, например, кратчайший путь из 2 в 1 по меткам предшествования на исходном графе (в обратном порядке). Выберем строку 2 в матрице P_4. Вершине 1 предшествует 4, 4-й – вершина 3, 3-й – вершина 2: 1-4-3-2.

Сам путь: 2-3-4-1 длины c_{21}=3.

	1	2	3	4
2	4	2	2	3

Замечание. Алгоритмы Беллмана – Форда и Флойда работают корректно, если в графе нет циклов отрицательной длины (сумма длин которых отрицательна). В противном случае длина кратчайшей цепи/пути уменьшается до -∞ (программа зацикливает). Это обнаруживается,
когда некоторые диагональные элементы становятся отрицательными.

Этот алгоритм применим и для нахождения цепи/пути наибольшей длины (критического пути).
Операция $\oplus$ заменяется на max, и в матрице весов $c_{ij}=-\infty$, если нет ребра (x_i, x_j).
Другой пример: найти цепь/путь максимальной надежности в сети связи. Надежность ребра ρ_{ij} — это вероятностная характеристика $0\leq \rho_{ij}\leq 1$; надежность цепи определяется как произведение (обычное) надежностей ребер цепи.
Тогда $\oplus$ — операция max, а $\otimes$ — умножение.

ФЛОЙД, Роберт В (*Robert W Floyd*, 1936 – 2001) — американский учёный в области теории вычислительных систем. Лауреат премии Тьюринга.
Роберт окончил школу в возрасте 14 лет, перепрыгнув три класса. Флойд не имел титула PhD.
В Стэнфорде Флойд тесно работал с Дональдом Кнутом, в том числе в качестве главного редактора серии его знаменитых книг «Искусство программирования».